Math. Ann. 270, 417–425 (1985)

Mathematische Annalen

Einfache Kurvensingularitäten und torsionsfreie Moduln

G.-M. Greuel[1] und H. Knörrer[2]

1 Fachbereich Mathematik der Universität, Erwin-Schrödinger-Straße, D-6750 Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland
2 Mathematisches Institut der Universität, Wegelerstraße 10, D-5300 Bonn, Bundesrepublik Deutschland

In der vorliegenden Arbeit werden diejenigen reduzierten Kurvensingularitäten klassifiziert, über deren lokalen Ring es nur endlich viele Isomorphieklassen von torsionsfreien[1] unzerlegbaren Moduln gibt. Es stellt sich heraus, daß dies genau die Kurvensingularitäten sind, die eine einfache ebene Kurvensingularität dominieren.

Im Fall einer ebenen Kurvensingularität bedeutet dies, daß (C, p) selbst einfach ist. Das heißt, in der semi-universellen Deformation von (C, p) treten bis auf Isomorphie nur endlich viele verschiedene Singularitäten auf. Die einfachen ebenen Kurvensingularitäten wurden von Arnol'd (s. etwa [1]) klassifiziert; es ergibt sich die folgende Liste:

$$
\begin{aligned}
&A_k : x^2 + y^{k+1} = 0, \quad && k = 1, 2, \ldots, \\
&D_k : x^2 y + y^{k-1} = 0, \quad && k = 4, 5, \ldots, \\
&E_6 : x^3 + y^4 = 0, && \\
&E_7 : x^3 + xy^3 = 0, && \\
&E_8 : x^3 + y^5 = 0. &&
\end{aligned}
$$

Neben der angegebenen gibt es viele andere Charakterisierungen dieser Singularitäten (vgl. z. B. [1, 4]); eine geometrische Diskussion dieser Kurvensingularitäten findet man etwa in [2, II.8].

Formulierung der Ergebnisse

R bzw. R' bezeichne den lokalen Ring einer reduzierten Kurvensingularität $(C, 0)$ bzw. $(C', 0)$ mit Restklassenkörper k[2] den wir algebraisch abgeschlossen mit

1 „torsionsfrei" bedeutet hier immer „torsionsfrei über der Menge der Nichtnullteiler des lokalen Ringes"

2 d. h. R ist 1-dimensionaler, reduzierter Restklassenring eines formalen oder (falls k vollständig und nicht trivial bewertet ist) konvergenten Potenzreihenringes in endlich vielen Unbestimmten

Charakteristik 0 voraussetzen. $\tilde{R}$ sei die Normalisierung von R, d.h. der ganze Abschluß von R in seinem totalen Quotientenring K.

Wir sagen *R' dominiert R* oder *$(C',0)$ dominiert $(C,0)$*, wenn es Inklusionen

$$R \subset R' \subset \tilde{R}$$

gibt. Das bedeutet, daß es einen endlichen, surjektiven und generisch bijektiven Morphismus $(C',0) \to (C,0)$ gibt. Ein R-Modul[3] M heißt *unzerlegbar*, wenn jede direkte Summenzerlegung $M = M_1 \oplus M_2$ trivial ist (d.h. $M_1 = 0$ oder $M_2 = 0$).

Satz 1. *Sei R der lokale Ring einer reduzierten Kurvensingularität. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Über R gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare torsionsfreie Moduln.*

(ii) *Für jedes $n \geqq 1$ gibt es über R nur endlich viele unzerlegbare torsionsfreie Moduln vom Rang n*[4].

