Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen.

Von

Erich Strohhäcker in Eislingen.

Einleitung.

In der Theorie der schlichten Funktionen sind besonders zwei Funktionsklassen genauer untersucht worden, in denen die Funktionen

(1) $$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

zusammengefaßt sind, die $|z| < 1$ schlicht-regulär

a) auf Sterngebiete mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt (Klasse $\mathfrak{St}$),

b) auf konvexe Gebiete (Klasse $\mathfrak{K}$)

abbilden. Über die Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}$ bewies Herr Löwner die beiden Ungleichungen[1]):

$$\text{I)} \quad \frac{r}{1+r} \leqq |f(z)| \leqq \frac{r}{1-r} \qquad \text{mit } |z| = r < 1,$$

$$\text{II)} \quad \frac{1}{(1+r)^2} \leqq |f'(z)| \leqq \frac{1}{(1-r)^2} \qquad \text{mit } |z| \leqq r < 1,$$

zu denen Herr Bieberbach[2]) als dritte hinzufügte:

$$\text{III)} \quad |\operatorname{arc} f'(z)| \leqq 2 \arcsin r \qquad \text{mit } |z| \leqq r < 1.$$

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist in einem ersten Teil eine Verschärfung dieser drei Ungleichungen in dem Sinne, daß nun nach Schrankensätzen der drei Funktionen

$$\frac{f(z)}{z} = 1 + \ldots; \quad z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + \ldots; \quad f'(z) = 1 + \ldots$$

unter der Voraussetzung gefragt wird, daß $f(z)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{K}$ ist. Durch eine wiederholte Anwendung des Schwarzschen Lemmas ge-

---

[1]) K. Löwner, Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden, Ber. über d. Verh. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. **69** (1917), S. 89–106.

[2]) L. Bieberbach, Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte, konforme Abbildungen, Math. Zeitschr. 4 (1919), S. 295–305.

langte ich zu dem Satze, daß dann die Realteile von $\frac{f(z)}{z}$ und $z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ in $|z| < 1$ größer als $\frac{1}{2}$ sind[3]).

Aus diesem Satze folgen die Sätze von Löwner und Bieberbach mit Leichtigkeit. Während jedoch aus I) nur geschlossen werden kann, daß für $|z| < r < 1$ $\frac{f(z)}{z}$ im Innern eines konzentrischen Kreisringes liegen muß, dessen Halbmesser $\frac{1}{1+r}$ und $\frac{1}{1-r}$ sind, folgt nun, daß $\frac{f(z)}{z}$ sogar im Innern eines Kreises liegt, der die Randkreise dieses Ringes berührt. Hieraus ergibt sich auch die folgende, scharfe Abschätzung:

$$\text{IV)} \quad \left|\operatorname{arc}\frac{f(z)}{z}\right| \leqq \arcsin r \qquad \text{mit } |z| \leqq r < 1,$$

gültig für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}$.

Über die Ableitungen der Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}$ gelangte ich zu dem folgenden Ergebnis:

Für $|z| < r \leqq 1$ liegt $f'(z)$ in dem schlichten Gebiet, das aus $|z| < r$ durch die Abbildung $s = \frac{1}{(1-z)^2}$ entsteht.

Dieser Satz ist eine Verschärfung der Ungleichungen II) und III) und enthält eine Folgerung für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{St}$, da $f(z)$ dann und nur dann zur Klasse $\mathfrak{K}$ gehört, falls $F(z) = z \cdot f'(z)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{St}$ ist.

Als Anwendungen dieser Sätze werden noch die ungeraden Funktionen der Klassen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{St}$ untersucht. Hier ergeben sich Verschärfungen von Sätzen von J. Privalov[4]).

In einem zweiten Teile befaßte ich mich mit Verschärfungen eines Satzes von Szegö[5]). Man betrachtet das Bildgebiet G, das von $|z| < 1$ durch die in $|z| < 1$ schlichte und reguläre Funktion (1) vermittelt wird. Herr Szegö fand, daß von zwei Randpunkten von G, die auf derselben Nullgeraden, aber auf verschiedenen Seiten von 0 liegen, mindestens einer von 0 um mindestens $\frac{1}{2}$ entfernt ist. Das eine Ergebnis dieses Teils ist, daß die Konstante $\frac{1}{2}$ durch $\pi/4$ ersetzt werden kann, wenn der Satz für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}$ ausgesprochen wird.

Endlich enthält dieser Teil eine Verallgemeinerung für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{St}$ in der Richtung, daß statt einer Nullgeraden n gleich-

[3]) Wie ich nachträglich erfuhr, ist dieser Satz und Satz V auch in einer kürzlich erschienenen Arbeit von A. Marx enthalten. A. Marx, Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Annalen 107 (1932), S. 40—67. Die Beweise sind aber dort andere als hier.

[4]) J. Privalov, Sur les fonctions qui donnent la représentation conforme biunivoque, Recueil Math. d. l. Soc. Math. d. Moscou 31 (1924), S. 350—365.

[5]) G. Szegö, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 31 (1922), S. 42. und 32 (1923), S. 45.

winklig verteilte Nullstrahlen gelegt werden, und schließlich einen Satz über schlichte Funktionen, der besagt, daß im Bildgebiet G eine Strecke Platz findet, deren einer Endpunkt der Nullpunkt ist, und deren Länge 0,73 übertrifft.

I. Teil.

Über Verschärfungen des Verzerrungs- und Drehungssatzes der Klassen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{St}$.

§ 1.

Der Realteil von $\frac{f(z)}{z}$ und $z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}$.

Hilfssatz 1. Die Funktion $w = g(z)$ sei in $|z| < 1$ regulär, es sei $g(0) = 1$ und $\Re g(z) \geqq 0$ in $|z| < 1$. Ist dann $|z_0| \leqq r < 1$, so liegt $g(z_0)$ sogar auf der abgeschlossenen Kreisscheibe der w-Ebene, deren Durchmesser die Strecke $\frac{1-r}{1+r} \ldots \frac{1+r}{1-r}$ der reellen Achse ist.

Beweis. Wir bilden die Funktion

$$w_1 = g_1(z) = \frac{g(z) - 1}{g(z) + 1},$$

deren absoluter Betrag in $|z| < 1$

$$|g_1(z)| \leqq 1$$

ist. Da $g_1(0) = 0$ ist, erfüllt $g_1(z)$ die Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas. Nach diesem liegt $g_1(z_0)$ sogar in $|w_1| \leqq r$. Durch die Funktion

$$w = \frac{1 + w_1}{1 - w_1}; \quad \left(w_1 = \frac{w-1}{w+1}\right)$$

wird $|w_1| \leqq r$ schlicht auf die in dem Hilfssatz genannte Kreisscheibe abgebildet. Gehen wir mit dieser Funktion zurück in die w-Ebene, so ergibt sich der Satz.

Hilfssatz 2. Die Funktion $w = f(z) = z + \ldots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{K}$. Dann gehört auch die Funktion

$$w = h(z) = \frac{f(z_0) - f\left(\frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}\right)}{f'(z_0) \cdot (1 - |z_0|^2)} \tag{2}$$

zur Klasse $\mathfrak{K}$. Dabei ist z_0 ein beliebiger, fester Punkt von $|z| < 1$.

Beweis. Die lineare Funktion

$$\mathfrak{z} = \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}$$

führt $|z| < 1$ so in $|\mathfrak{z}| < 1$ über, daß $z = z_0$ in $\mathfrak{z} = 0$ übergeht. $z = 0$ geht dabei über in $\mathfrak{z} = z_0$. Die Funktion

$$w_1 = f(\mathfrak{z}) = f\left(\frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}\right)$$

bildet $|z| < 1$ auf dasselbe Bildgebiet G ab, das aus $|z| < 1$ durch die Abbildung $w = f(z)$ entsteht. Dabei geht nun $z = 0$ über in $w_1 = f(z_0)$. Für die Funktion $w = h(z)$ ist also $h(0) = 0$. Ihre Ableitung ist

$$(3) \qquad h'(z) = \frac{f'\left(\frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}\right)}{f'(z_0) \cdot (1 - \bar{z}_0 z)^2}.$$

Es ist also $h'(0) = 1$. Endlich geht das Bildgebiet von $|z| < 1$, das durch die Abbildung $w = h(z)$ entsteht, aus G durch eine Translation und Drehstreckung hervor, ist also mit G schlicht und konvex. Folglich gehört $h(z)$ zur Klasse $\mathfrak{K}$.

