Über die unbeschränkte Fortsetzbarkeit einer stetigen ebenen Bewegung in einer unbegrenzten inkompressiblen Flüssigkeit*).

Von

Ernst Hölder in Leipzig.

Im Raum der Lagrangeschen Variablen a, b (Anfangswerte der Koordinaten zur Zeit t_0) gebe ich die Anfangswirbelgeschwindigkeit $\zeta_0(a, b)$, die einer O. Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ_0, $0 < \lambda_0 < 1$ und dem Koeffizienten C_0 genügen soll[1]):

$$|\zeta_0(a, b)| \leqq C_0 \frac{1}{(1+R_0)^2},$$

$$(1) \qquad |\zeta_0(a, b) - \zeta_0(\bar{a}, \bar{b})| \leqq C_0 \left(\frac{1}{(1+R_0)^{2+\lambda_0}} + \frac{1}{(1+\bar{R}_0)^{2+\lambda_0}}\right) d_0^{\lambda_0}$$

$$(R_0^2 = a^2 + b^2, \quad \bar{R}_0^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2, \quad d_0^2 = (a-\bar{a})^2 + (b-\bar{b})^2).$$

Außerdem soll das Integral der Gesamtwirbelstärke

$$(2) \qquad \int_\infty \zeta_0 \, da \, db$$

unbedingt konvergent sein.

*) In der vorstehenden Abhandlung von Herrn Wolibner (vgl. S. 698) erhielt das Problem der zweidimensionalen Bewegung einer inkompressiblen reibungslosen Flüssigkeit *im großen* eine umfassende Lösung. Trotzdem hiermit das Problem als erledigt gelten kann, erschien angesichts der großen Wichtigkeit der Fragestellung die Veröffentlichung der eleganten, wenn auch spezielleren Ausführungen von Herrn E. Hölder, die den Gegenstand von einer anderen Seite beleuchten als geboten.

Die Schriftleitung.

[1]) Ungleichheiten von dieser Art sind (im dreidimensionalen Fall) zuerst von Herrn Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. III, Ber. d. Sächs. Akad. d. Wiss. 1926, S. 213–239, aufgestellt worden, um die zweiten Ableitungen Newtonscher Potentiale zu beherrschen, die von einer ins Unendliche ausgebreiteten Massenbelegung herrühren.

Dann gibt es nach einem Hauptsatz von Lichtenstein[2]) ein nur von λ_0, C_0 abhängiges Zeitintervall $\langle t_0,\ t_0+\delta_0\rangle$, $\delta_0 = \delta(\lambda_0, C_0) > 0$, mit folgender Eigenschaft: in $\langle t_0,\ t_0+\delta_0\rangle$ gibt es eine und nur eine der Anfangsbedingung

$$t = t_0: \qquad x = a, \quad y = b \tag{3}$$

genügende Lösung

$$x = x(t, a, b), \quad y = y(t, a, b) \tag{4}$$

des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = u(x,y,t), \quad u(x,y,t) = \frac{1}{\pi}\int_\infty \zeta' \frac{\partial}{\partial y} \log\frac{1}{r}\, dx'\, dy', \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta(x,y,t) = \zeta_0(a,b), \\ &\frac{dy}{dt} = v(x,y,t), \quad v(x,y,t) = -\frac{1}{\pi}\int_\infty \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \log\frac{1}{r}\, dx'\, dy', \\ &\qquad\qquad (r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2). \end{aligned} \tag{5}$$

Unser Ziel ist, die in diesem Satz festgestellte eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen (3), (5) für ein beliebiges Zeitintervall $\langle t_0,\ t_0+\Theta\rangle$, $\Theta > 0$, darzutun, was die unbeschränkte Fortsetzbarkeit der durch die Anfangsdaten (3) bestimmten ebenen Flüssigkeitsbewegung bedeuten wird.

Dies gelingt so: Sei $\langle t_0,\ t_1\rangle$ ein abgeschlossenes Teilintervall von $\langle t_0,\ t_0+\Theta\rangle$; in $\langle t_0,\ t_1\rangle$ liege eine bestimmte, zu den Anfangsbedingungen (3) gehörige Flüssigkeitsbewegung vor (d. h. zunächst nur eine Lösung der Gleichungen (5), (3)). Dann genügt, wie wir zeigen werden, die Wirbelgeschwindigkeit ζ in $\langle t_0,\ t_1\rangle$ den Ungleichheiten

$$\begin{aligned} &|\zeta(x,y,t)| \leqq C\frac{1}{(1+R)^2}, \\ &|\zeta(x,y,t) - \zeta(\bar{x},\bar{y},t)| \leqq C\left(\frac{1}{(1+R)^{2+\lambda}}\right) + \frac{1}{(1+\bar{R})^{2+\lambda}} d^\lambda, \\ &(R^2 = x^2+y^2, \quad \bar{R}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2, \quad d^2 = (x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2). \end{aligned} \tag{6}$$