(iii) *Es gibt ein $n \geqq 1$, so daß es über R bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare torsionsfreie Moduln vom Rang n gibt.*

(iv) *R dominiert eine einfache ebene Kurvensingularität.*

Bemerkungen. 1) Eine ähnliche Klassifikation wie in Satz 1, (i) und (iv) ist in den Arbeiten von Jacobinsky [7] und Green u. Reiner [5][5] enthalten. Dort wird die Situation betrachtet, daß C ein reduziertes, endliches, 1-dimensionales Schema über dem Bewertungsring in einer p-adischen Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers ist. Der Beweis, daß in Satz 1 aus (iv) die Aussage (i) folgt, läßt sich nahezu wörtlich aus dieser Arbeit (S. 10ff.) übertragen. Dabei erhält man auch die Klassifikation der unzerlegbaren Moduln über dem lokalen Ring einer ebenen einfachen Kurvensingularität. Wir geben diese Klassifikation im Anhang an. (Aus der Klassifikation ergeben sich auch alle lokalen Ringe R', die eine einfache ebene Kurvensingularität R dominieren als diejenigen R-Moduln vom Rang 1, die multiplikativ abgeschlossen sind.)

Dagegen lassen sich die Argumente für die umgekehrte Richtung nicht ohne weiteres übertragen; und die Charakterisierungen (ii) und (iii) gelten in der p-adischen Situation sicher nicht. Denn nach dem Satz von Jordan-Zassenhaus gibt es bei vorgegebenem Rang n nur endlich viele Isomorphieklassen von Moduln vom Rang n. In unserer Situation treten dagegen für jedes n kontinuierliche Familien nicht isomorpher R-Moduln auf.

2. Nulldimensionale lokale Ringe mit nur endlich vielen Isomorphieklassen unzerlegbarer Cohen-Macaulay-Moduln wurden von Herzog [6, Satz 1.5] klassifiziert. Für normale Flächensingularitäten $(X,0)$ folgt ebenfalls aus [6], daß es über dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,0}$ genau dann nur endlich viele unzerlegbare reflexive Moduln gibt, wenn $(X,0)$ eine Quotientensingularität ist.

3 Alle in dieser Arbeit betrachteten Moduln seien endlich erzeugt

4 Wir sagen, M habe den Rang n, wenn $K \bigotimes_R M$ frei über K vom Rang n ist

5 Wir danken M. Auslander und A. Wiedemann, die uns auf diese Arbeiten hingewiesen haben

Für Gorenstein-Singularitäten sind alle torsionsfreien Moduln bereits reflexiv. Die Aussage von Satz 1 kann in diesem Fall verbessert werden (vgl. auch [9]).

Korollar. *Sei R der lokale Ring einer reduzierten Gorenstein Kurvensingularität. Dann sind die Aussagen* (i), (ii), (iii) *von Satz 1 äquivalent zu*

(iv′) *R ist isomorph zum lokalen Ring einer einfachen ebenen Kurvensingularität.*

Denn nach [6, Satz 1.2] hat R in diesem Fall Einbettungsdimension 2 und aus [2, II.8] folgt nun, daß R selbst eine ebene einfache Kurven-Singularität ist.

Torsionsfreie Moduln vom Rang 1 über einem lokalen Ring R erhält man insbesondere, wenn man Ringe R' betrachtet, die zwischen R und seinem ganzen Abschluß R liegen: $R \subset R' \subset \tilde{R}$. Ähnlich wie in Satz 1 ergibt sich eine Charakterisierung der einfachen ebenen Kurvensingularitäten.

Satz 2. *Für den lokalen Ring R einer reduzierten ebenen Kurvensingularität sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt nur endlich viele Ringe R' mit $R \subset R' \subset \tilde{R}$.*

(ii) *R ist einfach.*

Bemerkung. Dieses Resultat wurde unabhängig auch von Kirby u. Tavallee [8] gefunden. Wie uns D. Kirby mitteilte, haben Tavallee, Sedighi und er in der Zwischenzeit alle eindimensionalen lokalen Cohen-Macaulay Ringe R klassifiziert, für die es nur endlich viele Ringe R' mit $R \subset R' \subset \tilde{R}$ gibt.