Hilfssatz 3. Die Funktion $w = f(z) = z + \ldots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{K}$. Dann ist in $|z| < 1$

$$\Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq 0.$$

Beweis. Nach einem Satze von Study[6]) ist in $|z| < 1$

$$(4) \qquad \Re\left(z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right) \geqq 0.$$

Die Bildkurve C, die aus $|z| = r < 1$ durch die Abbildung $w = f(z)$ entsteht, hat nach diesem Satze die Eigenschaft, daß ihre Tangente sich dauernd im gleichen Sinne dreht. Das Innere von C ist also konvex, in bezug auf den Nullpunkt sternförmig. Darum ist notwendig auf $|z| = r > 0$ $\operatorname{arc} f(z)$ eine monoton wachsende Funktion von $\varphi = \operatorname{arc} z$ $(0 \leqq \varphi < 2\pi,\ 0 \leqq \operatorname{arc} f(r) < 2\pi,\ \operatorname{arc} f(r) \leqq \operatorname{arc} f(z) < \operatorname{arc} f(r) + 2\pi.)$ Da diese Funktion differenzierbar ist, ist also

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{arc} f(z) \geqq 0,$$

oder

$$\frac{\partial \operatorname{arc} f(z)}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \Im(\log f(z)) = \Im\left(\frac{\partial \log f(z)}{\partial \varphi}\right)$$
$$= \Im\left(\frac{f'(z)}{f(z)} \cdot i z\right) = \Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq 0,$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 4. Es sei für alle Funktionen $w = f(z) = z + \ldots$ der Klasse $\mathfrak{K}$ bewiesen:

$$\Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq a \text{ in } |z| < 1, \ (0 \leqq a \leqq \tfrac{1}{2}).$$

Dann ist in $|z| < 1$ für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}$ sogar

$$1)\ \Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) \geqq \frac{1}{4 \cdot (1 - a)} \geqq a, \qquad 2)\ \Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq \frac{1}{4 \cdot (1 - a)}.$$

[6]) E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Heft II, 1913, § 13. Ein hübscher und kurzer Beweis dieses Satzes findet sich bei T. Radò, Bemerkungen über die konformen Abbildungen konvexer Gebiete. Math. Annalen 102 (1929), S. 428—429.

Beweis. 1. $f(z)$ sei eine beliebige Funktion der Klasse $\mathfrak{K}$, z_0 ein beliebiger, aber fester Punkt von $|z| < 1$, es sei $|z_0| = r < 1$. Neben $f(z)$ betrachten wir die Funktion $h(z)$ von (2). Für $z = z_0$ erhalten wir aus (2) und (3)

$$h(z_0) = \frac{f(z_0)}{f'(z_0)\cdot(1-|z_0|^2)}, \tag{5}$$

$$h'(z_0) = \frac{1}{f'(z_0)\cdot(1-|z_0|^2)^2}. \tag{6}$$

Da $h(z)$ nach Hilfssatz 2 eine Funktion der Klasse $\mathfrak{K}$ ist, ist nach Voraussetzung in $|z| < 1$

$$\Re\left(z\cdot\frac{h'(z)}{h(z)}\right) \geqq a. \tag{7}$$

Folglich erfüllt die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{1-a}\cdot\left(z\cdot\frac{h'(z)}{h(z)} - a\right)$$

die Voraussetzungen von Hilfssatz 1, da $g(0) = 1$ und $\Re g(z) \geqq 0$ in $|z| < 1$ ist. Nach diesem Satze liegt $g(z_0)$ sogar auf der Kreisscheibe, die über der Strecke

$$\frac{1-r}{1+r}\cdots\frac{1+r}{1-r}$$

der reellen Achse als Durchmesser steht. Daher liegt $z_0\cdot\frac{h'(z_0)}{h(z_0)}$ auf der Kreisscheibe, deren Durchmesser die Strecke

$$(1-a)\frac{1-r}{1+r} + a \ldots (1-a)\frac{1+r}{1-r} + a$$

der reellen Achse ist. Daraus folgt

$$\Re\left(\frac{1}{z_0\cdot\frac{h'(z_0)}{h(z_0)}}\right) \geqq \frac{1}{(1-a)\frac{1+r}{1-r}+a}. \tag{8}$$

Nun ergibt sich aber aus (5) und (6)

$$\frac{f(z_0)}{z_0} = \frac{1}{1-|z_0|^2}\cdot\frac{1}{z_0\cdot\frac{h'(z_0)}{h(z_0)}} \tag{9}$$

und also aus (8) und (9)

$$\Re\left(\frac{f(z_0)}{z_0}\right) = \frac{1}{1-r^2}\Re\left(\frac{1}{z_0\cdot\frac{h'(z_0)}{h(z_0)}}\right)$$

$$\geqq \frac{1}{1-r^2}\cdot\frac{1}{(1-a)\frac{1+r}{1-r}+a} = \frac{1}{(1-a)(1+r)^2 + a\cdot(1-r^2)},$$

$$\Re\left(\frac{f(z_0)}{z_0}\right) \geqq \frac{1}{1+r\cdot(2-2a)+r^2\cdot(1-2a)}. \tag{10}$$

Setzen wir

$$F(r) = 1 + r\cdot(2-2a) + r^2\cdot(1-2a),$$

so wird

$$F'(r) = (2-2a) + 2r\cdot(1-2a) > 0$$

für $0 \leqq r \leqq 1$ und $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$. Daher ist

$$F(r) \leqq F(1) \quad \text{in} \quad 0 \leqq r \leqq 1.$$

Also folgt aus (10)

$$\Re\left(\frac{f(z_0)}{z_0}\right) > \frac{1}{1+(2-2a)+(1-2a)} = \frac{1}{4\cdot(1-a)} \geqq a.$$

Die letzte Abschätzung ist identisch mit der Ungleichung

$$4a(1-a) \leqq 1,$$

die bekanntlich für jedes reelle a gültig ist. Da z_0 ein beliebiger Punkt von $|z| < 1$ ist, ist damit die erste Behauptung bewiesen.

2. Es sei wieder z_0 ein beliebiger, fester Punkt von $|z| < 1$, es sei $|z_0| = r < 1$. Neben der beliebigen Funktion $f(z)$ der Klasse $\mathfrak{K}$ betrachten wir die Funktion $w = h(z)$ von (2). Da diese mit $f(z)$ zur Klasse $\mathfrak{K}$ gehört, folgt nun nach Behauptung 1

$$\Re\frac{h(z)}{z} \geqq a \quad \text{in } |z| < 1.$$

Bilden wir die Funktion

$$g_1(z) = \frac{1}{1-a}\left(\frac{h(z)}{z} - a\right),$$

so ist also $\Re g_1(z) \geqq 0$ in $|z| < 1$ und $g_1(0) = 1$; $g_1(z)$ erfüllt somit die Voraussetzungen von Hilfssatz 1. Nach diesem schließen wir — ganz analog wie bei 1. —, daß $\frac{h(z_0)}{z_0}$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe liegt, die über der Strecke

$$(1-a)\frac{1-r}{1+r} + a \;\ldots\; (1-a)\frac{1+r}{1-r} + a$$

der reellen Achse als Durchmesser steht. Folglich ist

$$\Re\left(\frac{1}{\frac{h(z_0)}{z_0}}\right) \geqq \frac{1}{(1-a)\frac{1+r}{1-r} + a}. \tag{11}$$

Nun folgt aber aus (5) und (6)

$$z_0\cdot\frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \frac{1}{1-|z_0|^2}\cdot\frac{1}{\frac{h(z_0)}{z_0}}. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) ergibt sich dann

$$\Re\left(z_0\cdot\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right) \geqq \frac{1}{1-r^2}\cdot\frac{1}{(1-a)\frac{1+r}{1-r}+a} \geqq \frac{1}{4\cdot(1-a)},$$

wie bei 1. schon bewiesen ist. Da z_0 ein beliebiger Punkt von $|z| < 1$ ist, ist damit auch die zweite Behauptung bewiesen.

I. Satz (Hauptsatz). *Die Funktion $w = f(z) = z + \ldots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{K}$. Dann ist in $|z| < 1$*

$$1)\ \Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) \geqq \frac{1}{2}, \qquad 2)\ \Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq \frac{1}{2}.$$

Dabei kann in beiden Behauptungen die Schranke $\frac{1}{2}$ nicht durch eine höhere ersetzt werden.