---

[2]) L. Lichtenstein, a) Über einige Existenzsätze der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze. Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 89—154; S. 309—316; b) Zweite Abhandlung. Nichthomogene, unzusammendrückbare, reibungslose Flüssigkeiten. Math. Zeitschr. **26** (1926), S. 196—323. Für zweidimensionale Bewegungen finden sich die entsprechenden Formulierungen, bis auf die Voraussetzung (2), in L. Lichtenstein, c) Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929, S. 441 ff. Die Beweise beruhen auf Hilfssätzen für das logarithmische Potential, die fast gleichlautend sind wie die das Newtonsche Potential betreffenden Hilfssätze von L. Lichtenstein, loc. cit. [1]). Die dort entwickelten Ungleichheiten gelten meist auch im zweidimensionalen Fall, wenn man einige numerische Koeffizienten abändert; einzig die (28) und der auf (44) folgenden Formel entsprechenden Ungleichheiten erfordern zu ihrer Begründung eine Voraussetzung von der Art unserer Bedingung (2) für die Dichte. Es sei in diesem Zusammenhang auf die wichtigen Arbeiten von N. M. Günther über das hydrodynamische Randwertproblem im kleinen hingewiesen (vgl. insbesondere N. M. Günther, Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 448—499).

Dabei sind (das ist der springende Punkt) λ, C *generelle*, d. h. nur von Θ und λ_0, C_0, aber nicht von t_1 abhängige Konstanten.

Wenn wir dies bewiesen haben, folgt aus dem Lichtensteinschen Fundamentalsatz die Existenz der Lösung auch im Intervall $\langle t_0, t_1 + \delta \rangle$, $\delta = \delta(\lambda, C) > 0$, soweit es in $\langle t_0, t_0 + \Theta \rangle$ enthalten ist; nach endlich vielen Schritten der Länge δ haben wir die eindeutig bestimmte Lösung im ganzen Intervall $\langle t_0, t_0 + \Theta \rangle$[3]).

1. Herleitung einer Majorante für $\zeta(x, y)$ aus einer E. Schmidtschen Abschätzung. Ich stütze mich auf den Hilfssatz 2 von E. Schmidt[4]), der folgendes besagt: Es ist unabhängig von der Lage des Aufpunktes (x, y)

$$\int_T \frac{1}{r}\, dx'\, dy' \leqq 2\pi \left(\frac{|T|}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

bei einem beliebigen beschränkten Gebiet T mit dem (inneren) Flächeninhalt $|T|$.

Hat man nun eine beliebige (inhaltstreue, topologische) Abbildung aus der für das Parameterintervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ gegebenen Schar (4) von Deformationen, so fasse man die ganze x, y-Ebene als Summe derjenigen „Ring"-Gebiete $\overset{\nu}{T}$ auf, die sich bei der Abbildung aus den Kreisringgebieten

$$\overset{0}{K}\colon \quad R_0 \leqq l, \qquad \overset{\nu}{K}\colon \quad \nu l \leqq R_0 \leqq (\nu + 1) l, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

(l eine feste Zahl) ergeben. Da bei der Abbildung der Flächeninhalt erhalten bleibt und die Dichte ζ nach $(5)_3$ mitgenommen wird, ist

$$|\overset{0}{T}| = \pi l^2, \quad |\overset{\nu}{T}| = (2\nu + 1)\pi l^2, \tag{8}$$

und für die Dichte $\zeta(x, y)$ gilt

$$\text{in } \overset{0}{T}\colon \quad |\zeta| \leqq C_0, \quad \text{in } \overset{\nu}{T}\colon \quad |\zeta| \leqq C_0 \frac{1}{(1 + \nu l)^2}.$$

[3]) Es sei noch bemerkt, daß ich zu meinen schon über ein Jahr alten Versuchen, den Lichtensteinschen Existenzsatz für zweidimensionale Flüssigkeitsbewegungen auf beliebige Zeitintervalle auszudehnen, das Schlußstück des Beweises, nämlich die Verwendung des Kamkeschen Hilfssatzes, erst hinzugefügt habe, als ich von Herrn Lichtenstein erfahren hatte, daß Herr Wolibner dasselbe Ziel auf einem teilweise über die Theorie der konformen Abbildung gehenden Wege erreicht habe. (Vgl. die unmittelbar vorangehende Abhandlung von Herrn Wolibner.) Der ausdrückliche Hinweis auf die Problematik der Fortsetzbarkeit im Falle der dreidimensionalen Bewegung einer zähen Flüssigkeit findet sich bei C. W. Oseen, Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig 1927, S. 72f.

[4]) E. Schmidt, Bemerkungen zur Potentialtheorie, Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, S. 365—383, insbesondere S. 369.