Beweis von Satz 1 und Satz 2. Es sei R der lokale Ring einer reduzierten Kurvensingularität $(C, 0)$ und $\tilde{R}$ der ganze Abschluß von R in seinem totalen Quotientenring K. Eine Beziehung zwischen torsionsfreien Moduln vom Rang 1 über R und Erweiterungsringen von R, die in $\tilde{R}$ enthalten sind, wird durch die folgende Konstruktion gegeben:

Ein torsionsfreier Modul M vom Rang 1 über R kann stets in den totalen Quotientenring K eingebettet werden. $\mathrm{End}_R(M) = \{x \in K | x \cdot M \subset M\}$ ist dann ein Unterring von K mit $R \subset \mathrm{End}_R(M) \subset \tilde{R}$.

Lemma 1. (i) *Seien $M_1, M_2 \subset K$ zwei isomorphe torsionsfreie R-Moduln vom Rang* 1. *Dann gilt* $\mathrm{End}_R(M_1) = \mathrm{End}_R(M_2)$.

(ii) *Seien R_1, R_2 Unterringe von $\tilde{R}$, die R enthalten. Falls R_1 und R_2 als R-Moduln isomorph sind, so gilt schon $R_1 = R_2$.*

Beweis. (i) Jeder Isomorphismus $M_1 \to M_2$ wird durch Multiplikation mit einer Einheit $u \in K$ induziert. Aus $\mathrm{End}_R(M_1) = \mathrm{End}_R(u \cdot M_1)$ folgt (i).

(ii) Offenbar ist $R_i = \mathrm{End}_R(R_i)$ für $i = 1, 2$. Daraus und aus (i) folgt die Behauptung.

In Satz 1 sind die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii) offensichtlich. Wie bereits erwähnt, läßt sich der Beweis der Implikation (iv) $\Rightarrow$ (i) nahezu wörtlich aus [7] übertragen. Es ist also nur noch zu zeigen, daß es für jedes n über R unendlich viele nicht isomorphe torsionsfreie unzerlegbare Moduln vom Rang n gibt, falls R keine einfach ebene Kurvensingularität dominiert.

Bei Satz 2 ergibt sich die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) sofort aus Lemma 1 und (dem bereits behandelten Teil von) Satz 1. Für die umgekehrte Richtung sind für jede ebene nicht einfache Kurvensingularität unendlich viele verschiedene Ringe zwischen R und $\tilde{R}$ zu konstruieren.

Wir führen zunächst einige Notationen ein.

Der Zerlegung von $(C,0)=(C_1,0)\cup\ldots\cup(C_r,0)$ in irreduzible Komponenten entspricht eine Zerlegung $R=\bigoplus_{i=1}^{r} A_i$ in eine direkte Summe regulärer lokaler Ringe A_i. Wir bezeichnen mit m_i das maximale Ideal von A_i und setzen für einen Multiindex $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_r)$

$$J_{(\ell)}:=m_1^{\ell_1}A_1\oplus\ldots\oplus m_r^{\ell_r}A_r\subset\tilde{R}.$$

$J:=J_{(1,\ldots,1)}$ ist das Jacobson-Radikal von $\tilde{R}$. Ferner bezeichne $m\subset R$ das maximale Ideal von R, $\mathrm{mult}(C,0)$ bzw. $\mathrm{mult}(R)$ die Multiplizität des lokalen Rings R, und $\mathrm{embdim}(R):=\dim_k m/m^2$ die Einbettungsdimension von $(C,0)$.

Die Tatsache, daß $(C,0)$ keine einfache Kurvensingularität dominiert, kann dadurch ausgedrückt werden, daß $(C,0)$ selbst von einer geeigneten Kurve $(\hat{C},0)$ dominiert wird. Dazu wählen wir Isomorphismen $A_i\cong k[[t]]$ (damit ist t lokaler Parameter in jedem A_i) und schreiben ein Element $f\in\tilde{R}=A_1\oplus\ldots\oplus A_r$ in der Form $f=(f_1,\ldots,f_r)$ mit $f_i\in A_i$.

