Math. Ann. 280, 45–68 (1988)

Mathematische Annalen

Randregularität des $\bar{\partial}$-Problems für stückweise streng pseudokonvexe Gebiete in $\mathbb{C}^n$

Joachim Michel

Mathematisches Institut der Universität, Beringstrasse 4, D-5300 Bonn 1, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Für stückweise streng pseudokonvexe Gebiete in $\mathbb{C}^n$ haben Range und Siu [8] schon 1973 Hölderabschätzungen eines Lösungsoperators für die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen angegeben. C^k-Abschätzungen konnte man zuerst nur für glatt berandete Gebiete beweisen. Siu [10] und Alt [1] gaben 1974 C^k-Abschätzungen für den Henkin-Liebschen Lösungsoperator auf (0, 1)-Formen an. Durch eine Modifikation dieses Operators mittels eines Fortsetzungsoperators von Seeley [9] konnten Lieb und Range [5] 1980 $C^{k+1/2}$-Abschätzungen für allgemeine $(0,q)$-Formen beweisen. Für stückweise glatten Rand hat Brinkmann [3] 1984 $C^{k/2}$-Abschätzungen gezeigt. In dieser Arbeit soll dieses Ergebnis unter der zusätzlichen Voraussetzung einer gewissen komplexen Transversalitätsbedingung ($\tilde{\mathbb{C}}$) verbessert werden. Hierbei stützen wir uns vor allem auf die Arbeiten von Range und Siu und Lieb und Range. Zu erwähnen ist noch, daß Bertrams [2] mit ähnlichen Methoden C^k-Abschätzungen für verschiedene Lösungsoperatoren auf Polyzylindern bewiesen hat. Außerdem hat Michel [7] für die Halbkugel C^k-Abschätzungen gezeigt.

Definition stückweise streng pseudokonvexer Gebiete nach Range/Siu. Sei D ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}^n$. D hat stückweise glatten Rand, wenn folgendes gilt. Für eine offene Umgebung U des Randes bD von D sei eine offene Überdeckung $U_1, U_2, \ldots, U_N$ mit reellwertigen C^∞-Funktionen $\varrho_i\colon U_i \to \mathbb{R}$ gegeben mit:

a) $D \cap U = \{z \in U \mid \text{für } 1 \leqq i \leqq N \text{ gilt } z \notin U_i \text{ oder } \varrho_i(z) < 0\}$;

b) die Randstücke schneiden sich reell-transversal, d. h.

($\mathbb{R}$) für $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqq N$ sind die Formen $d\varrho_{i_1}, \ldots, d\varrho_{i_l}$ linear unabhängig auf $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \ldots \cap U_{i_l}$.

D heißt stückweise streng pseudokonvex, wenn alle ϱ_i zusätzlich noch streng plurisubharmonisch sind.

Komplexe Transversalitätsbedingungen

Im folgenden werden verschiedene Transversalitätsbedingungen an den Rand eine Rolle spielen. Wir wollen sie kurz diskutieren.

$(\mathbb{C})$ für $1 \leqq i_1 < \ldots < i_l \leqq N$ sind die Formen $\partial\varrho_{i_1}, \ldots, \partial\varrho_{i_l}$ komplex linear unabhängig auf $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_l}$;

$(\mathbb{C}')$ für $1 \leqq i_1 < \ldots < i_l \leqq N$ sind die Formen $\partial\varrho_{i_2}, \partial\varrho_{i_3}, \ldots, \partial\varrho_{i_l}$ komplex linear unabhängig auf $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \ldots \cap U_{i_l}$;

$(\tilde{\mathbb{C}})$ für $1 \leqq i_1 < \ldots < i_l \leqq N$, $l > 1$, sind die Formen

$$\partial\varrho_{i_1} - \partial\varrho_{i_2}, \partial\varrho_{i_1} - \partial\varrho_{i_3}, \ldots, \partial\varrho_{i_1} - \partial\varrho_{i_l}$$

komplex linear unabhängig auf $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \ldots \cap U_{i_l}$.

Offensichtlich folgt aus $(\mathbb{C})$ auch $(\mathbb{C}')$ und $(\tilde{\mathbb{C}})$. Wells [12] hat jedoch gezeigt, daß für $(\mathbb{C})$ gewisse topologische Hindernisse bestehen. So ist zum Beispiel $(\mathbb{C})$ im Fall zweier sich schneidender Kugeln nicht erfüllt. Wenn sich dahingegen in allen Randpunkten von D höchstens zwei Flächen reel transversal schneiden, dann gilt $(\mathbb{C}')$ und $(\tilde{\mathbb{C}})$. Wir bemerken, daß $(\mathbb{C})$ und $(\mathbb{C}')$ unabhängig von den definierenden Randfunktionen sind, $(\tilde{\mathbb{C}})$ dagegen nicht. Um ein hinreichendes Kriterium für $(\tilde{\mathbb{C}})$ zu haben, zeigen wir im Anhang zu Kap. 1:

Satz 1. *Sei D ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Es gelte* $(\mathbb{C}')$. *Dann kann man die definierenden Funktionen ϱ_i durch Multiplikation mit gewissen positiven Konstanten so abändern, daß* $(\tilde{\mathbb{C}})$ *gilt.*

Normen

Sei V eine offene beschränkte Menge in $\mathbb{R}^m$, $f: V \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < \lambda < 1$. $C^k(V)$ sei der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf V und $C^k(\bar{V})$ sei der Raum der in einer Umgebung von $\bar{V}$ definierbaren k-mal stetig differenzierbaren Funktionen.

$$\|f\|_{k,V} := \sup\left\{\left|\frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\right| \,\middle|\, x \in V, \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leqq k\right\},$$

$$\|f\|_{k+\lambda,V} := \|f\|_{k,V} + \sup\left\{\frac{\left|\dfrac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} - \dfrac{\partial^k f(y)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\right|}{|x-y|^\lambda} \,\middle|\, x, y \in V, \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = k\right\}.$$

Für Differentialformen auf V bilden wir die Norm aus dem Maximum der Koeffizientennormen.

Wir bezeichnen mit $C^k_{(p,q)}(W)$ mit $k, p, q \in \mathbb{N}_0$, $W \subset \mathbb{C}^n$ die Menge der k-mal stetig differenzierbaren (p,q)-Differentialformen auf W.

Satz *von Range und Siu. Sei D ein stückweise streng pseudokonvexes Gebiet. Sei für $1 \leqq q \leqq n$ $B_{0,q}(D)$ der Raum der $(0,q)$-Formen u auf D, so daß u und $\bar{\partial}u$ stetig und beschränkt auf D sind. Dann gibt es einen linearen Operator $T_q: B_{0,q}(D) \to C^0_{0,q-1}(D)$, mit:*

(i) *wenn $u \in C^k_{0,q}(D) \cap B_{0,q}(D)$, dann gilt $T_q u \in C^k_{0,q-1}(D)$,*

(ii) *$u = \bar{\partial}T_q(u) + T_{q+1}(\bar{\partial}u)$ für $u \in B_{0,q}(D)$,*

(iii) *für jedes $0 \leqq \lambda < 1/2$ gibt es eine Konstante C_λ, mit*

$$\|T_q u\|_{0+\lambda,D} \leqq C_\lambda \|u\|_{0,D}.$$

Falls D glatten Rand hat gilt (iii) *auch für $\lambda = 1/2$.*

Man beachte, daß hier u nicht als $\bar\partial$-geschlossen vorausgesetzt wird.

Satz *von Lieb und Range. Sei D ein streng pseudokonvexes Gebiet mit glattem Rand. Dann existieren für $1 \leqq q \leqq n$ lineare Operatoren $T_q^*: C_{0,q}^0(\bar D) \to C_{0,q-1}^0(D)$, mit:*

(i) *ist $f \in C_{0,q}^0(\bar D)$ mit $\bar\partial f = 0$ auf D, so gilt*

$$\bar\partial T_q^*(f) = f;$$

(ii) *es gibt eine von f unabhängige Konstante C_k, so daß für alle $f \in C_{0,q}^k(D)$ mit $\bar\partial f = 0$ gilt:*

$$\| T_q^*(f) \|_{k+1/2, D} \leqq C_k \| f \|_{k, D}.$$

Zusatz. (ii) *gilt sogar für $f \in C_{0,q}^0(\bar D) \cap C_{0,q}^k(D)$, $\bar\partial f = 0$, $\| f \|_{k,D} < \infty$.*

Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

Theorem. *Sei D ein stückweise streng pseudokonvexes Gebiet in $\mathbb{C}^n$, das der Bedingung ($\tilde{\mathbb{C}}$) genügt. Dann existieren für $1 \leqq q \leqq n$ lineare Operatoren $T_q^*: C_{0,q}^0(\bar D) \to C_{0,q-1}^0(D)$ mit:*

(i) *ist $f \in C_{0,q}^0(\bar D)$ mit $\bar\partial f = 0$ auf D, so gilt*

$$\bar\partial T_q^*(f) = f;$$

(ii) *sei $0 \leqq \lambda < 1/2$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$; es gibt dann eine von f unabhängige Konstante $C_{k,\lambda}$, so daß für alle $f \in C_{0,q}^k(\bar D)$ mit $\bar\partial f = 0$ gilt:*

$$\| T_q^*(f) \|_{k+\lambda, D} \leqq C_{k,\lambda} \| f \|_{k, D}.$$

Zusatz. (ii) *gilt auch für $f \in C_{0,q}^0(\bar D) \cap C_{0,q}^k(D)$, $\bar\partial f = 0$, $\| f \|_{k,D} < \infty$.*

Bemerkungen. a) T_q^* ist im glatten Fall mit dem Lieb/Range-Operator identisch; b) Brinkmann hat gezeigt, daß man für $n = 2$ auf die Bedingung ($\tilde{\mathbb{C}}$) verzichten kann; c) den Zusatz zum Theorem zeigt man wie den Zusatz zum Satz von Lieb und Range; wir verzichten aus Platzgründen auf den Beweis.

Im 1. Kap. werden wir die Lösungsoperatoren definieren. Im 2. Kap. beweisen wir die C^k-Abschätzungen. Dabei benutzen wir einen allgemeinen Satz, der in Kap. 3 bewiesen wird. Ferner wird im Anhang zu Kap. 2 Satz 1 bewiesen.

1. Lösungsoperatoren

Wir setzen ab jetzt immer voraus, daß D ein stückweise streng pseudokonvexes Gebiet ist, das durch die Funktionen $\varrho_i: U_i \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ definiert wird und die Bedingung ($\tilde{\mathbb{C}}$) erfüllt. Sei $I = (i_1, i_2, \ldots, i_l)$, $1 \leqq i_\nu \leqq N$ ein Tupel mit paarweise verschiedenen Elementen. Für $1 \leqq \nu \leqq l$ und $j \neq i_1, i_2, \ldots, i_l$ sei definiert:

$$I_\nu = (i_1, i_2, \ldots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \ldots, i_l), \qquad Ij = (i_1, \ldots, i_l, j).$$

Wir definieren nun wie bei Range und Siu

$$S_I = \left\{ z \in bD \cap \bigcap_{\nu=1}^{l} U_{i_\nu} \,\middle|\, \varrho_i(z) = 0 \text{ für } i \in I \right\}.$$

Dabei fassen wir S_I als Mannigfaltigkeit mit stückweise glattem Rand auf, die so orientiert ist, daß gilt:

$$bD=\sum_{i=1}^{N} S_i, \qquad bS_I=\sum_{j\notin I} S_{Ij}.$$

Hierbei ändert sich die Orientierung alternierend unter einer Permutation von I. Zu diesen und weiteren Begriffen vergleiche man auch mit Michel [6].