Beweis. Wir bilden die Zahlenfolge:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{1}{4(1-a_1)} = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{4(1-a_2)} = \frac{1}{3}; \quad \ldots,$$

in welcher das n-te aus dem $(n-1)$-ten Glied berechnet wird vermittels der Rekursionsformel

$$a_n = \frac{1}{4(1-a_{n-1})}. \tag{13}$$

Nach Hilfssatz 4 ist unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes

$$1)\ \Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) \geqq a_n, \quad 2)\ \Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq a_n \text{ in } |z| < 1,$$

falls bewiesen ist:

$$\text{I) } 0 \leqq a_{n-1} \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{II) } \Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq a_{n-1} \text{ in } |z| < 1.$$

I) und II) ist bewiesen für $n = 2$ in Hilfssatz 3:

$$\text{I) } 0 \leqq a_1 \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{II) } \Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq a_1 \text{ in } |z| < 1.$$

Der Hauptsatz ist also bewiesen, wenn wir zeigen:

$$\text{A. } 0 \leqq a_n \leqq \tfrac{1}{2} \text{ für } n = 2, 3, \ldots, \qquad \text{B. } \lim_{n \to \infty} a_n = \tfrac{1}{2}.$$

Beide Behauptungen sind bewiesen, wenn wir zeigen:

$$a_k = \frac{k-1}{2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Dies ist bewiesen für $k = 1$. Es sei bewiesen für $k = n$:

$$a_n = \frac{n-1}{2n}.$$

Dann ist nach (13)

$$a_{n+1} = \frac{1}{4 \cdot \left(1 - \frac{n-1}{2n}\right)} = \frac{(n+1)-1}{2 \cdot (n+1)}.$$

Damit ist (14) allgemein, und damit der Hauptsatz bewiesen.

Bemerkungen. 1. Die Schranke $\frac{1}{2}$ ist scharf und wird erreicht bei der Funktion

$$w = f(z) \equiv \frac{z}{1+z} = z + \ldots. \tag{15}$$

die $|z| < 1$ auf die Halbebene $\Re(w) < \frac{1}{2}$ abbildet. Für diese Funktion ist

$$w_1 = \frac{f(z)}{z} \equiv z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{1}{1+z},$$

und durch $w_1 = \frac{1}{1+z}$ wird gerade $|z| < 1$ auf $\Re(w_1) > \frac{1}{2}$ abgebildet.

2. Die Bedingungen 1) und 2) des Hauptsatzes sind nicht hinreichend dafür, daß die Funktion $f(z)$ zur Klasse $\mathfrak{K}$ gehört, auch wenn man weiter voraussetzt, daß $f(z) = z + \ldots$ in $|z| < 1$ schlicht-regulär ist. Dies lehrt die Funktion

$$w = f(z) \equiv z + \frac{z^2}{3}.$$

Diese Funktion ist in $|z| < 1$ regulär und schlicht. Denn die Annahme $f(z_1) = f(z_2)$ mit $z_1 \neq z_2$ führt auf die Bedingung $z_1 + z_2 = -3$, die für $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$ nicht erfüllt werden kann. Außerdem ist

$$\text{a) } \frac{f(z)}{z} \equiv 1 + \frac{z}{3}, \quad \text{also} \quad \Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) > \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \text{ in } |z| < 1.$$

$$\text{b) } z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{1 + \frac{2}{3}z}{1 + \frac{1}{3}z},$$

d. h. $z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ liegt für $|z| < 1$ im Innern eines Kreises, der über der Strecke $\frac{1}{2} \ldots \frac{5}{4}$ der reellen Achse als Durchmesser steht, es ist also auch die Bedingung 2) des Hauptsatzes erfüllt. Trotzdem gehört die Funktion $f(z)$ nicht zur Klasse $\mathfrak{K}$. Denn dafür ist notwendig, daß in $|z| < 1$ die Ungleichung (4) erfüllt ist. Nun ist aber in diesem Beispiel

$$z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \equiv \frac{1 + \frac{4}{3}z}{1 + \frac{2}{3} \cdot z}.$$

Für $z = -1$ wird

$$z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 = -1,$$

d. h. (4) ist in $|z| < 1$ nicht überall erfüllt.

§ 2.

Folgerungen.

II. Satz. *Die Funktion $w = f(z) = z + \ldots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{K}$. Ist $|z_0| \leqq r < 1$, so liegen $\frac{f(z_0)}{z_0}$ und $z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$ sogar auf der abgeschlossenen Kreisscheibe, deren Durchmesser die Strecke $\frac{1}{1+r} \ldots \frac{1}{1-r}$ der reellen Achse ist.*

Beweis. 1. Wir bilden die Funktion

$$g(z) = 2 \cdot \left(\frac{f(z)}{z} - \frac{1}{2}\right).$$

Es ist $g(0) = 1$, und in $|z| < 1$ nach dem Hauptsatze:

$$\Re\, g(z) \geqq 0.$$

$g(z)$ erfüllt also die Voraussetzungen von Hilfssatz 1. Nach diesem liegt $g(z_0)$ auf der Kreisscheibe, die über der Strecke $\frac{1-r}{1+r} \ldots \frac{1+r}{1-r}$ der reellen Achse als Durchmesser steht. Also liegt $\frac{f(z_0)}{z_0}$ auf der Kreisscheibe, deren Durchmesser die Strecke

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-r}{1+r} + \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2}\,\frac{1+r}{1-r} + \frac{1}{2}$$

der reellen Achse ist. Das ist die in dem Satz genannte Kreisscheibe.

2. Ganz analog verläuft der Beweis für $z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$, wenn man die Behauptung 2) des Hauptsatzes benutzt.

Bemerkungen. 1. Aus Satz II ergeben sich die Löwnerschen Ungleichungen I) und II) als leichte Folgerungen. Ist $|z_0| = r_0 < 1$, so folgen aus Satz II die beiden Ungleichungen:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{1+r_0} \leqq \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| \leqq \frac{1}{1-r_0},$$

$$\text{b)}\quad \frac{1}{1+r_0} \leqq \left|z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \leqq \frac{1}{1-r_0}.$$

Aus a) folgt durch Multiplikation mit r_0 die Ungleichung I), durch Multiplikation von a) und b) die Ungleichung II).

2. Das Schrankengebiet für $\frac{f(z_0)}{z_0}$ und $z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$ kann allgemein nicht weiter verkleinert werden. Denn für die Funktion (15), die zur Klasse $\mathfrak{K}$ gehört, ist

$$w_1 = \frac{f(z)}{z} \equiv z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{1}{1+z},$$

und durch $w_1 = \frac{1}{1+z}$ wird $|z| \leqq r < 1$ gerade auf die in dem Satze genannte Kreisscheibe abgebildet.

III. Satz. *Unter den Voraussetzungen von Satz II gilt*

$$\text{A.}\quad \left|\operatorname{arc}\frac{f(z)}{z}\right| \leqq \arcsin r \qquad \text{mit } |z| \leqq r < 1,$$

$$\text{B.}\quad \left|\operatorname{arc} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqq \arcsin r \qquad \text{mit } |z| \leqq r < 1.$$

Beide Abschätzungen sind scharf.

Beweis. 1. Nach Satz II ist, wenn ϱ der Radius des in diesem Satze genannten Kreises, σ die Entfernung seines Mittelpunkts vom Nullpunkt ist,

$$\left|\operatorname{arc}\frac{f(z)}{z}\right| \leqq \arc\sin\frac{\varrho}{\sigma} = \arc\sin\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1+r}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-r}+\frac{1}{1+r}\right)}$$

$$= \arc\sin\frac{\frac{r}{1-r^2}}{\frac{1}{1-r^2}} = \arc\sin r.$$

2. Analog ergibt sich die zweite Behauptung.

Bemerkungen. 1. Die Schranken sind scharf und werden erreicht von der Funktion (15).

2. Durch Addition von A. und B. folgt die Bieberbachsche Ungleichung III).

IV. **Satz.** *Unter den Voraussetzungen von Satz II gilt*

$$|f(z)-f(-z)| \geqq \frac{2\cdot|z|}{1+|z|}.$$

Beweis. Nach Satz II ist

$$1)\ \Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) \geqq \frac{1}{1+|z|}, \quad 2)\ \Re\left(\frac{f(-z)}{-z}\right) \geqq \frac{1}{1+|z|},$$

und daher:

$$|f(z)-f(-z)| = |z|\cdot\left|\frac{f(z)}{z}+\frac{f(-z)}{-z}\right| \geqq |z|\,\Re\left(\frac{f(z)}{z}+\frac{f(-z)}{-z}\right)$$

$$\geqq |z|\left(\frac{1}{1+|z|}+\frac{1}{1+|z|}\right) = \frac{2|z|}{1+|z|},$$

w. z. b. w. Die Funktion (15) erreicht die Schranke nicht. Will man jedoch durch ein Vielfaches von $\frac{|z|}{1+|z|}$ abschätzen, so kann 2 durch keine höhere Zahl ersetzt werden. Denn die Schranke des Satzes strebt gegen 1, wenn $|z| \to 1$ strebt. Es ist aber auch

$$\lim_{|z|\to 1} |f(z)-f(-z)| = 1,$$

wenn $f(z)$ die Funktion (15) ist und $z \to i$ auf der imaginären Achse strebt.