Nach der Schmidtschen Formel (7) ist der Beitrag, den $\overset{\nu}{T}$ etwa zu $v(xy)$ liefert

$$(9)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\overset{\nu}{T}}\zeta'\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{r}\right)dx'dy'\right| \leqq \begin{cases} 2C_0 l, & \nu = 0,\\ 2C_0\frac{1}{(1+\nu l)^2}\sqrt{2\nu+1}\,l, & \nu = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Also

$$(10)\qquad |v(x,y)| \leqq 2C_0 l\left(1+\frac{1}{l^2}\sum_1^\infty{}^{\nu}\frac{\sqrt{2\nu+1}}{\nu^2}\right) \leqq 2C_0 l\left(1+\frac{\sqrt{3}}{l^2}\sum_1^\infty{}^{\nu}\frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}}\right);$$

analog für $|u(x,y)|$. Die Zahl l ist fest. Die Bestimmung desjenigen Wertes von l, für den die rechtsstehende Schranke von $|u|$, $|v|$ am kleinsten ausfällt, sowie die explizite Berechnung dieser Minimalschranke gibt

$$(11)\qquad |u|,\ |v| \leqq 2C_0\cdot 2\sqrt[4]{3}\sqrt{\sum_1^\infty{}^{\nu}\frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}}}$$

und weiter wegen

$$(12)\qquad \sum_1^\infty{}^{\nu}\frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}} < 1+\int_1^\infty\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = 3$$

die Ungleichheit

$$(13)\qquad |u|,\ |v| \leqq 4\cdot 3^{\frac{3}{4}}C_0 \leqq 10\,C_0.$$

Für die Verschiebung irgend eines Teilchens im Zeitintervall $\langle t_0, t_1\rangle$ ergeben sich daher aus $(5)_1$ die Ungleichheiten

$$(14)\qquad |x-a|,\ |y-b| \leqq 4\cdot 3^{\frac{3}{4}}C_0\Theta < 10\,C_0\Theta,$$

$$(15)\qquad D = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leqq \sqrt{2}\cdot 4\cdot 3^{\frac{3}{4}}C_0\Theta < 13\,C_0\Theta.$$

Weiter gibt die Dreiecksungleichheit $R \leqq R_0 + D$ noch

$$(16)\qquad \frac{1+R}{1+R_0} \leqq 1+\frac{D}{1+R_0} \leqq 1+D,$$

also[5])

$$(17)\qquad \frac{1+R}{1+R_0} \leqq 1+13\,C_0\Theta = R_*.$$

Daher ist

$$(18)\qquad \frac{1}{(1+R_0)^2} \leqq \frac{R_*^2}{(1+R)^2},\qquad \frac{1}{(1+R_0)^{2+\lambda_0}} \leqq \frac{R_*^{2+\lambda_0}}{(1+R)^{2+\lambda_0}}.$$

Schließlich folgt aus $(5)_3$, (1) in $\langle t_0, t_1\rangle$ die Majorantenbeziehung

$$(19)\qquad |\zeta(x,y,t)| \leqq \mathfrak{c}\frac{1}{(1+R)^2},\quad \mathfrak{c} = R_*^{2+\lambda_0}C_0,$$

$\mathfrak{c}$ eine generelle Konstante.

2. Abschätzung von $|u(x,y)-u(\bar{x},\bar{y})|$, $|v(x,y)-v(\bar{x},\bar{y})|$ auf Grund einer Dinischen Ungleichheit. Es sei K eine Kreisscheibe vom

---

5) Vgl. hierzu L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik, S. 419.

Radius P mit dem Ursprung als Mittelpunkt, K^0 eine konzentrische Kreisscheibe vom Radius $2P$. Wir setzen in K

$$
\begin{aligned}
v &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{K^0} \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \log\frac{1}{r}\, dx'\, dy' - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\infty - K^0} \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \log\frac{1}{r}\, dx'\, dy' \\
(20) \qquad &= -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{K^0} \zeta' \log\frac{1}{r}\, dx'\, dy' - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\infty - K^0} \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \log\frac{1}{r}\, dx'\, dy' = V + \Phi.
\end{aligned}
$$

Es seien jetzt (x, y) und $(\bar{x}, \bar{y})$ zwei Punkte in K, d ihr Abstand; wir beschreiben um (x, y) und $(\bar{x}, \bar{y})$ zwei Kreisscheiben τ und $\bar{\tau}$ vom Radius $\frac{1}{2}d$. Dann gilt nach Dini[6]), da stets $|\zeta| \leqq C_0 \leqq \mathfrak{c}$ ist,

$$
(21) \qquad \left| \frac{1}{\pi}\int\limits_{\tau} \zeta' \left(\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\log\frac{1}{\bar{r}}\right) dx'\, dy' \right| \leqq 6\,\mathfrak{c}\, d
$$

und dasselbe für $\bar{\tau}$; es ist dabei $\bar{r}^2 = (\bar{x} - x')^2 + (\bar{y} - y')^2$. Das Restgebiet $K^0 - \tau - \bar{\tau}$ gibt

$$
\begin{aligned}
(22) \qquad \left| \frac{1}{\pi}\int\limits_{K^0 - \tau - \bar{\tau}} \zeta' \left(\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\log\frac{1}{\bar{r}}\right) dx\, dy' \right| &\leqq 18\,\mathfrak{c}\, d \cdot (\log 4P - \log \tfrac{1}{2} d) \\
&= 18\,\mathfrak{c}\, d \cdot \log\frac{8P}{d}.
\end{aligned}
$$