Sei

$$\Delta=\{\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_N)\in\mathbb{R}^{N+1}|\lambda_i\geqq 0,\ \lambda_0+\ldots+\lambda_N=1\}$$

und

$$\Delta_I=\{\lambda\in\Delta|\lambda_j=0 \text{ für } j\notin I\}.$$

Die Simplizia Δ_I können mit einer alternierenden Orientierung versehen werden, so daß gilt:

$$b\Delta_I=\sum_{\nu=1}^{l}(-1)^{\nu+1}\Delta_{I_\nu}.$$

In [8] wird gezeigt:

$$b\Big(\sum_I{}'(-1)^{|I|}S_I\times\Delta_{0I}\Big)=\sum_I{}' S_I\times\Delta_I-bD\times\Delta_0. \tag{1}$$

Hierbei wie auch im folgenden bezeichnet $\sum'$ eine Summation über Tupel I mit $1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_l\leqq N$. Die Summe von Mannigfaltigkeiten soll im Sinne einer Stokesschen Kette verstanden werden.

Für ein kleines positives ε_0 definieren wir das stückweise streng pseudokonvexe Gebiet $D_0\supset\bar{D}$ mit

$$U\cap D_0=\{z\in U|z\notin U_j \text{ oder } \varrho_j(z)<\varepsilon_0\}.$$

Zu D_0 gehören die analog definierten Randstücke S_I^0. Wir definieren für Tupel $I=(i_1,\ldots,i_l)$ mit paarweise verschiedenen Elementen die kompakten, berandeten und alternierend orientierten Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned}R_I=\{z\in\bar{D}_0\cap U_{i_1}\cap\ldots\cap U_{i_l}|0\leqq\varrho_{i_1}(z)=\ldots=\varrho_{i_l}(z)\leqq\varepsilon_0,\ \varrho_j(z)\leqq\varrho_{i_l}(z)\\ \text{für } j\notin I \text{ und } z\in U_j\}.\end{aligned}$$

Für ε_0 klein genug ist R_I kompakt. R_i habe die Orientierung von $\mathbb{C}^n$, und es gelte

$$\begin{aligned}\bar{D}_0\backslash D&=R_1+R_2+\ldots+R_N,\\ bR_I&=-\sum_{j\notin I}R_{Ij}-S_I+S_I^0.\end{aligned} \tag{2}$$

Hieraus ergibt sich durch einfach kombinatorische Überlegung analog zu Formel (1):

$$\begin{aligned}b\Big(\sum_I{}'(-1)^{|I|}R_I\times\Delta_{0I}\Big)&=-\sum_I{}' R_I\times\Delta_I+(\bar{D}_0-D)\times\Delta_0\\ &\quad+\sum_I{}'(-1)^{|I|}(S_I^0\times\Delta_{0I}-S_I\times\Delta_{0I}).\end{aligned} \tag{3}$$

Bemerkung. ($\mathfrak{C}$) sagt nun aus, daß die R_I generische Cauchy-Riemann-Mannigfaltigkeiten sind für ε_0 klein genug.

Wir wollen nun die Differentialformen definieren, die für die Konstruktion der Lösungsoperatoren gebraucht werden. Hierbei kann es notwendig sein, daß U_i oder ε_0 verkleinert werden müssen. Wir erwähnen dies nicht immer ausdrücklich.

Range und Siu konstruierten in [8] Barrierefunktionen, die wir nun verwenden wollen. In unserem Fall sind jedoch die Randfunktionen ϱ_i schon C^∞-glatt. Sei für eine Funktion ϱ

$$L\varrho(\zeta,z)=2\sum_{v=1}^{n}\frac{\partial\varrho}{\partial\zeta_v}(\zeta)(\zeta_v-z_v)-\sum_{v,\mu=1}^{n}\frac{\partial^2\varrho}{\partial\zeta_v\partial\zeta_\mu}(\zeta)(\zeta_v-z_v)(\zeta_\mu-z_\mu)$$

das Levipolynom. Aus der strengen Plurisubharmonizität von ϱ_i folgt mittels Taylorentwicklung, daß es positive Konstanten A und ε gibt, mit

$$\operatorname{Re}L\varrho_i(\zeta,z)\geqq\varrho_i(\zeta)-\varrho_i(z)+A|\zeta-z|^2 \quad \text{für} \quad \zeta,z\in U_i,\ |\zeta-z|<\varepsilon.$$

Nach Range und Siu gibt es nun Barrierefunktionen Φ_j $(j=1,\ldots,N)$ mit den Eigenschaften

a) $\Phi_j: U_j\times\bar{D}_0\to\mathbb{C}$ ist C^∞-glatt und holomorph in $z\in\bar{D}_0$,

b) $\Phi_j(\zeta,\zeta)=0$, $\Phi_j(\zeta,z)\neq0$ für $|\zeta-z|\geqq\varepsilon$,

c) $\Phi_j(\zeta,z)=H_j(\zeta,z)\cdot L\varrho_j(\zeta,z)$ für $|\zeta-z|<\varepsilon$, (4)

wobei H_j C^∞-glatt mit $0<A_1\leqq|H_j|\leqq A_2$ ist,

d) es gibt die Zerlegung

$$\Phi_j(\zeta,z)=\sum_{i=1}^{n}P_i^j(\zeta,z)(\zeta_i-z_i)$$

mit C^∞-glatten Funktionen P_i^j, die in z holomorph sind.

Die Bochner-Martinelli-Barrierefunktion sei mit $P_i^0=\bar{\zeta}_i-\bar{z}_i$:

$$\Phi_0(\zeta,z)=\sum_{i=1}^{n}P_i^0(\zeta,z)\cdot(\zeta_i-z_i)=|\zeta-z|^2.$$

Für $j=1,2,\ldots,N$ gibt es Umgebungen W_j^* von $S_j\times\bar{D}$, so daß $\Phi_j(\tilde{\zeta},\tilde{z})\neq0$ für

$$(\tilde{\zeta},\tilde{z})\in W_j=\{(\zeta,z)\in W_j^*|\varrho_j(z)\leqq\varrho_j(\zeta),\ \zeta\neq z\}$$

gilt. Für $j=0,1,\ldots,N$ definieren wir die Barriereformen auf W_j.

$$\eta_j^*(\zeta,n)\sum_{i=1}^{n}P_i^j(\zeta,z)d\zeta_i,\qquad \eta_j(\zeta,z)=\Phi_j(\zeta,z)^{-1}\eta_j^*(\zeta,z).$$

Sei $I=(i_1,\ldots,i_l)$ mit $1\leqq i_1<\ldots<i_l\leqq N$. Wir setzen

$$\eta_I(\zeta,z;\lambda)=\lambda_0\eta_0+\lambda_{i_1}\eta_{i_1}+\lambda_{i_2}\eta_{i_2}+\ldots+\lambda_{i_l}\eta_{i_l}$$

auf $(W_{i_1}\cap\ldots\cap W_{i_l})\times\Delta_{0I}$.

Im folgenden benutzen wir den Kalkül der doppelten Differentialformen wie er bei Range und Siu beschrieben worden ist. Er geht in dieser Form auf Jambon [4] zurück. Setze

$$D_{n,q}(\eta_I)=(2\pi i)^{-n}(-1)^{1/2q(q-1)}\binom{n-1}{q}\eta_I\wedge\bigwedge^{q}\bar{\partial}_z\eta_I\wedge\bigwedge^{n-q-1}\bar{d}\eta_I$$
$$\text{für}\quad 0\leqq q\leqq n-1,$$

$$D_{n,n}(\eta_I)=D_{n,-1}(\eta_I)=0.$$

Hierbei ist $\bar{d}=\bar{\partial}_\zeta+d_\lambda$.

Diese Kerne erfüllen die wichtige Gleichung (s. [6]):

$$dD_{n,q}(\eta_I)=\bar{d}D_{n,q}(\eta_I)=(-1)^q\bar{\partial}_z D_{n,q-1}(\eta_I)\,. \tag{5}$$

Wir sind nun in der Lage, den Range/Siu-Lösungsoperator definieren zu können.

Sei für $q=1,2,\ldots,n$ und $f\in C^0_{0,q}(\bar{D})$

$$T_q(f):=-\sum_I{}'(-1)^{|I|}\int_{S_I\times\Delta_{0I}} f\wedge D_{n,q-1}(\eta_I)-\int_{D\times\Delta_0} f\wedge D_{n,q-1}(\eta_0)\,.$$

Für die Definition von $T_q^*(f)$ benötigen wir den sogenannten Seeleyschen Fortsetzungsoperator. Dieser Operator, definiert in [9], wurde von Lieb und Range in [5] verwendet, um eine lineare Abbildung $E: C^0(\bar{D})\to C^0(D_0)$ mit folgenden Eigenschaften zu konstruieren $(D_0\supset\bar{D})$:

a) $\operatorname{supp} Eu\subset\subset D_0$ für alle $u\in C^0(\bar{D})$,

b) ist $u\in C^k(\bar{D})$ für $k=0,1,2,\ldots$, so gilt auch $Eu\in C^k(D_0)$, und es gibt eine von u unabhängige Konstante C_k mit $\|Eu\|_{k,D_0}\leqq C_k\|u\|_{k,D}$.

Lieb und Range taten dies unter der Voraussetzung, daß D glatten Rand hat. Sie konstruierten E zuerst lokal und verklebten dann mittels einer Partition der Eins. Es ist offensichtlich, daß dies auch in unserem Fall gelingt, da der Rand von D lokal diffeomorph zu einer „Ecke“

$$Q_s=\{x\in\mathbb{R}^{2n}|x_1\leqq 0,\ldots,x_s\leqq 0\}$$

ist. Man setze hier zuerst zu Q_{s-1} fort, dann zu Q_{s-2} und so weiter.

Sei also ein Operator E mit a und b gegeben. Auf Formen wenden wir ihn koeffizientenweise an.

Wir definieren nun für $f\in C^0_{0,1}(\bar{D})$:

$$T_1^*(f)=T_1(f)-\sum_I{}'\int_{R_I\times\Delta_I} Ef\wedge D_{n,0}(\eta_I)\,,$$

für $f\in C^0_{0,q}(\bar{D})$, $q>1$:

$$T_q^*(f)=T_q(f)+\sum_I{}'(-1)^{|I|}\int_{R_I\times\Delta_{0I}} Ef\wedge\bar{\partial}_z D_{n,q-2}(\eta_I)\,.$$

$T_q^*-T_q$ ist nach Konstruktion $\bar{\partial}$-geschlossen. Also ist T_q^* ein Lösungsoperator für die $\bar{\partial}$-Gleichung. Durch eine einfache Rechnung erhält man unter Verwendung der Formeln (3) und (5) für $f\in C^1_{0,q}(\bar{D})$:

$$T_q^*(f)=\sum_I{}'(-1)^{|I|}\int_{R_I\times\Delta_{0I}}\bar{\partial}Ef\wedge D_{n,q-1}(\eta_I)-\int_{D_0\times\Delta_0} Ef\wedge D_{n,q-1}(\eta_0)\,. \tag{6}$$

Diese Formel wurde schon von Brinkmann in [3] angegeben. Sie hat zwei sofort ersichtliche Vorteile. Erstens ist der letzte Term das Bochner-Martinelli-Integral, das sich wegen $\operatorname{supp} Ef\subset D_0$ mit bekannten Methoden abschätzen läßt; es gilt für $0\leqq\lambda<1$ und $k=0,1,2\ldots$

$$\left\|\int_{D_0\times\Delta_0} Ef\wedge D_{n,q-1}(\eta_0)\right\|_{k+\lambda,D}\leqq C'_{k,\lambda}\|Ef\|_{k,D_0}\leqq C''_{k,\lambda}\|f\|_{k,D}\,.$$

Zweitens verschwindet $\bar{\partial}Ef$ für $f\in C^k_{0,q}(\bar{D})$, $\bar{\partial}f=0$ auf D, von der Ordnung $(k-1)$ auf bD. Dies ergibt schon die $C^{k/2}$-Abschätzung von Brinkmann. Für genauere Abschätzungen müssen wir die differenzierten Integrale umformen. Dies soll im nächsten Kapitel gezeigt werden.