Lemma 2. *R sei der lokale Ring einer reduzierten Kurvensingularität $(C,0)=(C_1,0)\cup\ldots\cup(C_r,0)$, die keine einfache ebene Kurvensingularität dominiere. Dann tritt nach eventueller Umnumerierung der Zweige einer der folgenden Fälle ein, die wir gesondert nach der Zahl r der Zweige unterscheiden:*

(1) $r=1$, $(1.1): R\subset\hat{R}:=k+J_{(4)}$

$(1.2): R\subset\hat{R}:=k+k\cdot t^3+J_{(6)}$.

(2) $r=2$, $(2.1): R\subset\hat{R}:=k+J_{(2,2)}$

$(2.2): R\subset\hat{R}:=k+J_{(1,3)}$

$(2.3): R\subset\hat{R}:=k+k\cdot(t,t^2)+J_{(2,4)}$ *und* $R\not\subset k+J_{(2,4)}$.

(3) $r=3$, $(3.1): R\subset\hat{R}:=k+J_{(1,1,2)}$

$(3.2): R\subset\hat{R}:=k+k\cdot(t,t,t)+J_{(2,2,2)}$ *und* $R\not\subset k+J_{(2,2,2)}$.

(4) $r\geqq 4$, $R\subset\hat{R}:=k+J_{(1,\ldots,1)}$.

Hierbei ist k durch $\alpha\to(\alpha,\ldots,\alpha)$ diagonal in $\tilde{R}$ eingebettet.

Der *Beweis* ergibt sich mit Hilfe von [2, II.8] und sei dem Leser überlassen.

Lemma 3. *R, R' seien lokale Ringe reduzierter Kurvensingularitäten.*

(i) *R' dominiere R. Gibt es über R' unendlich viele nicht isomorphe torsionsfreie unzerlegbare Moduln vom Rang n, so gilt das gleiche für R.*

(ii) *Ein R-Modul ist unzerlegbar genau dann, wenn jede Projektion $\varepsilon: M\to M$ trivial ist (d.h. $\varepsilon=0$ oder $\varepsilon=\mathrm{id}$).*

Beweis. (i) folgt aus (ii) und der Tatsache, daß für torsionsfreie R'-Moduln M', N' $\mathrm{Hom}_R(M',N')=\mathrm{Hom}_{R'}(M',N')$ gilt. Da jede Projektion $\varepsilon: M\to M$ eine Zerlegung $M=\ker(\varepsilon)\oplus\mathrm{Im}(\varepsilon)$ bewirkt, folgt (ii).

Zum Beweis von Satz 1 genügt es also, über den in Lemma 3 aufgeführten Ringen $\hat{R}$ für jedes n unendlich viele nicht isomorphe torsionsfreie unzerlegbare Moduln vom Rang n zu konstruieren. In vielen dieser Fälle wird dies – und auch die Konstruktion unendlich vieler dominierenden Ringe – geliefert durch

Lemma 4. *Es gebe ein* $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_r)$, $\ell_i\geqq 1$, *so daß*

$$\dim_k(J_{(\ell)}/J_{(2\ell)}+\mathfrak{m}\cdot J_{(\ell)}+\mathfrak{m}\cap J_{(\ell)})\geqq 2.$$

Dann gilt:

(i) *Es gibt unendlich viele verschiedene Ringe* R' *mit* $R\subset R'\subset\tilde{R}$.

(ii) *Für jedes* n *gibt es unendlich viele nicht isomorphe unzerlegbare torsionsfreie* R*-Moduln vom Rang* n.

Beweis. Wähle $f,g\in J_{(\ell)}$, deren Restklassen modulo $J_{(2\ell)}+\mathfrak{m}\cdot J_{(\ell)}+\mathfrak{m}\cap J_{(\ell)}$ linear unabhängig sind. Für $\lambda\in k$ bezeichne A_λ die irreduzible $n\times n$-Matrix, bestehend aus einem Jordanblock mit Eigenwert λ und es sei $M_\lambda:=R^n+(f+gA_\lambda)R^n\subset R^n$. Wir bezeichnen mit R_λ den von R und $f+\lambda g$ erzeugten Unterring von $\tilde{R}$.