Nun ist $6 < 9 \cdot \log 2$, $2 \cdot 6 < 9 \cdot \log 4 \leqq 9 \cdot \log \frac{8P}{d}$ wegen $d \leqq 2P$, daher wird insgesamt

$$
(23) \qquad |V(x, y) - V(\bar{x}, \bar{y})| \leqq 27\,\mathfrak{c}\, d \cdot \log\frac{8P}{d}.
$$

Zweitens ist in K

$$
(24) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\infty - K^0} \zeta' \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\frac{1}{r}\, dx'\, dy'.
$$

Für alle (x', y') in $\infty - K^0$ gilt

$$
r \geqq \tfrac{1}{2}R', \quad |\zeta'| \leqq \mathfrak{c}\frac{1}{R'^2}, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\frac{1}{r}\right| \leqq \frac{4}{R'^2}.
$$

Somit gilt

$$
(25) \qquad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \leqq 8\,\mathfrak{c}\int\limits_{2P}^{\infty} \frac{1}{R'^3}\, dR' = \mathfrak{c}\frac{1}{P^2}
$$

---

[6]) U. Dini, Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux derivées partielles du deuxième ordre, Acta math. 25 (1902), S. 195—196. — Es scheinen, nebenbei bemerkt, bei der (unter etwas anderen Voraussetzungen abgeleiteten) endgültigen Schranke in der vorletzten Zeile von S. 196 die Beiträge von τ' und τ'' (in Dinis Bezeichnung) nicht berücksichtigt zu sein. Demgemäß wäre der Zahlenkoeffizient 9 etwa durch 18 zu ersetzen.

und die gleiche Schranke für $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|$. Für alle (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$ in K ist darum

(26) $$|\Phi(x, y) - \Phi(\bar{x}, \bar{y})| \leqq \sqrt{2}\,\mathfrak{c}\,\frac{1}{P^2}\,d \leqq \sqrt{2}\,\mathfrak{c}\,\frac{1}{P^2}\,d \cdot \log \frac{8P}{d}.$$

In K gilt also die Ungleichheit

(27) $$|v(x, y) - v(\bar{x}, \bar{y})| \leqq \mathfrak{c}\left(27 + \sqrt{2}\,\frac{1}{P^2}\right) d \cdot \log \frac{8P}{d} \leqq 28\,\mathfrak{c}\,d \cdot \log \frac{8P}{d},$$

sowie $P \geqq 2$ ist. Dieselbe Ungleichheit gilt für $|u(x, y) - u(\bar{x}, \bar{y})|$.

3. H-Stetigkeit der Deformation auf Grund eines Kamkeschen Hilfssatzes. Ein Teilchen, das sich zur Zeit t, $t_0 \leqq t \leqq t_1 \leqq t_0 + \Theta$, an der Stelle (x, y) in der Entfernung R vom Ursprung befindet, war wegen (15) während des ganzen Zeitintervalls $t_0 \leqq \mathfrak{t} \leqq t$ an Stellen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit

(28) $$\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} = \mathfrak{R} \leqq R + 13\,C_0\,\Theta \leqq R\left(1 + \frac{1}{R_*} \cdot 13\,C_0\,\Theta\right) \leqq 2R = P,$$

wofern

(29) $$R \geqq R_* = 1 + 13\,C_0\,\Theta$$

ist. Ist umgekehrt

(30) $$R \leqq R_*,$$

so war während des ganzen Zeitintervalls $t_0 \leqq \mathfrak{t} \leqq t$

(31) $$\mathfrak{R} \leqq R_* + 13\,C_0\,\Theta \leqq 2R_* = P_*.$$

Um, zunächst bei (29), aus der Lage der Teilchen zur Zeit t genauere Rückschlüsse auf ihre Lage zur Zeit t_0 zu machen, betrachte ich das Zeitintervall $t_0 \leqq \mathfrak{t} \leqq t$ und die Punktepaare $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}})$ in K. Wegen

(32) $$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}| + |\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{y}}|\right) \leqq \mathfrak{d} \leqq |\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}| + |\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{y}}|$$

für $\mathfrak{d} = \sqrt{(\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}})^2 + (\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{y}})^2}$ folgt aus (27)

(33) $$|u(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{t}) - u(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}, \mathfrak{t})| + |v(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{t}) - v(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}, \mathfrak{t})| \leqq \omega\left(|\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}| + |\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{y}}|\right),$$

wo

(34) $$\omega(\mathfrak{z}) = \gamma\,\mathfrak{z}\left|\log \sqrt{2}\,\frac{16\,R}{\mathfrak{z}}\right|, \quad \gamma = 56\,\mathfrak{c},$$

stetig und $\geqq 0$ in dem Intervall[7]) $0 \leqq \mathfrak{z} < +\infty$ ist. Ferner sei $\mathfrak{x}(\mathfrak{t})$, $\mathfrak{y}(\mathfrak{t})$ für $t_0 \leqq \mathfrak{t} \leqq t$ die in K verlaufende Lösungskurve des Differentialsystems

(35) $$\frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{t}} = u(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{t}), \quad \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{t}} = v(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{t})$$