2. Die C^k-Abschätzungen

Die Integrale aus T_q^* werden wir solange unformen, bis wir sie direkt abschätzen können. Dabei werden wir zu einer allgemeinen Klasse von Integralen geführt, die von gewissen Parametern abhängt. Diese Klasse soll nun zuerst beschrieben werden. Wir setzen hierbei ohne Einschränkung immer voraus, daß

$$I=(i_1,\dots,i_l)=(1,2,\dots,l)$$

mit $1\leqq l\leqq n$ ist.

Sei

$$I(u,v,m,s,a_0,a_1,\dots,a_l)=\int_{R_{IH}} a^u(\zeta)\wedge\frac{\Theta_L(\zeta,z)\wedge\mathscr{E}_v(\zeta,z)}{K(a_0,a_1,\dots,a_l)(\zeta,z)}.$$

Hierbei sind $u,v,m,s,a_0,a_1,\dots,a_l$ nichtnegative ganze Zahlen, und es gilt sogar $a_1\geqq 1$, $a_2\geqq 1,\dots,a_l\geqq 1$;

$H=(l+1,\dots,l+s)$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit; $a^u(\zeta)$ symbolisiert eine u-mal stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger in D_0, so daß für eine von f unabhängige Konstante C gilt ($f\in C^k_{0,q}(\bar D)$, $\bar\partial f=0$ auf D):

$$\|a^u\|_{u,D_0}\leqq C\cdot\|Ef\|_{k,D_0},$$

weiter sei $a^u\equiv 0$ auf D für $u>0$. Als a^u werden die Ableitungen der Koeffizienten von Ef oder $\bar\partial Ef$ fungieren.

$$L=(l_1,l_2,\dots,l_m)\quad\text{mit}\quad (1\leqq l_1<l_2<\dots<l_m\leqq l,$$

$$\Theta_L=\eta^*_{l_1}\wedge\eta^*_{l_2}\wedge\dots\wedge\eta^*_{l_m};$$

$\mathscr{E}_v(\zeta,z)$ ist eine von f unabhängige C^∞-Form in ζ und z auf $\bar D\times\bar D_0$, die für $\zeta=z$ und $v>0$ von der Ordnung v verschwindet, der Bigrad von $\mathscr{E}_v$ in ζ ist $(n-m,n-l-s+1)$;

$$K(a_0,a_1,\dots,a_l)=\Phi_0^{a_0}\Phi_1^{a_1}\dots\Phi_l^{a_l}\quad\text{mit}\quad a_0\geqq 0,\ a_1\geqq 1,\dots,a_l\geqq 1.$$

Satz 2. *Sei $I(u,v,m,s,a_0,\dots,a_l)$ gegeben. Wir setzen*

$$\mu=\mu(u,v,m,s,a_0,\dots,a_l)=2(a_0+a_1+\dots+a_l)+l+s-2n-m-u-v.$$

Unter der Voraussetzung $\mu\leqq 0$ gibt es für $0<\lambda<1/2$ von f unabhängige Konstanten C_1, C_2^λ, mit

$$\|I(u,v,m,s,a_0,\dots,a_l)\|_{0,D}\leqq C_1\|Ef\|_{k,D_0},$$

$$\|I(u,v,m,s,a_0,\dots,a_l)\|_{0+\lambda,D}\leqq C_2^\lambda\|Ef\|_{k,D_0}.$$

Satz 2 werden wir im nächsten Kapitel beweisen. Für die Anwendungen ist es also wichtig, die Zahl μ zu kontrollieren.

a) Die C^0-Abschätzungen

Sei $f\in C^0_{0,q}(\bar D)$. Range und Siu haben gezeigt, daß es für jedes $0\leqq\lambda<1/2$ eine Konstante C_λ, unabhängig von f, gibt mit

$$\|T_q(f\|_{0+\lambda,D}\leqq C_\lambda\cdot\|f\|_{0,D}.$$

Bemerkung. Diese Abschätzung gilt nach Range und Siu sogar für $f \in L^\infty_{0,q}(\bar{D})$. Wir müssen jetzt also nur noch $T_q^* - T_q$ abschätzen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

α) $q=1$ und β) $q>1$.

Zu α: Es tritt eine Summe von Integralen auf des Typs

$$\int_{R_I \times \Delta_I} Ef \wedge D_{n,0}(\eta_I).$$

Wir setzen ohne Einschränkung $I=(1,2,\ldots,l)$. Integration über das Simplex Δ_I ergibt eine Summe von Integralen des Typs

$$\int_{R_I} Ef \wedge \frac{\eta_1^* \wedge \ldots \wedge \eta_l^* \wedge (\bar\partial_\zeta \eta_1^*)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (\bar\partial_\zeta \eta_l^*)^{j_l}}{\Phi_1^{1+j_1} \Phi_2^{1+j_2} \ldots \Phi_l^{1+j_l}}$$

mit $l+j_1+j_2+\ldots+j_l=n$.

Wir sehen, das ist $I(u,v,m,s,a_0,\ldots,a_l)$ mit $u=0$, $v=0$, $m=l$, $s=0$, $a_0=0$, $a_\nu=1+j_\nu$ für $\nu=1,2,\ldots,l$ und

$$\mu=2(l+j_1+\ldots+j_l)+l-2n-l=0.$$

Zu β: Der allgemeine Typ ist hier

$$\bar\partial_z \int_{R_I \times \Delta_{0I}} Ef \wedge D_{n,q-2}(\eta_I).$$

Integration über das Simplex Δ_{0I} ergibt hier eine Summe von Integralen des Typs ($I=(1,2,\ldots,l)$):

$$\bar\partial_z \int_{R_I} Ef \wedge \frac{\eta_0^* \wedge \eta_1^* \wedge \ldots \wedge \eta_l^* \wedge (\bar\partial_\zeta \eta_0^*)^{j_0} \wedge (\bar\partial_\zeta \eta_1^*)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (\bar\partial_\zeta \eta_l^*)^{j_l} \wedge (\bar\partial_z \eta_0^*)^{q-2}}{\Phi_0^{q+j_0-1} \cdot \Phi_1^{1+j_1} \cdot \Phi_2^{1+j_2} \ldots \Phi_l^{1+j_l}},$$

mit $l+q-1+j_0+j_1+\ldots+j_l=n$.

Der Operator $\bar\partial_z$ wirkt nur auf die nicht in z holomorphen Terme. Anwendung von $\bar\partial_z$ ergibt dann $I(u,v,m,s,a_0,\ldots,a_l)$ mit:

1. $u=0$, $v=0$, $m=l$, $s=0$, $a_0=q+j_0-1$, $a_\nu=1+j_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,l$, d.h.

$$\mu=2(q-1+j_0+l+j_1+\ldots+j_l)+l-2n-l=0;$$

2. $u=0$, $v=1$, $m=l-1$, $s=0$, $a_0=q+j_0-1$, $a_\nu=1+j_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,l$, d.h.

$$\mu=2(q-1+j_0+l+j_1+\ldots+j_l)+l-2n-(l-1)-1=0;$$

3. $u=0$, $v=2$, $m=l$, $s=0$, $a_0=q+j_0$, $a_\nu=1+j_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,l$, d.h.

$$\mu=2(q+j_0+l+j_1+\ldots+j_l)+l-2n-l-2=0.$$

b) Die C^1-Abschätzungen

Sei $f \in C^1_{0,q}(\bar{D})$ mit $\bar\partial f=0$ auf D. Wir verwenden (6) für T_q^*. Sei zuerst δ ein Differentialoperator der Form $\partial/\partial\bar{z}_i$ für ein $i=1,2,\ldots,n$. Das Integral, welches wir differenzieren müssen ist vom Typ

$$\int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar\partial Ef \wedge D_{n,q-1}(\eta_I).$$

Integration über Δ_{0I} ergibt eine Summe von Termen ($I=(1,2,\dots,l)$):

$$\int_{R_I} \bar\partial Ef \wedge \frac{\eta_0^* \wedge \eta_1^* \wedge \dots \wedge \eta_l^* \wedge (\bar\partial_\zeta \eta_0^*)^{j_0} \wedge (\bar\partial_\zeta \eta_1^*)^{j_1} \wedge \dots \wedge (\bar\partial \eta_l^*)^{j_l} \wedge (\bar\partial_z \eta_0^*)^{q-1}}{\Phi_0^{q+j_0} \cdot \Phi_1^{1+j_1} \dots \Phi_l^{1+j_l}},$$

mit $l+q+j_0+j_1+\dots+j_l=n$.

Wir wollen nun δ auf den Kern dieses Integrals anwenden. Dabei werden nur die in z nichtholomorphen Terme differenziert. Wir betrachten deshalb eine etwas allgemeinere Situation. Sei δ entweder wie oben definiert oder von der Form $\delta=\frac{\partial}{\partial z_i}+\frac{\partial}{\partial \zeta_i}$. Nun gilt immer $\delta\Phi_j=\mathscr{E}_1$. Anwendung von δ auf den Kern des obigen Integrals ergibt $I(u,v,m,s,a_0,a_1,\dots,a_l)$ mit:

1. $u=0$, $v=0$, $m=l$, $s=0$, $a_0=q+j_0$, $a_\nu=1+j_\nu$, $\nu=1,\dots,l$, d.h. $\mu=0$;
2. $u=0$, $v=1$, $m=l-1$, $s=0$, $a_0=q+j_0$, $a_\nu=1+j_\nu$, $\nu=1,\dots,l$, d.h. $\mu=0$;
3. $u=0$, $v=2$, $m=l$, $s=0$, $a_0+a_1+\dots+a_l=n+1$, d.h. $\mu=0$.