§ 3.

Ein Satz über die Ableitungen der Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}$.

V. **Satz.** *Die Funktion $w = f(z) = z + \ldots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{K}$, es sei ferner $|z_0| \leqq r < 1$. Dann liegt $f'(z_0)$ in dem abgeschlossenen, schlichten Gebiet, das aus $|z| \leqq r$ durch die Abbildung*

$$s = \frac{1}{(1-z)^2} \tag{16}$$

entsteht.

Beweis. Wir stellen $\frac{f(z_0)}{z_0}$, $z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$ und $f'(z_0)$ als Punkte der s-Ebene dar und setzen zur Abkürzung

$$s_1 = \frac{f(z_0)}{z_0}, \quad s_2 = z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}, \quad s_3 = s_1 \cdot s_2 = f'(z_0).$$

Nach Satz II liegen s_1 und s_2 auf der Kreisscheibe, die aus $|z| \leqq r$ durch die Abbildung

(17) $$s = \frac{1}{1-z}$$

entsteht. Diese Kreisscheibe bilden wir durch die Funktion

(18) $$\eta = \operatorname{Log} s$$

schlicht-regulär auf das Gebiet B ab, wobei $\operatorname{Log} s$ den Hauptwert des Logarithmus bedeutet. Dabei folgt:

1. B ist konvex. Denn die Funktion

$$\eta = \operatorname{Log} s = \operatorname{Log} \frac{1}{1-z} = h(z)$$

führt $|z| \leqq r < 1$ schlicht-regulär in B über. Hinreichend dafür, daß B konvex ist, ist, daß die Ungleichung (4) in $|z| \leqq r$ für die Funktion $h(z)$ erfüllt ist. Da

$$z \cdot \frac{h''(z)}{h'(z)} + 1 = \frac{1}{1-z}$$

ist, ist diese Bedingung für $r < 1$ erfüllt.

2. Es sei $\eta_1 = \operatorname{Log} s_1$, $\eta_2 = \operatorname{Log} s_2$. Dann liegt der Punkt

$$\eta_4 = \tfrac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Log}(s_1 \cdot s_2) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Log} s_3$$

auf der Strecke $\eta_1 \ldots \eta_2$, also auch, da B konvex ist, in B.

Gehen wir vermittels der Funktion (18) zurück zur s-Ebene, so folgt aus 2., daß $s_4 = e^{\eta_4}$ auch auf der Kreisscheibe liegen muß, die aus $|z| \leqq r$ vermöge der Abbildung (17) entsteht. Da

$$s_3 = f'(z_0) = s_4^2$$

ist, liegt folglich $f'(z_0)$ in dem abgeschlossenen Gebiet, das aus $|z| \leqq r$ durch die Abbildung (16) entsteht, w. z. b. w.

Bemerkungen. 1. Das Gebiet, auf das $f'(z_0)$ durch diesen Satz eingeschränkt ist, kann für die Klasse $\mathfrak{K}$ nicht weiter verkleinert werden. Denn für die Funktion (15), die zur Klasse $\mathfrak{K}$ gehört, ist

$$f'(z) \equiv \frac{1}{(1+z)^2}.$$

2. Der V. Satz bedeutet eine Verschärfung der Ungleichungen II) und III), die unmittelbar aus ihm abgelesen werden können.

3. Es möge hier noch ein zweiter Beweis von Satz V für die Funktionen mitgeteilt werden, die $|z| < 1$ auf schlichte, konvexe Polygone abbilden. Bekanntlich kann man diese Funktionen mit Hilfe der Schwarz-Christoffelschen Formel explizit darstellen, es ist also möglich, sie direkt abzuschätzen[7]).

Wir beginnen mit einer Definition. Gegeben seien die n komplexen Zahlen

$$z_1, z_2, \ldots, z_n,$$

über die wir voraussetzen:

$$\Re(z_k) > 0, \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ferner seien gegeben die n reellen, positiven Zahlen

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

Unter dem allgemeinen, geometrischen Mittel der n Zahlen $z_1 \ldots z_n$ verstehen wir:

$$\begin{aligned} M &= (z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} \cdot z_3^{k_3} \ldots z_n^{k_n})^{\frac{1}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}} \\ &= e^{\frac{1}{k_1 + \ldots + k_n} \cdot (k_1 \operatorname{Log} z_1 + \ldots + k_n \cdot \operatorname{Log} z_n)}, \end{aligned}$$

wobei unter $\operatorname{Log} z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ der Hauptwert des Logarithmus verstanden ist.

Über das allgemeine, geometrische Mittel beweisen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz. Die n Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien gelegen auf der Kreisscheibe

$$|z - a| \leqq q \cdot a,$$

wo a reell, positiv, $0 \leqq q < 1$. Dann liegt das allgemeine, geometrische Mittel dieser Zahlen ebenfalls auf der Kreisscheibe: $|z - a| \leqq q \cdot a$, wie auch die Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ gewählt werden.

Beweis. Wir bilden $|z - a| \leqq q \cdot a$ durch die Funktion

$$w = \operatorname{Log} z$$

schlicht-regulär auf das Gebiet B ab, wobei $\operatorname{Log} z$ den Hauptwert des Logarithmus bedeutet. Der Hilfssatz ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß $w_0 = \operatorname{Log} M$ in B liegt. Es ist

$$w_0 = \operatorname{Log} M = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} k_\lambda \cdot \operatorname{Log} z_\lambda}{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} k_\lambda}.$$

[7]) Auf diese Weise hat Herr Bieberbach die Ungleichung III) bewiesen.

a) Nach einem bekannten Satz über den allgemeinen Schwerpunkt von n Punkten [8]) liegt w_0 in dem kleinsten konvexen Polygon, das die Punkte $\operatorname{Log} z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ enthält.

b) B ist konvex. Denn die Funktion

$$z = c \cdot \frac{1+\mathfrak{z}}{1-\mathfrak{z}}, \qquad c > 0,$$

führt einen Kreis $|\mathfrak{z}| \leqq r < 1$ in $|z - a| \leqq q \cdot a$ über, so daß

$$w = h(\mathfrak{z}) = \operatorname{Log}\left(c \cdot \frac{1+\mathfrak{z}}{1-\mathfrak{z}}\right)$$

$|\mathfrak{z}| \leqq r$ schlicht-regulär auf B abbildet. B ist konvex, wenn für $h(\mathfrak{z})$ die Ungleichung (4) in $|\mathfrak{z}| \leqq r$ erfüllt ist. Da $r < 1$ und

$$\mathfrak{z} \cdot \frac{h''(\mathfrak{z})}{h'(\mathfrak{z})} + 1 = \frac{1+\mathfrak{z}^2}{1-\mathfrak{z}^2}$$

ist, ist dies der Fall.

Aus a) und b) folgt, daß $w_0 = \operatorname{Log} M$ in B liegt, w. z. b. w.

Beweis des Satzes V für die konvexen Polygone.

Die Funktionen, die $|z| < 1$ auf konvexe Polygone schlicht-regulär abbilden, lauten

$$w = f(z) = \int_0^z (1 - e^{i\alpha_1} \cdot z)^{\mu_1} \cdot (1 - e^{i\alpha_2} z)^{\mu_2} \ldots (1 - e^{i\alpha_n} z)^{\mu_n} \cdot dz;$$

wobei die α_k und μ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ reelle Zahlen sind, die den beiden Bedingungen genügen:

$$1)\ \mu_k \leqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$2)\ \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k = -2.$$

Es ist

$$s = f'(z) = (1 - e^{i\alpha_1} \cdot z)^{\mu_1} \cdot (1 - e^{i\alpha_2} \cdot z)^{\mu_2} \ldots (1 - e^{i\alpha_n} \cdot z)^{\mu_n}.$$

Ist nun $|z_0| \leqq r < 1$, so lautet der zu beweisende Satz:

Unter den Voraussetzungen 1) und 2) liegt

$$s_{\mathfrak{z}} = f'(z_0) = (1 - e^{i\alpha_1} \cdot z_0)^{\mu_1} \ldots (1 - e^{i\alpha_n} \cdot z_0)^{\mu_n}$$

im abgeschlossenen, schlichten Gebiet, das aus $|z| \leqq r$ durch die Abbildung (16) entsteht.