---

[7]) Wir haben nicht nötig, $\omega(\mathfrak{z})$ auch für negative Werte von $\mathfrak{z}$ durch $\omega(\mathfrak{z}) = \omega(|\mathfrak{z}|)$ zu definieren; unwesentlich ist auch, daß wir $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}})$ auf eine Kreisscheibe und nicht auf ein Quadrat beschränken.

durch den Weltpunkt t, x, y, und es sei $\bar{\mathfrak{x}}(\mathfrak{t}), \bar{\mathfrak{y}}(\mathfrak{t})$ eine zweite für $t_0 \leqq \mathfrak{t} \leqq t$ in K verlaufende Lösungskurve des Systems (35) durch den Weltpunkt $t, \bar{x}, \bar{y}$. Dann folgt aus dem Kamkeschen Hilfssatz[8]):

$$|\mathfrak{x}(\mathfrak{t}) - \bar{\mathfrak{x}}(\mathfrak{t})| + |\mathfrak{y}(\mathfrak{t}) - \bar{\mathfrak{y}}(\mathfrak{t})| \leqq \psi(2t - \mathfrak{t}). \tag{36}$$

Dabei ist $\mathfrak{z} = \psi(\mathfrak{t})$ für $t \leqq \mathfrak{t} \leqq 2t - t_0$ die durch den Punkt t, $z = |x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|$ gehende maximale Integralkurve der Differentialgleichung

$$\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{t}} = \omega(\mathfrak{z}), \tag{37}$$

die also in (36) an der Geraden $\mathfrak{t} = t$ gespiegelt erscheint.

In unserem Fall, wo $\omega(\mathfrak{z})$ die Gestalt (34) hat, kann $\psi(\mathfrak{t})$ in $t \leqq \mathfrak{t} \leqq 2t - t_0$ und damit $\psi(2t - \mathfrak{t})$ in $t_0 \leqq \mathfrak{t} \leqq t$ nach oben abgeschätzt werden. Unter Einführung der neuen unbekannten Funktion

$$\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{2}\,16R} \tag{38}$$

ist nämlich (37) gleichwertig mit der in $t \leqq \mathfrak{t} \leqq 2t - t_0$ geltenden Differentialgleichung

$$\frac{d\mathfrak{s}}{d\mathfrak{t}} = \gamma\,\mathfrak{s}\,|\log \mathfrak{s}| \tag{39}$$

mit der Anfangsbedingung $\mathfrak{t} = t$, $\mathfrak{s} = s = \frac{z}{\sqrt{2}\,16R}$, wo $0 < s < \frac{1}{8}$ gilt, falls die Punkte (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$ voneinander verschieden und in der zu K konzentrischen Kreisscheibe vom Radius $\frac{1}{2}P = R$ gelegen sind. Aus (39) folgt, daß mit wachsendem $\mathfrak{t}$ auch $\mathfrak{s}$ vom Werte s an monoton wächst, aber da bei $0 < \varepsilon < 1 - s$ das Integral $\int\limits_s^{1-\varepsilon} \frac{d\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}\log\frac{1}{\mathfrak{s}}}$ für $\varepsilon \downarrow 0$ divergiert, bleibt für $\mathfrak{t} \geqq t$ dauernd $\mathfrak{s} < 1$, es ist also $0 < s \leqq \mathfrak{s} < 1$, d. h. $1 < \frac{1}{\mathfrak{s}} \leqq \frac{1}{s} < +\infty$. Statt (39) kann also für alle $\mathfrak{t} \geqq t$

$$\frac{d\mathfrak{s}}{d\mathfrak{t}} = \gamma\,\mathfrak{s}\log\frac{1}{\mathfrak{s}} \tag{40}$$

[8]) E. Kamke, Über die eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgleichungen, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 103 ff. Daraus ergibt sich die Formulierung des Textes, wenn man für die loc. cit. benutzte unabhängige Variable $\hat{\mathfrak{t}} = 2t - \mathfrak{t}$, $t \leqq \hat{\mathfrak{t}} \leqq 2t - t_0$, nimmt und die aus (35) auf $\hat{\mathfrak{t}}$ umgerechneten Differentialgleichungen betrachtet; ihre rechten Seiten besitzen dieselbe (von $\mathfrak{t}$ bzw. $\hat{\mathfrak{t}}$ unabhängige, im Sinne von (33) geltende Schranke $\omega(\mathfrak{z})$ wie (35). In (37) haben wir statt $\hat{\mathfrak{t}}$ wieder $\mathfrak{t}$ geschrieben.

geschrieben werden oder $\left(\text{unter Einführung der Integrationsvariablen } \sigma = \frac{1}{\mathfrak{s}}\right)$

$$(41) \qquad \gamma(\mathfrak{t}-t) = \int_{s}^{\mathfrak{s}} \frac{d\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}\log\frac{1}{\mathfrak{s}}} = \int_{\frac{1}{\mathfrak{s}}}^{\frac{1}{s}} \frac{d\sigma}{\sigma\log\sigma} = \log\log\frac{1}{s} - \log\log\frac{1}{\mathfrak{s}}.$$

Weiter bekommen wir

$$(42) \qquad \log\frac{1}{\mathfrak{s}} = e^{-\gamma(\mathfrak{t}-t)}\log\frac{1}{s}$$

und für $t \leqq \mathfrak{t} \leqq 2t - t_0 \leqq t + \Theta$

$$(43) \qquad \mathfrak{s} = s^{e^{-\gamma(\mathfrak{t}-t)}} \leqq s^{\nu},$$

wo

$$(44) \qquad \nu = e^{-\gamma\Theta} = e^{-56(1+13C_0\Theta)^2+40C_0\Theta}, \qquad 0 < \nu < 1,$$

ein genereller Exponent ist.