Sei nun $\delta=\partial/\partial z_i$, $i=1,2,\dots,n$. Es dürfte aus den bisherigen Rechnungen klargeworden sein, daß direktes Anwenden von δ auf die Integrale Terme mit $\mu=1$ ergibt. Wir müssen also umformen. Dabei ist es von Vorteil, den Operator T_q' als Ganzes zu betrachten, mit

$$T_q'(f)=\sum_I{}'(-1)^{|I|} \int_{R_I\times\Delta_{0I}} \bar\partial Ef \wedge D_{n,q-1}(\eta_I).$$

Wir bezeichnen mit $\frac{\partial}{\partial\zeta_i} \lrcorner$ die innere Multiplikation, wie sie zum Beispiel in [11] definiert wurde. Bei der nun folgenden Umwandlung ist zu beachten, daß $D_{n,q-1}(\eta_I)$ immer $\omega(\zeta)=d\zeta_1\wedge d\zeta_2\wedge\dots\wedge d\zeta_n$ als Faktor enthält. Für den Satz von Stokes verwenden wir (3) und (5). Es gilt nun

$$\delta T_q'(f)=\sum_I{}'(-1)^{|I|} \int_{R_I\times\Delta_{0I}} \bar\partial Ef \wedge \left(\frac{\partial}{\partial z_i}+\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\right) D_{n,q-1}(\eta_I)$$
$$-\sum_I{}'(-1)^{|I|} \int_{R_I\times\Delta_{0I}} \bar\partial Ef \wedge \frac{\partial}{\partial\zeta_i} D_{n,q-1}(\eta_I).$$

Die erste Summe können wir nach den obigen Überlegungen schon abschätzen. Die zweite Summe, wir nennen sie X, formen wir weiter um. Sei $d=d_\zeta+d_\lambda$ das totale Differential.

$$X=\sum_I{}'(-1)^{|I|} \int_{R_I\times\Delta_{0I}} dEf \wedge d\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_i} \lrcorner D_{n,q-1}(\eta_I)\right)$$
$$-\sum_I{}'(-1)^{|I|} \int_{R_I\times\Delta_{0I}} dEf \wedge (\bar\partial_\zeta+d_\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_i} \lrcorner D_{n,q-1}(\eta_I)\right).$$

Die erste Summe nennen wir X_1, die zweite X_2. Es gilt nach dem Satz von Stokes und (3):

$$\begin{aligned} X_1 = (-1)^{q+1} \Big\{ & -\sum_I' \int_{R_I \times \Delta_I} dEf \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner D_{n,q-1}(\eta_I) \right) \\ & + \int_{(D_0 \setminus \bar{D}) \times \Delta_0} dEf \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner D_{n,q-1}(\eta_0) \right) \\ & - \sum_I' (-1)^{|I|} \int_{S_I \times \Delta_{0I}} dEf \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner D_{n,q-1}(\eta_I) \right) \\ = (-1)^{q+1} & \{ -X_{11} + X_{12} - X_{13} \}. \end{aligned}$$

Wegen $\bar{\partial} Ef = 0$ auf $\bar{D}$ gilt:

$$X_{13} = (-1)^q \sum_I' (-1)^{|I|} \int_{S_I \times \Delta_{0I}} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_i} \wedge D_{n,q-1}(\eta_I) = (-1)^q \tilde{X}_{13}.$$

Aus Dimensionsgründen gilt:

$$X_{12} = (-1)^q \int_{(D_0 \setminus \bar{D}) \times \Delta_0} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_i} \wedge D_{n,q-1}(\eta_0) = (-1)^q \tilde{X}_{12},$$

$$\begin{aligned} X_{11} = & \sum_I' \int_{R_I \times \Delta_I} \bar{\partial} Ef \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner D_{n,q-1}(\eta_I) \right) \\ & + (-1)^q \sum_I' \int_{R_I \times \Delta_I} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_i} \wedge D_{n,q-1}(\eta_I) \\ = & X_{111} + (-1)^q X_{112}. \end{aligned}$$

Nun zu X_2. Man überzeugt sich leicht, daß gilt:

$$(\bar{\partial}_\zeta + d_\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner D_{n,q-1}(\eta_I) \right) = -\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner (\bar{\partial}_\zeta + d_\lambda) D_{n,q-1}(\eta_I).$$

Nach (5) hat man dann

$$\begin{aligned} X_2 = & (-1)^{q+1} \sum_I' (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_i} \wedge (-1)^{q-1} \bar{\partial}_z D_{n,q-2}(\eta_I) \\ & + (-1)^q \sum_I' (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar{\partial} Ef \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner \bar{\partial}_z D_{n,q-2}(\eta_I) \right) \\ = & X_{21} + (-1)^q X_{22}. \end{aligned}$$

$\tilde{X}_{13}$ wurde schon bei Range und Siu behandelt. $\tilde{X}_{12}$ ist das bekannte Bochner-Martinelli-Integral. Dies ist sogar abschätzbar mit jedem Hölderkoeffizienten $\lambda < 1$.

X_{112} ist identisch Null für $q > 1$. Für $q = 1$ wurde X_{112} schon bei den C^0-Abschätzungen behandelt. Für $q = 1$ verschwindet X_{21}. Für $q > 1$ wurde X_{21} ebenfalls schon bei den C^0-Abschätzungen behandelt.

Es bleiben also nur noch X_{111} und X_{22} übrig. X_{111} verschwindet außer für $q = 1$, X_{22} verschwindet für $q = 1$. Diese Integrale sind nicht vom Typ

$I(u,v,m,s,a_0,\ldots,a_l)$, da $\Theta_L \wedge \mathscr{E}_\nu(\zeta,z)$ hier nicht den ζ-Grad $(n,n-l-s+1)$, sondern den ζ-Grad $(n-1,n-l-s+2)$ hat.

Wir betrachten deshalb eine allgemeine Situation, nämlich

$$\int_{R_{IH}} a^u \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner \frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_\nu(\zeta,z)}{K(a_0,a_1,\ldots,a_l)}\right)$$

wobei $\mathscr{E}_\nu$ den ζ-Grad $(n-m,n-l-s+2)$ hat.

Sonst sind die Bezeichnungen wie bei $I(u,v,m,s,a_0,\ldots,a_l)$ zu Beginn dieses Kapitels. Unser Ziel ist es nun, das obige Integral in eine Summe von Integralen des Typs $I(u,v,m,s,a_0,\ldots,a_l)$ zu verwandeln. Dabei werden wir die Eigenschaft, daß R_{IH} generische Cauchy-Riemann-Mannigfaltigkeit ist, ganz wesentlich verwenden.

Durch eine Partition der Eins können wir uns auf eine beliebig kleine Umgebung U eines Punktes $\zeta_0 \in R_{IH}$ beschränken.

Sei hier ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit

$$IH=(1,2,\ldots,l,l+1,\ldots,l+s)=(1,2,\ldots,p), \qquad p \geqq 2.$$

Setze $r_1=\varrho_2-\varrho_1$, $r_2=\varrho_3-\varrho_1,\ldots,r_{p-1}=\varrho_p-\varrho_1$.

Es gilt folglich auf R_{IH}: $\partial r_1 \wedge \partial r_2 \wedge \ldots \wedge \partial r_{p-1} \neq 0$.

Nun sei ohne Einschränkung

$$\mathscr{E}_\nu(\zeta,z)=A(\zeta,z)\cdot\tilde{\omega}\wedge\bar{\omega}',$$

hier ist A eine C^∞-Funktion auf $U\times\bar{D}$ mit Träger in U bezüglich ζ, $\tilde{\omega}=d\zeta_{j_1}\wedge d\zeta_{j_2}\wedge\ldots\wedge d\zeta_{j_{n-m}}$,

$$\bar{\omega}'=d\bar{\zeta}_{h_1}\wedge d\bar{\zeta}_{h_2}\wedge\ldots\wedge d\bar{\zeta}_{h_\tau}, \text{ mit } \tau=n-l-s+2=n-p+2.$$

Wir betrachten also

$$\int_{R_{IH}\cap U} a^u\cdot\frac{A}{K}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\lrcorner\,\Theta_L\wedge\tilde{\omega}\right)\wedge\bar{\omega}'.$$

Ist U klein genug, dann gibt es eine Matrix $(a_\nu^\mu)_{\mu=1,\ldots,p-1}^{\nu=1,\ldots,n}$ mit dem Rang $(p-1)$, so daß auf U gilt:

$$dr_\mu=\partial r_\mu+\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^\mu d\bar{\zeta}_\nu, \qquad \mu=1,2,\ldots,p-1.$$

Weiter kann man annehmen, daß man das Gleichungssystem nach gewissen $d\bar{\zeta}_{\nu_\alpha}$ mit $\alpha=1,2,\ldots,p-1$ auflösen kann:

$$d\bar{\zeta}_{\nu_\alpha}=\sum A_\mu^\alpha dr_\mu+\sum B_\mu^\alpha\partial r_\mu+\sum C_\mu^\alpha d\bar{\zeta}_\mu,$$

hier läuft μ in der ersten und zweiten Summe von 1 bis $(p-1)$; und in der dritten Summe läuft μ von 1 bis n ausschließlich der Werte $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{p-1}$. $A_\mu^\alpha, B_\mu^\alpha, C_\mu^\alpha$ sind C^∞-Funktionen auf $\bar{U}\times\bar{D}$.

Wir ersetzen nun in $\bar{\omega}'$ die eventuell vorkommenden $d\bar{\zeta}_{\nu_\alpha}$ durch obige Darstellung. $\bar{\omega}'$ verwandelt sich dadurch in eine Summe von drei verschiedenen Typen von Differentialformen: $\bar{\omega}'=\omega_1+\omega_2+\omega_3$.

Hierbei gilt: ω_1 enthält ein dr_μ als Faktor. Folglich verschwindet ω_1 bei Einschränkung auf R_{IH}.

ω_2 enthält kein dr_μ, aber ein ∂r_μ als Faktor. Dann gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_i} \lrcorner (\Theta_L \wedge \tilde{\omega})\right) \wedge \partial r_\mu = \pm \frac{\partial r_\mu}{\partial \zeta_i} \cdot \Theta_L \wedge \tilde{\omega}.$$

ω_3 enthält weder ein dr_μ noch ein ∂r_μ als Faktor. Dann ist ω_3 eine $(o, n-p+2)$-Form, die aus $d\bar{\zeta}_\mu$ mit $\mu \neq v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$ gebildet ist. ω_3 verschwindet also identisch. Wir haben unser Integral also in eine Summe von Integralen vom Typ $I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$ verwandelt.

Wir behandeln nun X_{111} und X_{22}.

Zu X_{111}: Der allgemeine Term hat nach Integration über Δ_I die Form $(q=1)$

$$\int_{R_I} \bar{\partial} Ef \wedge \left(\frac{\partial}{\partial\zeta_i} \lrcorner \frac{\eta_1^* \wedge \ldots \wedge \eta_l^* \wedge (\bar{\partial}_\zeta \eta_1^*)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (\bar{\partial}_\zeta \eta_l^*)^{j_l}}{\Phi_1^{1+j_1} \cdot \Phi_2^{1+j_2} \ldots \Phi_l^{1+j_l}}\right)$$

mit $l + j_1 + \ldots + j_l = n$.

Dies ist gerade vom eben beschriebenen Typ. Durch Verwandlung erhalten wir $I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$ mit $u=0$, $v=0$, $m=l$, $s=0$, $a_0=0$, $a_v = 1 + j_v$, $v = 1, \ldots, l$, d.h. $\mu = 0$.

Zu X_{22}: Nach Integration über Δ_{0I} erhalten wir

$$\int_{R_I} \bar{\partial} Ef \wedge \left(\frac{\partial}{\partial\zeta_i} \lrcorner \bar{\partial}_z R\right),$$

mit

$$R = \frac{\eta_0^* \wedge \eta_1^* \wedge \ldots \wedge \eta_l^* \wedge (\bar{\partial}_\zeta \eta_0^*)^{j_0} \wedge (\bar{\partial}_\zeta \eta_1^*)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (\bar{\partial}_\zeta \eta_l^*)^{j_l} \wedge (\bar{\partial}_z \eta_0^*)^{q-2}}{\Phi_0^{q+j_0-1} \cdot \Phi_1^{1+j_1} \ldots \Phi_l^{1+j_l}}$$

mit $q - 1 + l + j_0 + j_1 + \ldots + j_l = n$.