---

[8]) Siehe z. B. K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie, 2. Bd. (Samml. Göschen, 1928), § 1, Aufg. 1.

Zum Beweis setzen wir

$$\nu_k = -\mu_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$M = \{(1 - e^{i\alpha_1} \cdot z_0)^{\nu_1} \cdot (1 - e^{i\alpha_2} \cdot z_0)^{\nu_2} \ldots (1 - e^{i\alpha_n} z_0)^{\nu_n}\}^{\frac{1}{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n}}.$$

Da die Punkte

$$(1 - e^{i\alpha_1} \cdot z_0),\ (1 - e^{i\alpha_2} z_0),\ \ldots,\ (1 - e^{i\alpha_n} z_0)$$

in $|1 - s| \leqq r$ liegen, liegt nach dem Hilfssatze auch M auf dieser Kreisscheibe, da $\nu_k \geqq 0$ nach 1) $(k = 1, \ldots, n)$. Diese Scheibe entsteht aus $|z| \leqq r$ durch die Abbildung $s = 1 - z$. Folglich liegt M^2 in dem abgeschlossenen, schlichten Gebiet, das aus $|z| \leqq r$ durch die Abbildung $s = (1 - z)^2$ entsteht. Da $\mu_k = -\nu_k\,(k = 1, \ldots, n)$ ist, folgt wegen 2)

$$f'(z_0) = \frac{1}{M^2}.$$

Also liegt $f'(z_0)$ in dem Gebiet, das aus $|z| \leqq r$ durch die Abbildung (16) entsteht, w. z. b. w.

§ 4.

Ein Satz über die Funktionen der Klasse $\mathfrak{St}$.

VI. Satz. *Die Funktion $w = F(z) = z + \ldots$ gehöre zur Klasse* $\mathfrak{St}$. *Ist $|z_0| \leqq r < 1$, so liegt $\frac{F(z_0)}{z_0}$ in dem Gebiet, das aus $|z| \leqq r$ durch die Abbildung*

$$s = \frac{1}{(1 - z)^2}$$

entsteht.

Beweis. Es sei

$$F(z) = z \cdot f'(z)$$

gesetzt. Nach einer Bemerkung von I. W. Alexander[9]) gehört $f(z)$ zur Klasse $\mathfrak{K}$. Da nun

$$\frac{F(z_0)}{z_0} = f'(z_0)$$

ist, so ist die Behauptung bewiesen, da nach Satz V $f'(z_0)$ in dem Gebiet liegt, das aus $|z| \leqq r$ durch die Abbildung (16) entsteht.

Das Schrankengebiet für $\frac{F(z_0)}{z}$ kann für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{St}$ nicht weiter verkleinert werden. Denn für die Funktion

$$w = F(z) \equiv \frac{z}{(1 - z)^2} = z + \ldots,$$

die $|z| < 1$ auf das Schlitzgebiet abbildet. das entsteht, wenn die w-Ebene

[9]) I. W. Alexander in Ann. of mat. (2) 17 (1915), S. 12—22. Man vergleiche L. Bieberbach, a. a. O., S. 303.

längs der negativ-reellen Achse vom Punkte $-\frac{1}{4}$ bis zum unendlich fernen Punkte aufgeschnitten wird, ist gerade

$$\frac{F(z)}{z} \equiv \frac{1}{(1-z)^2}.$$

§ 5.

Ein Koeffizientensatz.

Aus Satz I folgen notwendige Bedingungen für die Koeffizienten der Funktionen (1), die zur Klasse $\mathfrak{K}$ gehören, indem man einen Satz von Carathéodory[10]) auf die Funktionen

$$\frac{f(z)}{z}, \quad z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$$

anwendet.

1. Die Funktion

$$\frac{f(z)}{z} = 1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + a_n z^{n-1} + \ldots$$

erfüllt nach Satz I die Voraussetzungen des Satzes von Carathéodory. Nach diesem ist

$$|a_n| \leqq 1 \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

eine notwendige Bedingung, die bereits in der Löwnerschen Arbeit bewiesen wurde, indem unter Benutzung von (4) derselbe Satz auf die Funktion $\left(z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right)$ angewandt wurde.

2. Analog ergibt sich aus dem zweiten Ergebnis von Satz I der

VII. Satz. *Die Funktion* (1) *gehöre zur Klasse* $\mathfrak{K}$. *Die in* $|z| < 1$ *konvergente Potenzreihenentwicklung von* $\operatorname{Log} \frac{f(z)}{z}$ *laute*

$$\operatorname{Log} \frac{f(z)}{z} = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n \cdot z^n + \ldots.$$

Dann ist

$$|b_n| \leqq \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Beweis. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in $|z| \leqq r < 1$ darf gliedweise differenziert werden:

$$\frac{z \cdot f'(z) - f(z)}{z \cdot f(z)} = b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot z + \ldots + n \cdot b_n \cdot z^{n-1} + \ldots,$$

$$z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + b_1 \cdot z + 2\, b_2 \cdot z^2 + \ldots + n \cdot b_n \cdot z^n + \ldots.$$

[10]) C. Carathéodory in Rend. di Palermo **32** (1911), S. 193—217. Der Satz lautet: Die Funktion $w = g(z) = 1 + c_1 \cdot z + \ldots + c_n \cdot z^n + \ldots$ sei in $|z| < 1$ regulär und es sei dort: $\Re\, g(z) \geqq \frac{1}{2}$. Dann ist

$$|c_n| \leqq 1 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Nach dem I. Satze ist in $|z| < 1$

$$\Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq \frac{1}{2}.$$

Also, lehrt der Satz von Carathéodory, ist

$$|n \cdot b_n| \leqq 1, \qquad \text{d. h.} \qquad |b_n| \leqq \frac{1}{n},$$

w. z. b. w.

Die Schranke des Satzes ist scharf und wird erreicht von der Funktion (15). Für sie ist

$$\operatorname{Log} \frac{f(z)}{z} \equiv \operatorname{Log} \frac{1}{1+z} = -z + \frac{1}{2} \cdot z^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} z^n + \ldots$$

§ 6.

Die ungeraden Funktionen der Klassen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{St}$.

Die ungeraden Funktionen der Klassen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{St}$ bilden $|z| < 1$ schlicht-regulär auf konvexe bzw. sternförmige Gebiete mit 0 als Mittelpunkt ab, die zum Nullpunkt symmetrisch sind. Wir beweisen über sie zunächst den folgenden

Hilfssatz. Die ungerade Funktion

$$w = \Phi(z) = z + a_3 \cdot z^3 + \ldots + a_{2n+1} \cdot z^{2n+1} + \ldots$$

gehöre zur Klasse $\mathfrak{St}$. Dann gehört auch die Funktion

$$w = F(z) = \Phi^2(\sqrt{z}) = z + \ldots \tag{19}$$

zur Klasse $\mathfrak{St}$.

Beweis. a) Die Funktion (19) ist in $|z| < 1$ regulär und schlicht. Denn wäre $F(z_1^2) = F(z_2^2)$ mit $z_1^2 \neq z_2^2$, so wäre $\Phi^2(z_1) = \Phi^2(z_2)$ und $\Phi(z_1) = \pm \Phi(z_2)$ mit $z_1 \neq \pm z_2$. Da $\Phi(z)$ in $|z| < 1$ schlicht ist, ist $\Phi(z_1) \neq \Phi(z_2)$. Also müßte $\Phi(z_1) = -\Phi(z_2)$ sein. Da aber $\Phi(z)$ ungerade ist, ist dies unmöglich, wenn $z_1 \neq -z_2$ ist. Also ist $F(z)$ in $|z| < 1$ schlicht.

b) Die Funktion (19) bildet $|z| < 1$ auf ein Sterngebiet mit 0 als Mittelpunkt ab, wenn in $|z| < 1$

$$\Re\left(z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)}\right) \geqq 0 \tag{20}$$

ist [11]. Nun ist

$$F'(z) = \Phi'(\sqrt{z}) \cdot \Phi(\sqrt{z}) \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}$$

[11]) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $w = F(z) = z + \ldots$ $|z| < 1$ auf ein Sterngebiet mit 0 als Mittelpunkt abbildet, ist, daß in $|z| < 1$ die Ungleichung (20) erfüllt ist. [R. Nevanlinna, Über die konforme Abbildung von Sterngebieten, Oeversikt av Finska Vet. S. Förh. 63 (1920—21)].