Die Funktion $\mathfrak{z} = \psi(\mathfrak{t})$ besitzt im Intervall $t \leqq \mathfrak{t} \leqq 2t - t_0$ nebenbei bemerkt den Ausdruck

$$(45) \qquad \psi(\mathfrak{t}) = (\sqrt{2}\,16R)^{1-e^{-\gamma(\mathfrak{t}-t)}}\, z^{e^{-\gamma(\mathfrak{t}-t)}};$$

ebenso ist für $t_0 \leqq \mathfrak{t} \leqq t$

$$(46) \qquad \psi(2t-\mathfrak{t}) = (\sqrt{2}\,16R)^{1-e^{-\gamma(t-\mathfrak{t})}}\, z^{e^{-\gamma(t-\mathfrak{t})}}.$$

Für uns ist aber vor allem die aus (43) folgende Abschätzung

$$(47) \qquad \psi(2t-\mathfrak{t}) \leqq (\sqrt{2}\,16R)^{1-\nu} z^{\nu} \quad \text{in } t_0 \leqq \mathfrak{t} \leqq t$$

wichtig. Nun setze ich speziell $\mathfrak{t} = t_0$ und wende auf diesen Zeitpunkt die Kamkesche Ungleichheit (36) unter Berücksichtigung der Bedeutung von z an:

$$(48) \qquad |a-\bar{a}| + |b-\bar{b}| \leqq (\sqrt{2}\,16R)^{1-\nu}(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|)^{\nu}.$$

Wegen (32) und der analogen Beziehung im Bezugsraum kommt schließlich

$$(49) \qquad d_0 \leqq \sqrt{2}\,(16R)^{1-\nu} d^{\nu}.$$

Hierbei besitzt der Exponent $0 < \nu < 1$ den generellen, d. h. von t_1 unabhängigen Wert (44), außerdem war $\bar{R} \leqq R$, $R \geqq R_*$. Diese Verzerrungsformel (49), die beiläufig in symmetrischer Form für beliebige R, $\bar{R}$ auch

$$(50) \qquad d_0 \leqq 23\,(R_*^{1-\nu} + R^{1-\nu} + \bar{R}^{1-\nu})\, d^{\nu}$$

geschrieben werden kann, ist das Kernstück unseres Beweises.

4. Ableitung genereller Konstanten für die Voraussetzungen des Lichtensteinschen Existenzsatzes. Wir unterscheiden jetzt wieder wie zu Beginn von **3.** die beiden Fälle $R \geqq R_*$ und $R \leqq R_*$.

1. Sei

$$R \geqq R_* \text{ und } \bar{R} \leqq R, \quad d \leqq \tfrac{1}{2} R. \tag{51}$$

Dann sind sicher die Voraussetzungen der Verzerrungsformel (49) erfüllt und sie liefert aus $(5)_3$, $(1)_2$, $(18)_2$, $(19)_2$

$$\begin{aligned} |\zeta(x, y, t) - \zeta(\bar{x}, \bar{y}, t| &= |\zeta_0(a, b) - \zeta_0(\bar{a}, \bar{b})| \\ &\leqq \mathfrak{c}\left(\frac{1}{(1+R)^{2+\lambda_0}} + \frac{1}{(1+\bar{R})^{2+\lambda_0}}\right) d_0^{\lambda_0} \\ &\leqq \mathfrak{c}(1 + 2^{2+\lambda_0}) \frac{1}{R^{2+\lambda_0}} \sqrt{2}^{\lambda_0} (16 R)^{\lambda_0 - \lambda} d^\lambda \leqq 2^{\frac{9}{2}} \cdot 3^2 \mathfrak{c} \frac{1}{R^{2+\lambda}} d^\lambda, \end{aligned} \tag{52}$$

wo

$$\lambda = \lambda_0 \nu = \lambda_0 e^{-56(1+13 C_0 \Theta)^{2+\lambda_0} C_0 \Theta}, \quad 0 < \lambda < \lambda_0 < 1 \tag{53}$$

ist. Also

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq 204\, \mathfrak{c} \frac{1}{R^{2+\lambda}} d^\lambda. \tag{54}$$

2. Sei

$$R \leqq R_* \quad \text{und} \quad \bar{R} \leqq R_*. \tag{55}$$

Denn kann ich wegen (31) die Verzerrungsformel (49) mit R_* statt R auf $(1)_2$ anwenden; so kommt