Differenziert man nach $\bar{\partial}_z$ und verwandelt in den Typ $I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$ erhält man $\mu = 0$, wie schon zu Beginn des Abschnitts b berechnet wurde.

c) Die C^k-Abschätzungen für $k > 1$

Wir müssen die Berechnungen aus dem letzten Abschnitt vervollständigen.

$$X = X_1 - X_2 = (-1)^q X_{111} + X_{112} - \tilde{X}_{12} + \tilde{X}_{13} - X_{21} + (-1)^{q+1} X_{22}.$$

Setze

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_q^i\left(\frac{\partial Ef}{\partial\zeta_i}\right) &= T_q\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta_i}\right) \\
&\quad - \sum_I{}' \int_{R_I \times \Delta_I} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_i} \wedge D_{n,q-1}(\eta_I) + \sum_I{}' (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_I} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_i} \wedge \bar{\partial}_z D_{n,q-2}(\eta_I) \\
&= -\tilde{X}_{13} - \int_{D \times \Delta_0} f \wedge D_{n,q-1}(\eta_0) - X_{112} + X_{21}.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:

$$X = -\tilde{T}_q^i\left(\frac{\partial Ef}{\partial\zeta_i}\right) - \int_{D_0 \times \Delta_0} \frac{\partial Ef}{\partial \zeta_i} \wedge D_{n,q-1}(\eta_0) + (-1)^q (X_{111} - X_{22}).$$

Wir setzen

$$Y^i = \sum_I{}' (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar{\partial} E f \wedge \left(\frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{\partial}{\partial \zeta_i}\right) D_{n,q-1}(\eta_I).$$

Es gilt also zusammengefaßt:

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(T_q'(f)) = Y^i + \tilde{T}_q^i\left(\frac{\partial E f}{\partial \zeta_i}\right) + \int_{D_0 \times \Delta_0} \frac{\partial E f}{\partial \zeta_i} \wedge D_{n,q-1}(\eta_0)$$
$$+(-1)^q (X_{22} - X_{111}). \tag{7}$$

Sei nun $f \in C^k_{0,q}(\bar{D})$ mit $\bar{\partial} f = 0$ auf D und $k > 1$.

Wir werden die C^k-Abschätzungen mit vollständiger Induktion über k beweisen. Seien also die C^k-Abschätzungen für $g \in C^r_{0,q}(\bar{D})$, $r < k$, $\bar{\partial} g = 0$ auf D schon bewiesen.

Sei ein Differentialoperator

$$\vartheta = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{i_s}} \circ \dots \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{i_{r+1}}}\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial z_{i_r}} \circ \dots \circ \frac{\partial}{\partial z_{i_1}}\right)$$

gegeben, mit $s \leqq k$. Für $s < k$ folgen die Abschätzungen nach Induktionsvoraussetzung. Sei also $s = k$. Den Fall $r = 0$ können wir so einsehen. Da $\bar{\partial} E f$ vom Typ a^{k-1} ist, so ist

$$\int_{R_I \times \Delta_{0I}} \bar{\partial} E f \wedge D_{n,q-1}(\eta_I)$$

nach Integration über Δ_{0I} eine Summe von Termen $I(u, v, m, s, a_0, \dots, a_l)$ mit $u = k-1$, $v = 1$, $m = l$, $s = 0$, $a_0 + a_1 + \dots + a_l = n$, d. h. $\mu = -k$.

Man überzeugt sich leicht, daß Differentiation nach $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$ μ um höchstens 1 erhöht. Daraus folgt nach k Ableitungen $\mu \leqq 0$.

Sei also $r > 0$. Wir setzen $i_1 = i$ und erhalten nach Formel (7)

$$\frac{\partial}{\partial z_i} T_q'(f) = T_q^*\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\right) + \left\{\tilde{T}_q^i\left(\frac{\partial E f}{\partial \zeta_i}\right) - T_q^*\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\right)\right\}$$
$$+ \int_{D_0 \times \Delta_0} \frac{\partial E f}{\partial \zeta_i} \wedge D_{n,q-1}(\eta_0) + (-1)^q (X_{22} - X_{111}) + Y^i.$$

Die Abschätzungen für $T_q^*\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\right)$ folgen aus der Induktionsvoraussetzung. Die Abschätzungen für den Bochner-Martinelli-Term sind bekannt.

$$\tilde{T}_q^i\left(\frac{\partial E f}{\partial \zeta_i}\right) - T_q^*\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\right) = -\sum_I{}' \int_{R_I \times \Delta_I} \left(\frac{\partial E f}{\partial \zeta_i} - E\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\right)\right) \wedge D_{n,q-1}(\eta_I)$$
$$+ \sum_I{}' (-1)^{|I|} \int_{R_I \times \Delta_{0I}} \left(\frac{\partial E f}{\partial \zeta_i} - E\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\right)\right) \wedge \bar{\partial}_z D_{n,q-2}(\eta_I).$$

$\frac{\partial E f}{\partial \zeta_i} - E\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\right)$ ist vom Typ a^{k-1}. Man sieht nach Integration über Δ_I, bzw. Δ_{0I} leicht, daß man eine Summe von Integralen vom Typ $I(k-1, v, l, 0, a_0, \dots, a_l)$ mit

$\mu \leqq 1-k$ erhält. Ebenfalls erhält man aus Y^i den Typ $I(k-1, v, l, 0, a_0, \ldots, a_l)$ mit $\mu \leqq 1-k$. Bei X_{22} und X_{111} muß man erst nach der in Abschnitt 2b beschriebenen Methode verwandeln und erhält dann die Typen $I(k-1, v, l, 0, a_0, \ldots, a_l)$ mit $\mu \leqq 1-k$. Es muß also noch untersucht werden, wie ein Differentialoperator der Ordnung $(k-1)$ auf einen Term $I(k-1, v, l, 0, a_0, \ldots, a_l)$ mit $\mu \leqq 1-k$ wirkt.

Wie schon gesagt wurde, erhöht die Anwendung von $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ auf diesen Term μ um höchstens 1. Direkte Anwendung von $\frac{\partial}{\partial z_j}$ würde aber μ um 2 vergrößern. Deshalb müssen wir ein Umwandlungsverfahren finden, das $\frac{\partial}{\partial z_i} I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$ in eine Summe von Integralen $I(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{m}, \tilde{s}, \tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_l)$ ausdrückt, wobei sich μ um höchstens 1 vergrößert hat.

Sei also $Z = I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$ gegeben mit $u \geqq 1$. Wir berechnen [sei wieder ohne Einschränkung $I = (1, \ldots, l)$]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_i} Z &= \int_{R_{IH}} a^u \wedge \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{\Theta_L(\zeta, z) \wedge \mathscr{E}_v(\zeta, z)}{K(a_0, \ldots, a_l)}\right) \\
&= \int_{R_{IH}} a^u \wedge \left(\frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{\partial}{\partial \zeta_i}\right)\left(\frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, \ldots, a_l)}\right) \\
&\quad - \int_{R_{IH}} a^u \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta_i}\left(\frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, \ldots, a_l)}\right).
\end{aligned}$$

Beim ersten Integral erhöht sich μ um höchstens 1. Das zweite Integral formen wir, da $\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v$ $(n, n-s-l+1)$-Form in ζ ist, um in

$$\begin{aligned}
&\int_{R_{IH}} a^u \wedge d_\zeta\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner \frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, \ldots, a_l)}\right) \\
&\quad - \int_{R_{IH}} a^u \wedge \bar{\partial}_\zeta\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner \frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, \ldots, a_l)}\right).
\end{aligned}$$

Beim zweiten Integral vertauschen wir $\bar{\partial}_\zeta$ und $\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner\right)$ und verwandeln dann wie in Abschnitt 2b. Auf das erste Integral wenden wir den Satz von Stokes an und erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_{R_{IH}} \frac{\partial a^u}{\partial \zeta_i} \wedge \frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, \ldots, a_l)} + \int_{R_{IH}} \bar{\partial} a^u \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner \frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, \ldots, a_l)}\right) \\
&\quad + \int_{bR_{IH}} a^u \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner \frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, \ldots, a_l)}\right).
\end{aligned}$$

Im ersten Integral hat sich u um 1 vermindert und damit μ um 1 erhöht. Im 2. Integral müssen wir erst nach Abschnitt 2b verwandeln. Dann gilt dasselbe wie für das erste Integral. Für das 3. Integral verwenden wir die Formel (2). a^u verschwindet nach Voraussetzung auf S_{IH} und S^0_{IH}.

Also ist das 3. Integral

$$\sum_{j \notin IH} \int_{R_{IHj}} a^u \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \lrcorner \frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, \ldots, a_l)}\right).$$

Hier hat sich s um 1 erhöht. Nach Verwandlung entsprechend Abschnitt 2b erhalten wir, daß sich μ um 1 erhöht hat.

Wir bemerken, daß sich bei der ganzen Umformung u um höchstens 1 vermindert hat. Wir können das Verfahren also mindestens $(k-1)$-mal anwenden. Damit sind die C^k-Abschätzungen, bis auf Satz 2, bewiesen.

Anhang: *Beweis zu Satz 1*

Sei ein Gebiet D mit $(\mathbb{C}')$ gegeben. Wir setzen für jede natürliche Zahl n:

$$\tilde{\varrho}_1 = \varrho_1, \quad \tilde{\varrho}_2 = n\varrho_2, \ldots, \tilde{\varrho}_N = n^{N-1}\varrho_N.$$

Wir werden einen Widerspruchsbeweis führen.

Annahme: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $I_n = (i_1, i_2, \ldots, i_{l_n})$, $l_n > 1$, $i_1 < i_2 < \ldots < \ldots < i_{l_n}$, und gibt es $\zeta_n \in S_{I_n}$, so daß

$$\{\partial\tilde{\varrho}_{i_1}(\zeta_n) - \partial\tilde{\varrho}_{i_2}(\zeta_n), \ldots, \partial\tilde{\varrho}_{i_1}(\zeta_n) - \partial\tilde{\varrho}_{i_{l_n}}(\zeta_n)\}$$

komplex linear abhängig ist. Dann gibt es eine Teilfolge n_j, $j = 1, 2, \ldots$, so daß $I_{n_j} = I = (i_1, \ldots, i_l)$ konstant ist. Sei M_I die Menge der Punkte ζ aus S_I, in welchen $\{\partial\varrho_{i_1}(\zeta), \partial\varrho_{i_2}(\zeta), \ldots, \partial\varrho_{i_l}(\zeta)\}$ komplex linear abhängig ist.

Aus $(\mathbb{C}')$ folgt, daß es auf M_I eindeutig bestimmte stetige Funktionen $a_2(\zeta), \ldots, a_l(\zeta)$ gibt, mit:

$$\partial\varrho_{i_1}(\zeta) = a_2(\zeta)\partial\varrho_{i_2}(\zeta) + \ldots + a_l(\zeta)\partial\varrho_{i_l}(\zeta).$$

Da offenbar ζ_{n_j} Elemente von M_I sind, gilt:

$$\partial\tilde{\varrho}_{i_1}(\zeta_{n_j}) = \frac{a_2(\zeta_{n_j})}{n_j^{i_2 - i_1}}\partial\tilde{\varrho}_{i_2}(\zeta_{n_j}) + \ldots + \frac{a_l(\zeta_{n_j})}{n_j^{i_l - i_1}}\partial\tilde{\varrho}_{i_l}(\zeta_{n_j}).$$

Da die Bedingung $(\tilde{\mathbb{C}})$ in ζ_{n_j} verletzt ist, muß gelten

$$\frac{a_2(\zeta_{n_j})}{n_j^{i_2 - i_1}} + \frac{a_3(\zeta_{n_j})}{n_j^{i_3 - i_1}} + \ldots + \frac{a_l(\zeta_{n_j})}{n_j^{i_l - i_1}} = 1.$$

Da $\{a_\nu(\zeta_{n_j}) | \nu = 2, \ldots, l, j = 1, 2, \ldots\}$ beschränkt ist, folgt ein Widerspruch, wenn n gegen ∞ strebt.