Man vergleiche Hilfssatz 3 von § 1.

und also

$$(21) \qquad z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} = \sqrt{z} \cdot \frac{\Phi'(\sqrt{z})}{\Phi(\sqrt{z})}.$$

Mit $|z| < 1$ ist auch $|\sqrt{z}| < 1$. Da $\Phi(z)$ zur Klasse $\mathfrak{St}$ gehört, ist[11])

$$\Re\left(\sqrt{z} \cdot \frac{\Phi'(\sqrt{z})}{\Phi(\sqrt{z})}\right) \geqq 0.$$

Also ist wegen (21) auch (20) in $|z| < 1$ erfüllt.

VIII. Satz[12]). *Die ungerade Funktion*

$$w = \Phi(z) = z + a_3 z^3 + \ldots + a_{2n+1} \cdot z^{2n+1} + \ldots$$

gehöre zur Klasse $\mathfrak{St}$. *Dann ist*

$$1) \quad \Re\left(\frac{\Phi(z)}{z}\right) \geqq \frac{1}{2} \quad \text{in} \quad |z| < 1,$$

$$2) \quad |a_{2n+1}| \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Beweis. Mit $\Phi(z)$ gehört nach dem Hilfssatz auch die Funktion

$$F(z) = \Phi^2(\sqrt{z})$$

zur Klasse $\mathfrak{St}$. Ist $|z_0| \leqq r < 1$, so liegt nach Satz VI $\frac{F(z_0^2)}{z_0^2}$ in dem Gebiet, das aus $|z| \leqq r^2 < 1$ durch die Abbildung (16) entsteht. Da

$$\left(\frac{\Phi(z_0)}{z_0}\right)^2 = \frac{\Phi^2(z_0)}{z_0^2} = \frac{F(z_0^2)}{z_0^2}$$

ist, liegt $\frac{\Phi(z_0)}{z_0}$ in dem Gebiet, das aus $|z| \leqq r^2$ durch die Abbildung (17) entsteht. Für $r \to 1$ folgt hieraus die erste Behauptung.

Die zweite folgt aus der ersten, da die Funktion

$$\frac{\Phi(z)}{z} = 1 + a_3 z^2 + \ldots + a_{2n+1} \cdot z^{2n} + \ldots$$

die Voraussetzungen des Carathéodoryschen Koeffizientensatzes[10]) erfüllt. Nach diesem ist $|a_{2n+1}| \leqq 1$.

Bemerkungen. 1. Beide Schranken sind scharf und werden erreicht von der Funktion

$$w = \frac{z}{1 - z^2} = z + z^3 + \ldots + z^{2n+1} + \ldots,$$

die $|z| < 1$ auf das Schlitzgebiet abbildet, das entsteht, wenn die w-Ebene längs der imaginären Achse von $-\frac{i}{2}$ bis $-\infty$, und von $+\frac{i}{2}$ bis $+\infty$ aufgeschnitten wird.

---

[12]) Die Koeffizientenabschätzungen und die scharfen Abschätzungen von $|f(z)|$ und $|f'(z)|$ für die ungeraden Funktionen der Klassen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{St}$ finden sich bei J. Privalov a. a. O.

2. Wie aus dem Beweise hervorgeht, liegt $\frac{\Phi(z)}{z}$ für $|z| = r < 1$ auf der Kreisscheibe, die über der Strecke $\frac{1}{1+r^2} \cdots \frac{1}{1-r^2}$ der reellen Achse als Durchmesser steht. Daraus folgt

$$\frac{1}{1+r^2} \leqq \left|\frac{\Phi(z)}{z}\right| \leqq \frac{1}{1-r^2}.$$

und durch Multiplikation mit r

$$\frac{r}{1+r^2} \leqq |\Phi(z)| \leqq \frac{r}{1-r^2} \qquad \text{(J. Privalov).}$$

IX. Satz. *Die ungerade Funktion*

$$w = \varphi(z) = z + b_3 z^3 + \ldots + b_{2n+1} \cdot z^{2n+1} + \ldots$$

gehöre zur Klasse $\mathfrak{K}$. *Dann gilt*

$$1) \ \Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) \geqq \frac{\pi}{4} \quad \text{in} \quad |z| < 1,$$

$$2) \ |b_{2n+1}| \leqq \frac{1}{2n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Beweis. 1. Nach I. W. Alexander[9]) gehört die Funktion

$$\Phi(z) = z \cdot \varphi'(z)$$

zur Klasse $\mathfrak{St}$, und ist mit $\varphi(z)$ ungerade. Nach Bemerkung 2 zu Satz VIII ist also

$$\Re\left(\frac{\Phi(z)}{z}\right) \geqq \frac{1}{1+r^2}, \tag{22}$$

wo $|z| \leqq r < 1$ ist. Zum Beweis dürfen wir uns auf positiv-reelle z beschränken. Es sei $z_0 = r_0 < 1$. Dann ist

$$\varphi(z_0) = \int_0^{z_0} \frac{\Phi(z)}{z} \cdot dz. \tag{23}$$

Wir wählen als Integrationsweg die positiv-reelle Achse und erhalten, wenn wir $z = x + i \cdot y$, $\frac{\Phi(z)}{z} = g(x,y) + i \cdot h(x,y)$ setzen

$$\varphi(z_0) = \int_0^{r_0} \{g(x,0) + i\, h(x,0)\}\, dx,$$

$$\Re\, \varphi(z_0) = \int_0^{r_0} g(x,0)\, dx. \tag{24}$$

Aus (22) und (24) folgt

$$\Re\, \varphi(z_0) \geqq \int_0^{r_0} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} r_0,$$

wobei der Zweig zu nehmen ist, der für $r_0 = 0$ verschwindet. Folglich ist

$$\Re\left(\frac{\varphi(z_0)}{z_0}\right) \geqq \frac{\operatorname{arc\,tg} r_0}{r_0}. \tag{25}$$

Diese Gleichung ist auch für komplexe $|z_0| = r_0$ richtig. Da die Funktion $\frac{1}{r_0} \cdot \operatorname{arc\,tg} r_0$ mit wachsendem r_0 monoton abnimmt, folgt aus (25)

$$\Re\left(\frac{\varphi(z_0)}{z_0}\right) \geqq \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Die Funktion

$$\Phi(z) = z \cdot \varphi'(z) = z + 3\, b_3 z^3 + \ldots + (2n+1) \cdot b_{2n+1} \cdot z^{2n+1} + \ldots$$

ist ungerade und gehört zur Klasse $\mathfrak{St}$. Nach Satz VIII ist

$$|(2n+1) \cdot b_{2n+1}| \leqq 1, \quad \text{d. h.} \quad |b_{2n+1}| \leqq \frac{1}{2n+1},$$

w. z. b. w.

Beide Schranken sind scharf und werden erreicht von der Funktion

$$w = \varphi(z) \equiv \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

die $|z| < 1$ schlicht-regulär auf den Parallelstreifen

$$-\frac{\pi}{4} < \Im(w) < +\frac{\pi}{4}$$

abbildet.

II. Teil.

Über Verschärfungen eines Satzes von Szegö.

§ 1.

Der Szegösche Satz der Klasse $\mathfrak{K}$.

X. Satz. *Die Funktion $w = f(z) = z + \ldots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{K}$. Von zwei Randpunkten des Bildgebietes G von $|z| < 1$, die auf derselben Nullgeraden, aber auf verschiedenen Seiten des Nullpunktes liegen, ist mindestens einer vom Nullpunkt um mindestens $\frac{\pi}{4}$ entfernt.*

Beweis. 1. Es genügt, den Satz für die Abbildungen auf Winkelräume bzw. Parallelstreifen zu beweisen. Es sei $C_1 O C_2$ eine beliebige Nullgerade, C_1 und C_2 die Randpunkte von G auf ihr. Wir zeichnen in C_1 und C_2 die Stützgeraden von G, die einen Winkelraum G_1 einschließen, der G im Innern enthält. Die Funktion $w = g(z) = r \cdot z + \ldots$, wo $r > 0$, bilde $|z| < 1$ auf G_1 ab. Wir können schließen[13]:

$$r \geqq 1.$$

---

[13]) Denn die Funktion $w_1 = g^{-1}(f(z)) = \frac{1}{r} z + \ldots$, wo $w_1 = g^{-1}(w)$ die Umkehrfunktion von $w = g(w_1)$ ist, bildet $|z| < 1$ auf ein Gebiet ab, das im Innern von $|w_1| < 1$ liegt. Nach dem Schwarzschen Lemma ist $\frac{1}{r} \leqq 1$, wobei das Gleichheitszeichen nur eintritt, wenn $w_1 = g^{-1}(f(z))$ die Identität ist.