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq 2 C_0 \cdot \sqrt{2}^{\lambda_0} (16 R_*)^{\lambda_0 - \lambda} d^\lambda \leqq 46 R_*^{\lambda_0 - \lambda} C_0 d^\lambda. \tag{56}$$

In diesem Fall ist, falls $R > 0$ ist, auch

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq 46 R_*^{\lambda_0 - \lambda} R_*^{2+\lambda} C_0 \frac{1}{R^{2+\lambda}} d^\lambda \leqq 46\, \mathfrak{c} \frac{1}{R^{2+\lambda}} d^\lambda. \tag{57}$$

(54) gilt also für beliebiges $R > 0$ und $\bar{R} \leqq R$, $d \leqq \frac{1}{2} R$. Daraus und aus (19) folgt aber bekanntlich[9]) die Gültigkeit von (54) für alle $\bar{R} \geqq R > 0$.

Nun kann auch eine Abschätzung der Form (56) überall sichergestellt werden[10]). Nehmen wir zunächst speziell

$$R = R_* \quad \text{und} \quad \bar{R} \geqq R = R_*. \tag{58}$$

---

[9]) Vgl. hierzu L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. III, loc. cit. [1]), die beiden Abschätzungen vor (2*), da $2^{1+\lambda} \mathfrak{c} < 204\, \mathfrak{c}$ ist. Für $\bar{R} \geqq R > 0$ und $d \leqq \frac{1}{2} R$ gilt (54) nach dem bisherigen sicher; ist aber $d \geqq \frac{1}{2} R$, so ist

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq |\zeta| + |\bar{\zeta}| \leqq 2\mathfrak{c} \frac{1}{R^2} \leqq 2^{1+\lambda} \mathfrak{c} \frac{1}{R^2+\lambda} d^\lambda.$$

[10]) loc. cit. [1]), S. 229 f.

Dann ist wegen (54)

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq 204\, c \frac{1}{R_*^{2+\lambda}} d^\lambda; \tag{59}$$

dies gilt auch für $\bar{R} \leqq R = R_*$, wegen (57), also für $R = R_*$ und alle $\bar{R}$.

Zweitens ist für $R < R_*$, $\bar{R} \geqq R_*$, wenn (x_*, y_*) der Punkt mit $\sqrt{x_*^2 + y_*^2} = R_*$ auf der Strecke (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$ ist, d_* die Entfernung von (x_*, y_*), (x, y) und $\bar{d}_*$ die von (x_*, y_*), $(\bar{x}, \bar{y})$ bezeichnet,

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq 204\, c \frac{1}{R_*^{2+\lambda}} (d_* + \bar{d}_*^\lambda) \leqq 204\, c \frac{1}{R_*^{2+\lambda}} 2^{1-\lambda} d^\lambda, \tag{60}$$

also

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq 204 \cdot 2^{1-\lambda} R_*^{\lambda_0 - \lambda} C_0 d^\lambda. \tag{61}$$

Wegen (56) gilt (61) für $R < R_*$ und alle $\bar{R}$; natürlich auch für $\bar{R} < R_*$ und alle R.

Endlich sei etwa $\bar{R} \geqq R$ und $R \geqq R_*$, $\bar{R} \geqq R_*$. Auch dann gilt wegen (54) die Ungleichheit (61), die somit für alle $R, \bar{R}$ besteht und die gewünschte Form hat.

Nun knüpfen wir wieder an (54) an und folgern[11]) daraus die in (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$ symmetrische Ungleichheit

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq 204\, c \left(\frac{1}{R^{2+\lambda}} + \frac{1}{\bar{R}^{2+\lambda}}\right) d^\lambda \quad \text{für alle } R,\ \bar{R} > 0, \tag{62}$$

also

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq 204 \cdot 2^{2+\lambda} c \left(\frac{1}{(1+R)^{2+\lambda}} + \frac{1}{(1+\bar{R})^{2+\lambda}}\right) d^\lambda \tag{63}$$

für $R \geqq 1$, $\bar{R} \geqq 1$, wegen $1 + R \leqq 2R$, $1 + \bar{R} \leqq 2\bar{R}$. Ist aber etwa $R \leqq 1$, d. h. $1 + R \leqq 2$, so gibt (61)

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq 204 \cdot 2^3 R_*^{\lambda_0 - \lambda} C_0 \left(\frac{1}{(1+R)^{2+\lambda}} + \frac{1}{(1+\bar{R})^{2+\lambda}}\right) d^\lambda; \tag{64}$$

diese Schranke gilt auch für $\bar{R} \leqq 1$. Alles in allem folgt aus (63), (64) für alle R, $\bar{R}$

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq C \left(\frac{1}{(1+R)^{2+\lambda}} + \frac{1}{(1+\bar{R})^{2+\lambda}}\right) d^\lambda, \tag{65}$$

$$C = 1632\, c = 1632\, (1 + 13\, C_0 \Theta)^{2+\lambda_0} C_0.$$

Nach (19) gilt ferner

$$|\zeta| \leqq C \frac{1}{(1+R)^2}. \tag{66}$$

Das sind die beim fundamentalen Existenz- und Unitätssatz vorausgesetzten Ungleichheiten, und zwar mit generellen (nur von λ_0, C_0, Θ und

---

11) loc. cit. 1), S. 230 f.

nicht von t_1 abhängigen) Werten der Konstanten λ, C. Damit ist nach dem, was in der Einleitung gesagt worden ist, die eindeutige Fortsetzbarkeit der „Flüssigkeitsbewegung" im ganzen Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \Theta$ bewiesen.