3. Beweis von Satz 2

Wir beweisen nun Satz 2. Hierbei wird es vor allem auf die richtige Wahl der Koordinaten ankommen. Dabei muß das Verfahren von Range/Siu verallgemeinert werden.

Sei

$$I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l) = \int_{R_{IH}} a^u(\zeta) \cdot \frac{\Theta_L(\zeta, z) \wedge \mathscr{E}_v(\zeta, z)}{K(a_0, a_1, \ldots, a_l)},$$

mit $\mu \leqq 0$ gegeben. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $I = (1, 2, \ldots, l)$, $H = (l+1, \ldots, l+s)$, $L = (1, 2, \ldots, m)$. Es gilt $L \subset I \subset IH$.

Um im folgenden nicht immer die Bezeichnung der Konstanten verändern zu müssen, sei mit C eine positive Konstante bezeichnet, die unabhängig von f ist, sich aber von Abschätzung zu Abschätzung verändern kann.

Unser Ziel ist es nun, $I=I(u,v,m,s,a_0,\ldots,a_l)$ durch die C^k-Norm von Ef abzuschätzen. Sei $d(z)=\operatorname{dist}(z,bD)$ und δ ein Differentialoperator der Form $\partial/\partial z_i$ oder $\partial/\partial \bar z_i$. Wir müssen dann die folgenden zwei Abschätzungen zeigen:

A) $$|I(z)|\leqq C\cdot\|Ef\|_{k,D_0} \quad \text{für} \quad z\in D,$$

B) für jedes $1/2<\lambda<1$ gibt es eine Konstante C_λ unabhängig von f mit

$$|\delta I(z)|\leqq C_\lambda\cdot d(z)^{-\lambda}\cdot\|Ef\|_{k,D_0} \quad \text{für} \quad z\in D.$$

Es ist klar, daß wir uns bei den Abschätzungen auf eine Umgebung $U=U(\zeta_0)$ für $\zeta_0\in S_{IH}$ beschränken können, das heißt für $z\in U$ und den Integrationsbereich $R_{IH}\cap U$. Dabei kann es vorkommen, ohne daß wir es ausdrücklich erwähnen, daß U verkleinert werden muß.

Sei $a^u(\zeta)$ gegeben. Aus der Taylorentwicklung in $z\in D$ ergibt sich mit einer von z und f unabhängigen Konstanten C

$$|a^u(\zeta)|\leqq C\cdot|\zeta-z|^u\cdot\|Ef\|_{k,D_0}.$$

Wir führen nun auf $U(\zeta_0)$ „Koordinaten“ ein, die an die Mannigfaltigkeit R_{IH} angepaßt sind. Es gilt nach Konstruktion der Barrierefunktionen für ζ, $z\in U(\zeta_0)$ und $i=1,2,\ldots,l$:

$$\Phi_i(\zeta,z)=H_i(\zeta,z)\cdot L\varrho_i(\zeta,z),$$

$$P^i_v(\zeta,z)=H_i(z,z)\frac{\partial\varrho_i(\zeta)}{\partial\zeta_v}+\mathscr{E}_1(\zeta,z), \qquad v=1,\ldots,n,$$

$$\operatorname{Re}L\varrho_i(\zeta,z)\geqq\varrho_i(\zeta)-\varrho_i(z)+A|\zeta-z|^2,$$

$$|\Phi_i(\zeta,z)|\geqq A_1|L\varrho_i(\zeta,z)|\geqq A_1'(|\operatorname{Im}L\varrho_i(\zeta,z)|+\operatorname{Re}L\varrho_i(\zeta,z)|).$$

Eine erste Folgerung daraus ist für $L=(1,2,\ldots,m)$:

$$\Theta_L(\zeta,z)=\sum_{1\leqq j_1<\ldots<j_p\leqq m}\mathscr{E}_{m-p}(\zeta,z)\partial\varrho_{j_1}(\zeta)\wedge\partial\varrho_{j_2}(\zeta)\wedge\ldots\wedge\partial\varrho_{j_p}(\zeta), \tag{8}$$

wobei $\mathscr{E}_{m-p}$ den ζ-Grad $(m-p,0)$ hat.

Setze $\tilde l=l+s$. Sei nun $z\in U(\zeta_0)$ fest. Wir wählen auf $U(\zeta_0)$ Koordinaten

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_{2n})=(x_1,x_2,\ldots,x_{2n-\tilde l},\varrho_1(\zeta)-\varrho_1(z),$$
$$\varrho_2(\zeta)-\varrho_1(\zeta),\ldots,\varrho_{\tilde l}(\zeta)-\varrho_1(\zeta)).$$

Setze $x'=(x_1,\ldots,x_{2n-\tilde l})$, $t=\varrho_1(\zeta)$, $x''=(x_{2n-\tilde l+2},\ldots,x_{2n})$. $R_{IH}\cap U$ liegt dann in der Menge, die durch $x''=0$ und $t\geqq0$ definiert wird. Es gelte zusätzlich

$$z=(y_1,\ldots,y_{2n})=(0,\ldots,0,\varrho_2(z)-\varrho_1(z),\ldots,\varrho_{\tilde l}(z)-\varrho_1(z)),$$

das heißt,

$$y'=0, \qquad y_{2n-\tilde l+1}=0.$$

Wir setzen $u_i(\zeta)=u_i(\zeta,z)=\operatorname{Im} L\varrho_i(\zeta,z)$ für $i=1,2,\ldots,l$, und entwickeln $u_i(\zeta)$ in eine Taylorreihe mit Mittelpunkt z:

$$u_i(\zeta)=\sum_{\nu=1}^{2n} d_{i\nu}(z)(x_\nu-y_\nu)+\sum_{\mu,\nu=1}^{2n} d_{i\mu\nu}(z)(x_\mu-y_\mu)(x_\nu-y_\nu)+\mathscr{E}_3(\zeta,z).$$

Setze

$$p_i(x,y)=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 2n-\tilde{l}+1}}^{2n} d_{i\nu}(z)(x_\nu-y_\nu)+\sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu,\nu\neq 2n-\tilde{l}+1}}^{2n} d_{i\mu\nu}(z)(x_\mu-y_\mu)(x_\nu-y_\nu),$$

$$q_i(x,y)=p_i(x,y)+d_{i,\,2n-\tilde{l}+1}(z)(t-\varrho_1(z)).$$

Es gilt dann

$$u_i(\zeta)=p_i(x,y)+d_{i,\,2n-\tilde{l}+1}(z)(t-\varrho_1(z))+(t-\varrho_1(z))\mathscr{E}_1(\zeta,z)+\mathscr{E}_3(\zeta,z)$$

und folglich

$$d_\zeta u_i(\zeta)=d_x p_i(x,y)+d_{i,\,2n-\tilde{l}+1}(z)dt+\mathscr{E}_1(\zeta,z).$$

Für $\zeta\in R_{IH}$ hängt p_i nur von x' ab und es gilt $dt=d\varrho_1=d\varrho_2=\ldots=d\varrho_{\tilde{l}}$. Daraus folgt auf R_{IH}:

$$d_\zeta L\varrho_i(\zeta,z)=2\partial\varrho_i(\zeta)+\mathscr{E}_1(\zeta,z),$$

$$d_\zeta\overline{L\varrho_i(\zeta,z)}=2\bar{\partial}\varrho_i(\zeta)+\mathscr{E}_1(\zeta,z)=2dt-2\partial\varrho_i(\zeta)+\mathscr{E}_1(\zeta,z);$$

$$d_\zeta u_i(\zeta)=-\sqrt{-1}(2\partial\varrho_i(\zeta)-dt)+\mathscr{E}_1(\zeta,z)$$

oder

$$\partial\varrho_j(\zeta)=\frac{i}{2}d_\zeta u_j(\zeta)+\tfrac{1}{2}dt+\mathscr{E}_1(\zeta,z)$$

$$=\frac{i}{2}d_x p_j(x,y)+(\tfrac{1}{2}+d_{j,\,2n-\tilde{l}+1}(z))dt+\mathscr{E}_1(\zeta,z)$$

für $i=\sqrt{-1}$, $j=1,2,\ldots,l$.

Der Zählerterm des Integranden von $I(u,v,m,s,a_0,\ldots,a_l)$ ist

$$(\Theta_L\wedge\mathscr{E}_v)(\zeta,z)=\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_p\leq m}\mathscr{E}_{v+m-p}(\zeta,z)\wedge\partial\varrho_{j_1}(\zeta)\wedge\ldots\wedge\partial\varrho_{j_p}(\zeta).$$

Setzen wir die Darstellung für $\partial\varrho_j$ in die Summanden ein, so erhalten wir

$$\partial\varrho_{j_1}\wedge\ldots\wedge\partial\varrho_{j_p}=\sum_{(m_1,\ldots,m_r)\subset(j_1,\ldots,j_p)}\mathscr{E}_{p-r}\wedge\sum_{\nu=1}^{r}\left(\frac{i}{2}d_x p_{m_\nu}+\tfrac{1}{2}d_{m_\nu,\,2n-\tilde{l}+1}(z)dt\right)$$

$$=\sum_{(m_1,\ldots,m_r)\subset(j_1,\ldots,j_p)}\mathscr{E}_{p-r}\wedge d_x p_{m_1}\wedge\ldots\wedge d_x p_{m_r}$$

$$+\sum_{\substack{(m_1,\ldots,m_r)\subset(j_1,\ldots,j_p)\\ r<p}}\mathscr{E}_{p-r-1}\wedge dt\wedge d_x p_{m_1}\wedge\ldots\wedge d_x p_{m_r}.$$

Multiplizieren wir diese Darstellung mit $\mathscr{E}_{v+m-p}$, so erhalten wir wieder zwei ähnliche Summen, wobei allerdings in der ersten $\mathscr{E}_{p-r}$ durch $\mathscr{E}_{v+m-r}$, und in der zweiten $\mathscr{E}_{p-r-1}$ durch $\mathscr{E}_{v+m-r-1}$ ersetzt ist.

Der Grad von $\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v$ ist die Dimension von R_{IH}, also $2n-l-s+1$. Daraus folgt:

$$\operatorname{grad} \mathscr{E}_{v+m-r} = 2n-l-s-r+1 .$$

Wir schreiben $\mathscr{E}_{v+m-r} = \mathscr{E}'_{v+m-r} + \mathscr{E}''_{v+m-r} \wedge dt$, wobei $\mathscr{E}'_{v+m-r}$, $\mathscr{E}''_{v+m-r}$ nicht dt enthalten.