Die Funktion $w = h(z) = \frac{1}{r} \cdot g(z) = z + \ldots$ bildet $|z| < 1$ auf ein Gebiet G_2 ab, das aus C_1 durch Streckung entsteht. Die Randgeraden von G_2 schneiden wir mit $C_1 \ldots C_2$ in A_1 und A_2. Es ist $|A_k| \leqq |C_k|$ $(k = 1, 2)$, d. h. der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt ist, das für mindestens ein k, $(k = 1, 2)$, $|A_k| \geqq \frac{\pi}{4}$ ist.

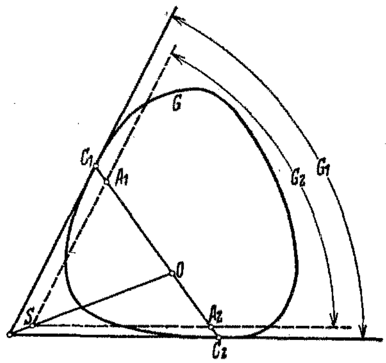

Fig. 1.

2. Die Stützgeraden in C_1 und C_2 seien nicht parallel. Der Scheitelpunkt von G_2 sei S, es sei $OS = a$ und $\alpha \cdot \pi$ $(0 < \alpha < 1)$ sei der Winkel, den die Randstrahlen von G_2 bilden. Endlich sei φ der Winkel, den SO mit einem dieser Randstrahlen bildet und der bestimmt ist durch die Festsetzung
$$0 < \varphi \leqq \frac{\alpha \pi}{2}.$$
B_1 und B_2 seien dann zwei Randpunkte von G_2, die auf demselben Nullstrahl, aber auf verschiedenen Seiten von 0 liegen, und für die $|B_1| = |B_2|$ ist. $|B_1|$ ist eine Funktion von φ und α:
$$|B_1| = F(\varphi; \alpha).$$
Der Satz ist nun für den Fall 2 bewiesen, wenn wir zeigen:
$$F(\varphi; \alpha) \geqq \frac{\pi}{4} \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi \leqq \frac{\alpha \cdot \pi}{2}.$$
Ist nämlich $|A_1| \geqq |A_2|$, so tragen wir auf OA_2 die Strecke $OA_3 = |A_1|$ ab. Die Strahlen $S \ldots A_1$ und $S \ldots A_3$ schließen einen Winkelraum G_3 ein, der G_2 im Innern enthält. Die Funktion $w = g_1(z) = r_1 \cdot z + \ldots$, wo $r_1 > 0$, bilde $|z| < 1$ auf G_3 ab. Wir schließen wieder [13])
$$r_1 \geqq 1.$$

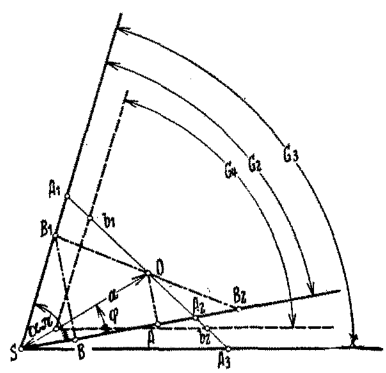

Fig. 2.

Die Funktion $w = h_1(z) = \frac{1}{r_1} \cdot g_1(z) = z + \ldots$ bildet $|z| < 1$ auf G_4 ab, das aus G_3 durch Streckung entsteht. Schneidet man die Randstrahlen von G_4 mit $A_1 A_3$ in b_1 und b_2, so ist
$$1)\ |b_1| = |b_2|,$$
$$2)\ |A_1| \geqq |b_1|.$$

Es genügt also, daß wir nachweisen: $|b_1| \geqq \frac{\pi}{4}$. Dies geschieht durch eine Untersuchung von $F(\varphi; \alpha)$.

Die Funktion $F(\varphi; \alpha)$. Die Funktion

$$w_1 = \left(i \frac{1+z}{1-z} + b\right)^\alpha$$

bildet $|z| < 1$ auf $0 < \operatorname{arc} w_1 < \alpha\pi$ ab, wenn $b > 0$ reell ist. Es ist

$$w_1(0) = (i+b)^\alpha; \quad w_1'(0) = 2\alpha i \cdot (i+b)^{\alpha-1}.$$

Also bildet

$$w = h(z) = e^{ik} \cdot \frac{\left(i \frac{1+z}{1-z} + b\right)^\alpha - (i+b)^\alpha}{2\alpha \cdot i(i+b)^{\alpha-1}} = e^{ik} z + \ldots, \tag{26}$$

wo k reell, $|z| < 1$ auf G_2 ab. Aus (26) folgt

$$\varphi = \operatorname{arc} w_1(0) = \alpha \cdot \operatorname{arc\,cotg} b,$$

$$a = \frac{|w_1(0)|}{|w_1'(0)|} = \frac{\sqrt{1+b^2}}{2\alpha};$$

oder, a als Funktion von α und φ ausgedrückt,

$$a = \frac{1}{2\alpha \cdot \sin\frac{\varphi}{\alpha}}. \tag{27}$$

Sind nun φ der Winkel zwischen SB_2 und SO, SB und SA die Projektionen von SB_1 und SO auf SB_2, so ist

$$BA = AB_2$$

und

$$|B_1|^2 = OA^2 + BA^2 = OA^2 + (SA - SB)^2,$$

d. h.

$$|B_1|^2 = \Phi(\varphi; \alpha) = a^2 \cdot \left\{\sin^2\varphi + \left(\cos\varphi - \frac{2\sin\varphi}{\operatorname{tg}\alpha\pi}\right)^2\right\}$$

$$\Phi(\varphi; \alpha) = F^2(\varphi; \alpha) = \frac{1}{4\alpha^2 \sin^2\frac{\varphi}{\alpha}} \cdot \left\{1 - \frac{2 \cdot \sin 2\varphi}{\operatorname{tg}\alpha\pi} + \frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha\pi}(1 - \cos 2\varphi)\right\}. \tag{28}$$

Nach leichten Umformungen erhält man aus (28)

$$\Phi(\varphi; \alpha) = \frac{1}{4\alpha^2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{\alpha}} \cdot \left\{1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha\pi} - \frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha\pi} \cdot \frac{\cos(\alpha\pi - 2\varphi)}{\cos\alpha\pi}\right\}. \tag{29}$$

a) Es sei $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$. Wächst φ von 0 bis $\frac{\alpha\pi}{2}$, so wächst $\cos(\alpha\pi - 2\varphi)$ monoton, d. h. der Wert der Klammer in (29) wird kleiner. Also ist, da auch mit wachsendem φ $\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{\alpha}}$ kleiner wird,

$$\Phi(\varphi;\alpha) \geqq \Phi\left(\frac{\alpha\pi}{2};\alpha\right) = \frac{1}{4\alpha^2}\cdot\left\{1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha\pi} - \frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha\pi}\cdot\frac{1}{\cos\alpha\pi}\right\}$$
$$= \frac{1}{4\alpha^2}\cdot\left\{1 - \frac{4\cdot\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{\operatorname{tg}^2\alpha\pi\cdot\cos\alpha\pi}\right\},$$

$$\Phi(\varphi;\alpha) \geqq \frac{1}{4\alpha^2}\cdot\left\{1 - \frac{\cos\alpha\pi}{\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}}\right\} = \frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{4\alpha^2\cdot\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha\pi}{2}}{4\alpha^2} > \frac{\frac{\alpha^2\pi^2}{4}}{4\alpha^2} = \frac{\pi^2}{16},$$

d. h. $F(\varphi;\alpha) > \frac{\pi}{4}$, w. z. b. w.