5. Verhalten des Druckes. Die im vorangehenden rein kinematisch betrachtete Lösung von (5), (3) auch dynamisch als Flüssigkeitsbewegung sicherzustellen, ist noch zu untersuchen, ob dauernd in der ganzen Flüssigkeit Druck ($p > 0$) herrscht (unter einer geeigneten Annahme über den Wert p_∞ des Druckes im Unendlichen). Der Druck ist durch die äußere (pro Masseneinheit verstandene) Kraft X, Y bedingt, die sich, damit der Wirbelsatz in der Form $(5)_3$ gilt, aus einer Kräftefunktion $U(x, y, t)$ ableiten soll: $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$.

Den Ergebnissen von Herrn Lichtenstein[12]) zufolge gilt zunächst $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} = O(R^{-2})$, und es existiert ein Beschleunigungspotential $Q(x, y, t)$ mit stetigen Ableitungen erster Ordnung, die sich im Unendlichen ebenfalls wie $O(R^{-2})$ verhalten, während Q selbst dort einen vorgebbaren Wert Q_∞ annimmt. Die dann geltenden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{67}$$

bringen wir auf die Webersche Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 v \zeta = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + 2 u \zeta = -\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{68}$$

wo die „Energiefunktion"

$$H = H(x, y, t) = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2) - Q \tag{69}$$

dieselben Eigenschaften wie Q besitzt ($H_\infty = -Q_\infty$).

Nun ersetze ich loc. cit. [2]), b) S. 212 ff den Druck p durch unser H und erhalte die Beziehung

$$H - H_\infty = \frac{1}{\pi} \int_\infty \zeta' \left(u' \frac{\partial}{\partial y} - v' \frac{\partial}{\partial x}\right) \log \frac{1}{r} \cdot d x' \, d y', \tag{70}$$

die als eine Verallgemeinerung der für eine Potentialströmung geltenden Bernoullischen Gleichung aufgefaßt werden kann[13]).

---

[12]) loc. cit. [3]), a) S. 112 f.

[13]) Diese Formel steht bei Oseen, loc. cit. [3]), S. 85, explizit für eine kräftefreie Flüssigkeitsbewegung, sie gilt aber ohne weiteres auch im Falle der Bewegung im Feld einer Kräftefunktion, wenn man Oseens Größe $\frac{q}{\varrho} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\varrho}$ durch den vollständigen Ausdruck $(72)_2$ der Energiefunktion ersetzt.

Wegen (13) gestattet der Mittelwertsatz, das Integral für $H - H_\infty$ in (70) nochmals nach demselben Prinzip wie (13) abzuschätzen; man erhält die nur vom Anfangszustand abhängige Schranke

$$|H - H_\infty| \leqq 10\,C_0 \cdot 20\,C_0 = 200\,C_0^2. \tag{71}$$

Ist ϱ die Dichte der homogenen inkompressiblen Flüssigkeit (eine feste Zahl), so gilt schließlich für den Druck p, vgl. (67),

$$Q = U - \frac{p}{\varrho} \quad \text{oder} \quad H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \left(U - \frac{p}{\varrho}\right). \tag{72}$$

Nehmen wir an, es existiere der Grenzwert $U_\infty = U_\infty(t)$ und es bestehe für alle Zeiten überall die Ungleichheit

$$|U - U_\infty| \leqq K \quad (K \text{ räumlich und zeitlich konstant}), \tag{73}$$

so ist durch (72) der Druck so bestimmt, daß auch p_∞ existiert und $H_\infty = -\left(U_\infty - \frac{p_\infty}{\varrho}\right)$ ist. Offenbar kann man auch p_∞ vorgegeben denken und aus der letzten Relation H_∞ bestimmen.

Das durch (70) gegebene Integral stellt jetzt den Ausdruck

$$H - H_\infty = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \left(U - U_\infty - \frac{p - p_\infty}{\varrho}\right) \tag{74}$$

dar, und es folgt aus (71) die Abschätzung

$$\left|\frac{p - p_\infty}{\varrho}\right| \leqq |H - H_\infty| + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + |U - U_\infty| \leqq 300\,C_0^2 + K. \tag{75}$$

Wählt man definitiv die Größe p_∞ zeitlich konstant und

$$\frac{p_\infty}{\varrho} > 300\,C_0^2 + K, \tag{76}$$

so herrscht wegen (75) in der ganzen Flüssigkeit zu allen Zeiten wirklich Druck $(p > 0)$.

(Eingegangen am 1. Januar 1933.)