$\mathscr{E}'_{v+m-r} \wedge d_x p_{m_1} \wedge \ldots \wedge d_x p_{m_r}$ hat dann den x'-Grad $2n-l-s+1$, verschwindet also auf R_{IH}. Wir erhalten also auf R_{IH} nur die wesentlichen Terme

$$\begin{aligned}
&(\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v)(\zeta, z) \\
&= \sum_{1 \leqq j_1 < \ldots < j_p \leqq m} \; \sum_{(m_1, \ldots, m_r) \subset (j_1, \ldots, j_p)} \mathscr{E}_{v+m-r} \wedge dp_{m_1} \wedge \ldots \wedge dp_{m_r} \wedge dt \\
&\quad + \sum_{1 \leqq j_1 < \ldots < j_p \leqq m} \; \sum_{\substack{(m_1, \ldots, m_r) \subset (j_1, \ldots, j_p) \\ r<p}} \mathscr{E}_{v+m-r-1} \wedge dp_{m_1} \wedge \ldots \wedge dp_{m_r} \wedge dt ,
\end{aligned}$$

wobei der Gesamtgrad in dx' und dt $(2n-l-s+1)$ ist. Die Terme der zweiten Doppelsumme „schlucken" die Terme der ersten Doppelsumme, außer für $r=p=m$. Wir ersetzen also in der eben gefundenen Darstellung von $\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v$ die erste Doppelsumme durch

$$\mathscr{E}_v \wedge dp_1 \wedge dp_2 \wedge \ldots \wedge dp_m \wedge dt .$$

In der verbleibenden Doppelsumme ändern wir die Indizierung und erhalten

$$\sum_{\substack{1 \leqq j_1 < \ldots < j_r \leqq m \\ r<m}} \mathscr{E}_{v+m-r-1} \wedge dp_{j_1} \wedge dp_{j_2} \wedge \ldots \wedge dp_{j_r} \wedge dt .$$

Nun können wir überall dp_j durch dq_j ersetzen und haben damit

$$I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$$

bis auf unwesentliche Änderungen der Indizierung in eine Summe von Integralen der Typen A und B zerlegt, mit

$$\text{(A)} \qquad \int_{R_{IH} \cap U} a^u \wedge \frac{dq_1 \wedge dq_2 \wedge \ldots \wedge dq_m \wedge dt \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, a_1, \ldots, a_l)} ,$$

$$\text{(B)} \qquad \int_{R_{IH} \cap U} a^u \wedge \frac{dq_1 \wedge dq_2 \wedge \ldots \wedge dq_r \wedge dt \wedge \mathscr{E}_{v+m-r-1}}{K(a_0, a_1, \ldots, a_l)}, \qquad \text{mit } r<m .$$

Wir wollen nun den Nennerterm analysieren. Es gilt für $\delta(z) = \operatorname{dist}(z, bD)$:

$$\delta(z) \leqq C \cdot \min\{|\varrho_1(z)|, \ldots, |\varrho_{l+s}(z)|\} .$$

Es folgt dann für $\zeta \in R_{IH} \cap U$, $z \in U \cap D$ und $j = 1, 2, \ldots, l$:

$$\begin{aligned}
|\Phi_j(\zeta, z)| &\geqq c\{|u_j(\zeta)| + t - \varrho_j(z) + |\zeta - z|^2\} \\
&\geqq c\{|q_j(x, y)| + t - \varrho_j(z) + |\zeta - z|^2\} \\
&\geqq c\{|q_j(x, y)| + t + \delta + |\zeta - z|^2\} ,
\end{aligned}$$

$$\Phi_0(\zeta, z) = |\zeta - z|^2 \geqq c(|q_1| + \ldots + |q_l| + |x'| + t + \delta)^2 .$$

Wir setzen nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraus, daß in A und B $\mathscr{E}_v$ bzw. $\mathscr{E}_{v+m-r-1}$ Monome von der Gestalt

$$\mathscr{E}_v \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{2n-l-s-m},$$

bzw.

$$\mathscr{E}_{v+m-r-1} \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{2n-l-s-r}$$

sind. Hierbei ist $\mathscr{E}_v$, bzw. $\mathscr{E}_{v+m-r-1}$, eine Funktion. Für $2n-l-s-m<0$ verschwindet A, und für $2n-l-s-r<0$ verschwindet der entsprechende Term in B identisch. Wir können also immer voraussetzen, daß die obige Darstellung sinnvoll ist. Allerdings müssen wir in A den Fall $2n-l-s-m=0$ und in B den Fall $2n-l-s-r=0$ gesondert betrachten.

Fall A.

$$\begin{aligned}\left|\frac{a^u \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, \ldots, a_l)}\right| &\leqq C \cdot \frac{|\zeta - z|^{u+v}}{\Phi_0^{a_0} \cdot |\Phi_1^{a_1}| \ldots |\Phi_l^{a_l}|} \cdot \|Ef\|_{k, D_0} \\ &\leqq \frac{C \cdot |\zeta - z|^{u+v} \cdot \|Ef\|_{k, D_0}}{|\Phi_1 \cdot \Phi_2 \ldots \Phi_m| (\delta + t + |\zeta - z|^2)^{a_1 + \ldots + a_l - m} |\zeta - z|^{2a_0}} \\ &\leqq \frac{C \cdot \|Ef\|_{k, D_0}}{|\Phi_1 \cdot \Phi_2 \ldots \Phi_m| \, |\zeta - z|^{2(a_0 + a_1 + \ldots + a_l) - 2m - u - v}}.\end{aligned}$$

Abzuschätzen ist also

$$\int_{R_{IH} \cap U} \frac{|dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_m \wedge dt \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{2n-l-s-m}|}{|\Phi_1 \cdot \Phi_2 \ldots \Phi_m| \, |\zeta - z|^{2(a_0 + a_1 + \ldots + a_l) - 2m - u - v}}$$

Fall A_1. $2n-l-s-m>0$.

Wir setzen $\sigma^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n-l-s-m}^2$ und müssen dann abschätzen

$$\int_{R_{IH} \cap U} \frac{|dq_1 \wedge dq_2 \wedge \ldots \wedge dq_m \wedge dt \wedge d\sigma|}{(|q_1| + t + \delta + \sigma^2) \ldots (|q_m| + t + \delta + \sigma^2)(t + \delta + \sigma)^{\mu+1}}.$$

Wir gehen hier und im folgenden wie bei Range und Siu vor. $q_1, \ldots, q_m$ können als unabhängige Koordinaten aufgefaßt werden, da sie in x' und t Polynome zweiten Grades sind und deshalb eine endliche Überlagerung definieren. Sei $r^2 = q_1^2 + \ldots + q_m^2 + \sigma^2 \leqq c^2$ für $\zeta \in R_{IH} \cap U$, $z \in U$. Dann genügt es wegen $\mu \leqq 0$, das folgende Integral abzuschätzen

$$\alpha = \int_{\substack{q_1, \ldots, q_m, t, \sigma \\ r \leqq c, t \leqq \varepsilon_0}} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_m \wedge dt \wedge d\sigma|}{(|q_1| + t + \delta + \sigma^2) \ldots (|q_m| + t + \delta + \sigma^2)(t + \delta + \sigma)}.$$

Nach Integration über $q_1, \ldots, q_m$ kann man für beliebig kleines positives ε eine Konstante C_ε finden, so daß obiges Integral majorisiert wird durch

$$C_\varepsilon \cdot \int_{\substack{t, \sigma \\ \sigma \leqq c, t \leqq \varepsilon_0}} \frac{|dt \wedge d\sigma|}{(t + \delta + \sigma)^{1+\varepsilon}}.$$

Dieses Integral ist unabhängig von δ beschränkt.

Fall A_2. $2n-l-s-m=0$. Es tritt kein σ auf.

Abzuschätzen ist hier

$$\int_{R_{IH}\cap U} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_m \wedge dt|}{|\Phi_1 \ldots \Phi_m|\,|\zeta - z|^\mu}.$$

Sei $r^2 = q_1^2 + \ldots + q_m^2 \leqq c^2$ für $\zeta \in R_{IH} \cap U$, $z \in U$. Wegen $\mu \leqq 0$ müssen wir abschätzen

$$\beta = \int_{\substack{q_1, \ldots, q_m, t \\ r \leqq c,\, t \leqq \varepsilon_0}} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_m \wedge dt|}{(|q_1| + t + \delta) \ldots (|q_m| + t + \delta)}.$$

Wie eben sieht man sofort, daß dies unabhängig von δ beschränkt ist.

Fall B. Hier gehen wir analog vor. Es gilt für $r < m \leqq l$:

$$\left| \frac{a^u \wedge \mathscr{E}_{v+m-r-1}}{K(a_0, \ldots, a_l)} \right| \leqq \frac{C \cdot \|Ef\|_{k, D_0} \cdot |\zeta - z|^{u+v+m-r-1}}{|\Phi_1 \ldots \Phi_r|\,(\delta + t + |\zeta - z|^2)^{a_1 + \ldots + a_l - r} |\zeta - z|^{2a_0}}.$$

Wegen $a_1 + \ldots + a_l \geqq l$, $r \leqq l-1$ gilt, daß dies majorisiert wird von

$$\frac{C \cdot \|Ef\|_{k, D_0}}{(|q_1| + t + \delta + |\zeta - z|^2) \ldots (|q_r| + t + \delta + |\zeta - z|^2)(t + \delta + |\zeta - z|^2)\,|\zeta - z|^{\mu + 2n - l - s - r - 1}}.$$

Fall B_1. $2n-l-s-r>0$.

Wir setzen wieder $\sigma^2 = x_1^2 + \ldots + x_{2n-l-s-r}^2$ und müssen wegen $\mu \leqq 0$ abschätzen

$$\gamma = \int_{q_1, \ldots, q_r, \sigma, t} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_r \wedge dt \wedge d\sigma|}{(|q_1| + t + \delta + \sigma^2) \ldots (|q_r| + t + \delta + \sigma^2)(t + \delta + \sigma^2)}.$$

Man sieht sofort, daß dies unabhängig von δ beschränkt ist.

Fall B_2. $2n-l-s-r=0$.

Dies führt auf das Integral

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{R_{IH}\cap U} \frac{|\zeta - z|\,|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_r \wedge dt|}{(|q_1| + \delta + t) \ldots (|q_r| + \delta + t)(\delta + t + |\zeta - z|^2)} \\ &\leqq C \cdot \int_{R_{IH}\cap U} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_r \wedge dt|}{(|q_1| + \delta + t) \ldots (|q_r| + \delta + t)\sqrt{t + \delta}}. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß dieses Integral unabhängig von δ beschränkt ist.

Nun wollen wir den zweiten Teil der Aussage von Satz 2 beweisen. Sei δ ein Differentialoperator des Types $\frac{\partial}{\partial z_i}$ oder $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$. Sei $I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$ mit $\mu \leqq 0$ gegeben. Anwendung von δ auf $I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$ ergibt bis auf unwesentliche Änderung der Indizierung die folgenden vier Klassen von Integralen:

$$I_1 = I(u, v, \tilde{m}, s, a_0, \ldots, a_l) = \int_{R_{IH}} a^u \wedge \frac{\Theta_{\tilde{L}} \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, a_1, \ldots, a_l)},$$

tritt nur auf für $m \geqq 1$, es ist $\tilde{m} = m-1$, $\tilde{L} = (1, 2, \ldots, \tilde{m})$;

$$I_2 = I(u, \tilde{v}, m, s, a_0, \ldots, a_l) = \int_{R_{IH}} a^u \wedge \frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_{\tilde{v}}}{K(a_0, a_1, \ldots, a_l)},$$

mit $\tilde{v} = \max(v-1, 0)$;

$$I_3 = I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_{\nu-1}, a_\nu + 1, a_{\nu+1}, \ldots, a_l)$$
$$= \int_{R_{IH}} a^u \wedge \frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_v}{\Phi_\nu \cdot K(a_0, a_1, \ldots, a_l)},$$

mit $1 \leqq \nu \leqq l$;

$$I_4 = I(u, v, m, s, a_0 + 1, a_1, \ldots, a_l) = \int_{R_{IH}} a^u \wedge \frac{\Theta_L \wedge \mathscr{E}_{v+1}}{\Phi_0 \cdot K(a_0, a_1, \ldots, a_l)},$$

wobei dieser Term nur auftritt, wenn $a_0 \neq 0$ gilt.