b) Es sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. In diesem Intervall ist

$$\Phi(\varphi;\alpha) = \frac{1}{4\alpha^2\cdot\sin^2\frac{\varphi}{\alpha}}\cdot\left\{1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha\pi\cdot\cos\alpha\pi}\cdot[\cos\alpha\pi - \cos(\alpha\pi - 2\varphi)]\right\}$$
$$= \frac{1}{4\alpha^2\cdot\sin^2\frac{\varphi}{\alpha}}\cdot\left\{1 + \frac{4\sin(\alpha\pi-\varphi)\cdot\sin\varphi}{\operatorname{tg}^2\alpha\pi\cdot|\cos\alpha\pi|}\right\}$$
$$\geqq \frac{1}{4\alpha^2\cdot\sin^2\frac{\varphi}{\alpha}} + \frac{\sin(\alpha\pi-\varphi)}{\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha\pi\cdot|\cos\alpha\pi|\cdot\sin\frac{\varphi}{\alpha}},$$

da $\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\varphi}{\alpha}} \geqq \alpha$ ist. Also ist

$$\Phi(\varphi;\alpha) \geqq \frac{1}{4\cdot\alpha^2} + \frac{\sin\alpha\pi\cdot\cos\varphi}{\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha\pi\cdot|\cos\alpha\pi|\sin\frac{\varphi}{\alpha}} + \frac{|\cos\alpha\pi|\cdot\sin\varphi}{\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha\pi\cdot|\cos\alpha\pi|\cdot\sin\frac{\varphi}{\alpha}};$$

und, da der zweite Bruch jedenfalls positiv ist,

$$\Phi(\varphi;\alpha) \geqq \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{\sin\varphi}{\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha\pi\sin\frac{\varphi}{\alpha}}$$
$$> \frac{1}{4\cdot\alpha^2} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha\pi} = \frac{\sin^2\alpha\pi + \cos^2\alpha\pi + (4\alpha^2-1)\cdot\cos^2\alpha\pi}{4\alpha^2\cdot\sin^2\alpha\pi}$$
$$> \frac{1}{4\cdot\alpha^2\cdot\sin^2\alpha\pi}.$$

Folglich ist hier

$$F(\varphi;\alpha) > \frac{1}{2\alpha\sin\alpha\pi}.$$

Diese Funktion hat in dem betrachteten Intervall ein Minimum an der Stelle α_0, die bestimmt ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_0 \pi = -\alpha_0 \pi.$$

Wir schließen α_0 zwischen die Grenzen

$$\frac{11}{18} < \alpha_0 < \frac{2}{3}$$

ein und erhalten somit

$$F(\varphi; \alpha) > \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{3} \sin \frac{11}{18} \pi} > \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{0{,}94} > \frac{\pi}{4},$$

w. z. b. w.

3. Die Stützgeraden in C_1 und C_2 seien parallel. G_1 und G_2 sind Parallelstreifen. Für mindestens ein k $(k = 1, 2)$ ist

$$|A_k| \geqq a_1 \geqq a_2,$$

wo a_1 und a_2 die Abstände des Punktes 0 von den Randgeraden von G_2 sind. G_2 liegt im Innern eines Streifens G_3 von derselben Richtung und der Breite $2 \cdot a_1$, auf dessen Mittellinie 0 liegt. Durch die Funktion

$$w = \frac{r_2 \cdot e^{ik}}{2} \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} = r_2 \cdot e^{ik} \cdot z + \ldots,$$

wo k und $r_2 > 0$ reell sind, wird $z < 1$ auf G_3 abgebildet. Es ist $r_2 \geqq 1$ [13]). Da die Breite von G_3 gleich $r_2 \cdot \frac{\pi}{2}$ ist, folgt

$$2 \cdot a_1 = r_2 \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$a_1 \geqq \frac{\pi}{4}.$$

w. z. b. w.

§ 2.

Eine Verallgemeinerung für die Funktionen der Klasse 𝔖t.

XI. Satz [14]). *Die Funktion $w = f(z) = z + \ldots$ gehöre zur Klasse 𝔖t. Legen wir durch den Nullpunkt der w-Ebene n gleichwinklig verteilte Strahlen, so möge jeder von ihnen den Rand des Bildgebietes G von $|z| < 1$ in einem Punkte a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ treffen, der von den Randpunkten auf diesem Strahl die kleinste Entfernung von 0 hat. Für mindestens ein k ist dann*

$$|a_k| \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{4}}.$$

---

[14]) Dieser Satz findet sich, wie ich nachträglich erfuhr, bereits in einer Note von M. Lavrentieff in den C. R. **191** (1930), S. 827.

Beweis. Bilden wir $|z| < 1$ durch die Funktion $w = s(z) = z + \ldots$ auf das Gebiet G_1 ab, das entsteht, wenn wir die w-Ebene längs der n gleichwinklig verteilten Nullstrahlen vom Punkte A_k bis zum unendlich fernen Punkte aufschneiden, wo $|A_k| = \text{const.}$ für $k = 1, \ldots, n$, so ist

$$(30) \qquad |A_k| = \frac{1}{\sqrt[n]{4}}.$$

Zum Beweis darf angenommen werden, daß einer der n Strahlen die positiv-reelle Achse ist. Es sei $A_1 > 0$. Ist nun

$$w = k(z) \equiv \frac{z}{(1+z)^2} = z + \ldots,$$

so bildet die Funktion $w_1 = k(z^n) = z^n + \ldots$ den Sektor des Einheitskreises $|z| < 1$, $(k-1) \cdot \frac{2\pi}{n} < \operatorname{arc} z < k \cdot \frac{2\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ auf die w_1-Ebene ab, die längs der positiv-reellen Achse von 0 bis ∞ aufgeschnitten ist. Dabei wird der Radius $|z| < 1$, $\operatorname{arc} z = k \cdot \frac{2\pi}{n}$ $(k = 1, \ldots, n)$ auf die Strecke $0 \ldots \frac{1}{4}$ abgebildet. Durch $w_1 = k(z^n)$ wird also $|z| < 1$ auf eine n-blättrige Riemannsche Fläche mit Verzweigungspunkten in 0 und dem unendlich fernen Punkte abgebildet, deren einzelne Blätter von $\frac{1}{4}$ bis ∞ längs der reellen Achse aufgeschnitten sind. Durch $w = s(z) = \sqrt[n]{k(z^n)}^* = z + \ldots$ wird somit $|z| < 1$ auf ein Gebiet G_2 abgebildet, das aus G_1 durch Drehung um 0 entsteht. Hieraus folgt (30).

Wir schneiden nun die w-Ebene längs der n Nullstrahlen von den Punkten A_k bis zum unendlich fernen Punkte auf. Dadurch entsteht das Gebiet G_1. Wäre für alle k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ $|a_k| < \frac{1}{\sqrt[n]{4}}$, so wäre G ein Teilgebiet von G_1, da es in Bezug auf 0 sternförmig ist. Dann würde die Funktion $\eta = s^{-1}(f(z)) = z + \ldots$ $|z| < 1$ auf ein Teilgebiet von $|\eta| < 1$ abbilden. Dies ist aber unmöglich.

Wie aus dem Beweis hervorgeht, kann die Schranke nur im Falle der Identität $f(z) \equiv s(z)$ angenommen werden.

§ 3.

Ein Satz über schlichte Funktionen.

XII. Satz. *Die Funktion $w = f(z) = z + \ldots$ bilde $|z| < 1$ schlicht-regulär auf das Gebiet G ab. Dann enthält G im Innern eine Strecke, deren einer Endpunkt der Nullpunkt ist und deren Länge größer als 0,73 ist.*

B e w e i s. C sei die Bildkurve von $|z| = 0{,}64$, vermittelt von $w = f(z)$. Nach einem Satze von A. Marx[15]) wird C von jedem Nullstrahl in nur einem Punkte geschnitten. Da

$$\max_{|z|=r<1} |f(z)| \geqq r$$

ist, gibt es auf C einen Punkt a, für den $|a| \geqq 0{,}64$ ist. Wir fragen nach den Randpunkten von G, die auf dem Nullstrahl nach a liegen. c sei derjenige, der von 0 die kleinste Entfernung hat. c kann nicht im Innern von C liegen. Nach dem Marxschen Satz ist also $|c| > |a|$. Die Funktion

$$w = h(z) = \frac{c \cdot f(z)}{c - f(z)} = z + \dots \tag{31}$$

ist in $|z| < 1$ schlicht-regulär. Nach dem Koebeschen Verzerrungssatz ist also

$$\left|\frac{c \cdot f(z)}{c - f(z)}\right| \leqq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}. \tag{32}$$

Aus (32) folgt

$$\frac{|c \cdot a|}{|c - a|} \leqq \frac{0{,}64}{0{,}36^2},$$

$$|c - a| = |c| - |a| \geqq |c| \cdot |a| \cdot \frac{0{,}36^2}{0{,}64},$$

$$|c| \geqq \frac{|a|}{1 - |a| \cdot \frac{0{,}36^2}{0{,}64}}. \tag{33}$$

Da $|a| \geqq 0{,}64$ ist, folgt

$$|c| \geqq \frac{0{,}64}{1 - 0{,}64 \cdot \frac{0{,}36^2}{0{,}64}} > 0{,}73,$$

w. z. b. w.

---

[15]) A. Marx, Zwei Sätze über schlichte Funktionen. (Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1929, S. 96—100.)

(Eingegangen am 18. März 1932.)