Wegen $|\Phi_1(\zeta, z)| \leqq C \cdot |\zeta - z|$ folgt leicht, daß $|I_4|$ durch ein Integral des Typs $|I_3|$ dominiert wird. Wir lassen die Abschätzung von I_4 daher aus Platzgründen weg. Zunächst gehen wir wie beim Beweis der Beschränktheitsaussage vor. Jedes der vier Integrale zerfällt dann in die zwei Typen (A) und (B), allerdings mit veränderten Parametern.

Zu I_1, Fall A. Abzuschätzen ist hier

$$\int_{R_{IH} \cap U} a^u \wedge \frac{dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_{\tilde{m}} \wedge dt \wedge \mathscr{E}_v}{K(a_0, a_1, \ldots, a_l)}.$$

Dies führt auf das abzuschätzende Integral

$$\int_{R_{IH} \cap U} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_{m-1} \wedge dt \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{2n-l-s-m+1}| \, \|Ef\|_{k, D_0}}{|\Phi_1 \ldots \Phi_{m-1}| \cdot X \cdot |\zeta - z|^{2(a_0 + a_1 + \ldots + a_l) - 2m - u - v}},$$

mit a) $X = \delta + t + \sigma^2$, für $2n - l - s - m + 1 > 0$ und

b) $X = \delta + t + |\zeta - z|^2$, für $2n - l - s - m + 1 = 0$.

Es gilt: $2(a_0 + \ldots + a_l) - 2m - u - v = \mu - m - l - s + 2n \leqq 2n - m - l - s$.

Fall a. Man erhält eine obere Schranke durch

$$\int_{q_1, \ldots, q_{m-1}, \sigma, t} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_{m-1} \wedge dt \wedge d\sigma| \, \|Ef\|_{k, D_0}}{(|q_1| + t + \delta + \sigma^2) \ldots (|q_{m-1}| + t + \delta + \sigma^2)(t + \delta + \sigma^2)}.$$

Dieses Integral ist durch $C \cdot \|Ef\|_{k, D_0}$ nach oben beschränkt.

Fall b. Hier erhält man eine obere Schranke durch

$$C \cdot \int_{q_1, \ldots, q_{m-1}, t} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_{m-1} \wedge dt| \, \|Ef\|_{k, D_0}}{(|q_1| + \delta + t) \ldots (|q_{m-1}| + \delta + t)\sqrt{\delta + t}},$$

wegen $\dfrac{|\zeta - z|}{X} \leqq C \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\delta + t}}$.

Dieses Integral ist auch gleichmäßig durch $C \cdot \|Ef\|_{k, D_0}$ abschätzbar.

I_1, *Fall B.* Abzuschätzen ist hier

$$\int_{R_{IH}\cap U} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_r \wedge dt \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{2n-l-s-r}| \, \|Ef\|_{k,D_0}}{|\Phi_1 \ldots \Phi_r| X^2 |\zeta - z|^{2(a_0+\ldots+a_l)-v-m-u-2-r}},$$

mit $r \leqq \tilde{m} - 1 = m - 2 \leqq l - 2$.

Hier ist

a) $$X = \delta + t + \sigma^2 \quad \text{für} \quad 2n - l - s - r > 0$$

und

b) $$X = \delta + t + |\zeta - z|^2 \quad \text{für} \quad 2n - l - s - r = 0.$$

Weiter gilt:

$$2(a_0 + \ldots + a_l) - v - m - u - 2 - r = \mu + 2n - l - s - r - 2 \leqq 2n - l - s - r - 2.$$

Fall a. Eine obere Schranke wird gegeben durch

$$\int_{q_1,\ldots,q_r,t,\sigma} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_r \wedge dt \wedge d\sigma| \, \|Ef\|_{k,D_0}}{(|q_1| + \delta + t + \sigma^2) \ldots (|q_r| + \delta + t + \sigma^2)(\delta + t + \sigma^2)\sqrt{\delta + t}}.$$

Integration über $q_1, \ldots, q_r$ ergibt für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante C_ε, so daß man folgende Majorante bekommt

$$C_\varepsilon \cdot \int_{t,\sigma} \frac{|dt \wedge d\sigma| \, \|Ef\|_{k,D_0}}{(\delta + t + \sigma^2)^{1+\varepsilon}\sqrt{\delta + t}}.$$

Elementare Überlegungen zeigen nun, daß dies durch $\tilde{C}_\varepsilon \cdot \|Ef\|_{k,D_0} \cdot \delta^{-\varepsilon}$ gleichmäßig nach oben beschränkt ist.

Fall b. Hier erhält man das Integral

$$\int_{q_1,\ldots,q_r,t} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_r \wedge dt| \, \|Ef\|_{k,D_0}}{(|q_1| + \delta + t) \ldots (|q_r| + \delta + t)(\delta + t)}$$

als obere Schranke. Dieser Term hat die gleichen Abschätzungen wie eben.

Zu I_2. Für $v = 0$ ist $\tilde{v} = 0$. Es hat sich also gegenüber $I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$ nichts geändert, das Integral ist sogar gleichmäßig beschränkt. Sei also $v \geqq 1$, das heißt $\tilde{v} = v - 1$. Gegenüber den Abschätzungen von $I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$ tritt im Nenner nun immer der Faktor $|\zeta - z|$ einmal mehr auf. Verfolgt man die Abschätzungen von $I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$, so sieht man, daß nun ein Wachstum mit $|\log \delta|$ auftritt. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also ein C_ε, mit $|I_2(z)| \leqq C_\varepsilon \cdot \|Ef\|_{k,D_0} \cdot \delta^{-\varepsilon}$.

Zu I_3. Gegenüber den Abschätzungen von $I(u, v, m, s, a_0, \ldots, a_l)$ tritt hier im Nenner einmal mehr der Faktor $X = \delta + t + |\zeta - z|^2$ auf. Dort hatten wir die Integrale $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ abzuschätzen. Wir nennen die entsprechenden Integrale hier α', β', γ' und δ'.

Zu α'.

$$\alpha' = \int_{q_1,\ldots,q_m,t,\sigma} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_m \wedge dt \wedge d\sigma|}{(|q_1| + t + \delta + \sigma^2) \ldots (|q_m| + t + \delta + \sigma^2)(t + \delta + \sigma^2)(t + \delta + \sigma)}.$$

Integration über $q_1, \ldots, q_m$ ergibt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\alpha' \leqq C_\varepsilon \cdot \int_{t,\sigma} \frac{|dt \wedge d\sigma|}{(\delta + t + \sigma^2)^{1+\varepsilon}(\delta + t + \sigma)} \leqq C_\varepsilon \cdot \int_{t,\sigma} \frac{|dt \wedge d\sigma|}{(\delta + \sigma^2)^{1+\varepsilon}(\delta + t)}$$
$$\leqq C'_\varepsilon \cdot \delta^{-\varepsilon} \delta^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)} = C'_\varepsilon \delta^{-(\frac{1}{2}+2\varepsilon)}.$$

Zu β'.

$$\beta' = \int_{q_1, \ldots, q_m, t} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_m \wedge dt|}{(|q_1| + \delta + t) \ldots (|q_m| + \delta + t)(\delta + t)}.$$

Dies ist für $\varepsilon > 0$ beliebig durch $C_\varepsilon \cdot \delta^{-\varepsilon}$ abschätzbar.

Zu γ'.

$$\gamma' = \int_{q_1, \ldots, q_r, \sigma, t} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_r \wedge dt \wedge d\sigma|}{(|q_1| + \delta + t + \sigma^2) \ldots (|q_r| + \delta + t + \sigma^2)(\delta + t + \sigma^2)^2}.$$

Integration über $q_1, \ldots, q_r$ ergibt für beliebig kleines $\varepsilon > 0$

$$\gamma' \leqq C_\varepsilon \cdot \int_{\sigma, t} \frac{|dt \wedge d\sigma|}{(\delta + t + \sigma^2)^{2+\varepsilon}} \leqq C'_\varepsilon \cdot \int_\sigma \frac{d\sigma}{(\delta + \sigma^2)^{1+\varepsilon}}$$
$$\leqq C''_\varepsilon \cdot \delta^{-(1/2+\varepsilon)}.$$

Zu δ'.

$$\delta' = \int_{q_1, \ldots, q_r, t} \frac{|\zeta - z|\,|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_r \wedge dt|}{(|q_1| + \delta + t) \ldots (|q_r| + \delta + t)(\delta + t + |\zeta - z|^2)^2}$$
$$\leqq C \cdot \int_{q_1, \ldots, q_r, t} \frac{|dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_r \wedge dt|}{(|q_1| + \delta + t) \ldots (|q_r| + \delta + t)(\delta + t)^{3/2}}.$$

Nach Integration über $q_1, \ldots, q_r$ erhält man für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Majorante durch

$$C_\varepsilon \cdot \int_t \frac{dt}{(\delta + t)^{3/2+\varepsilon}} \leqq C'_\varepsilon \cdot \delta^{-(1/2+\varepsilon)}.$$

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Literatur

1. Alt, W.: Hölderabschätzungen für Ableitungen von Lösungen der Gleichung $\bar{\partial}u = f$ bei streng pseudokonvexem Rand. Manuscr. Math. **13**, 381–414 (1974)
2. Bertrams, J.: Randregularität von Lösungen der $\bar{\partial}$-Gleichung auf dem Polyzylinder und zweidimensionalen anal. Polyedern. Bonn. Math. Schr. **176**, 1–164 (1986)
3. Brinkmann, Ch.: Lösungsoperatoren für den Cauchy-Riemann-Komplex auf Gebieten mit stückweise glattem, streng pseudokonvexem Rand in allgemeiner Lage mit C^k-Abschätzungen. Diplomarbeit 1–157, Bonn 1984
4. Jambon, M.: L'équation différentielle de Cauchy-Riemann sur une domaine strictement pseudoconvexe. Solutions bornées. Enseign. Math. **18**, 304–337 (1972)

5. Lieb, I., Range, R.M.: Lösungsoperatoren für den Cauchy-Riemann-Komplex mit C^k-Abschätzungen. Math. Ann. **253**, 145–164 (1980)
6. Michel, J.: Integralformeln in der komplexen Analysis. Bonn. Math. Schr. **133**, 1–152 (1981)
7. Michel, J.: Randregularität des $\bar{\partial}$-Problems für die Halbkugel in $\mathbb{C}^n$. Manuscr. Math. **55**, 239–268 (1986)
8. Range, R.M., Siu, Y.T.: Uniform estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries. Math. Ann. **206**, 325–354 (1973)
9. Seeley, R.T.: Extension of C^∞-functions defined in a half space. Proc. Am. Math. Soc. **15**, 625–626 (1964)
10. Siu, Y.T.: The $\bar{\partial}$-problem with uniform bounds on derivatives. Math. Ann. **207**, 163–176 (1974)
11. Sternberg, Sh.: Lectures on differential geometry. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1964
12. Wells, R.O., Jr.: Compact real submanifolds of a complex manifold with nondegenerate holomorphic tangent bundles. Math. Ann. **179**, 123–129 (1969)

Eingegangen am 7. April 1987

Nachtrag zur Korrektur. Allesandro Perotti (Pisa) und der Autor werden in einer weiteren gemeinsamen Arbeit das Theorem ohne die komplexe Transversalitätsbedingung ($\mathfrak{C}$) zeigen.