(i) Es gilt $R_\lambda=R_\mu$ genau dann, wenn $\lambda=\mu$.

Beweis. Wegen $(f+\lambda g)^2\in J_{(2\ell)}$ und $\mathfrak{m}\cdot(f+\lambda g)\in\mathfrak{m}\cdot J_{(\ell)}$ ist das Bild von R_λ in $\tilde{R}/J_{(2\ell)}+\mathfrak{m}\cdot J_{(\ell)}$ gleich dem vom Bild von R und der Restklasse von $f+\lambda g$ aufgespannten Vektorraum. Für $\lambda\neq\mu$ sind also schon die Bilder von R_λ und R_μ in $\tilde{R}/J_{(2\ell)}+\mathfrak{m}\cdot J_{(\ell)}$ verschieden.

(ii) M_λ ist irreduzibler R-Modul vom Rang n und es gilt $M_\lambda\cong M_\mu$ genau dann, wenn $\lambda=\mu$.

Beweis. Wie oben sei k diagonal in $\tilde{R}=A_1\oplus\dots\oplus A_r$ eingebettet; und entsprechend haben wir eine Einbettung $k^n\subset\tilde{R}^n=A_1^n\oplus\dots\oplus A_r^n$ durch $x\to(x,\dots,x)$. Sei nun $\varepsilon:\tilde{R}^n\to\tilde{R}^n$ eine $\tilde{R}$-lineare Abbildung mit $\varepsilon(M_\lambda)\subset M_\mu$. Wir können ε in der Form

$$\varepsilon=(\eta_1,\dots,\eta_r)$$

schreiben, wobei jedes η_i ein Endomorphismus von A_i^n ist. Zerlegen wir η_i in der Form $\eta_i=\eta_i^0+\eta_i^1$, wobei $\eta_i^0\in\operatorname{End}_k(k^n)$, $\operatorname{Im}(\eta_i^1)\subset\mathfrak{m}_i\cdot A_i^n$, so erhalten wir eine Zerlegung

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1$$

mit $\varepsilon_0=(\eta_1^0,\dots,\eta_r^0)$ und $\operatorname{Im}(\varepsilon_1)\subset J\cdot\tilde{R}^n$.

Da für alle $x\in k^n\subset R^n\subset\tilde{R}^n$

$$\varepsilon(x)=(\eta_1^0(x),\dots,\eta_r^0(x))+\varepsilon_1(x)\in M_\mu$$

folgt $\eta_1^0(x)=\dots=\eta_r^0(x)$ für alle $x\in k^n$, also $\eta_1^0=\dots=\eta_r^0$. Diese Abbildung bezeichnen wir auch mit η^0.

Wir nennen a_λ die Abbildung $f+gA_\lambda:\tilde{R}^n\to\tilde{R}^n$. Für $x\in k^n$ ist

$$\varepsilon(a_\lambda x)=f\varepsilon_0(x)+g\varepsilon_0A_\lambda(x)\bmod(J_{(2\ell)}+\mathfrak{m}\cdot J_{(\ell)})\cdot\tilde{R}^n,$$

denn $\varepsilon_1(x)$ und $\varepsilon_1(A_\lambda x)$ liegen in $M_\mu\cap J\cdot\tilde{R}^n\subset J_{(\ell)}\cdot\tilde{R}^n+\mathfrak{m}\cdot\tilde{R}^n$ und $f,g\in J_{(\ell)}$. Da f und g linear unabhängig in $\tilde{R}/J_{(2\ell)}+\mathfrak{m}\cdot J_{(\ell)}+R$ sind und $\varepsilon(a_\lambda x)\in M_\mu$, gibt es $y\in k^n$, so daß

$$f\varepsilon_0(x)+g\varepsilon_0A_\lambda(x)=fy+gA_\mu(x).$$

Daraus folgt $\eta^0(x)=y$, $\eta^0 A_\lambda(x)=A_\mu(y)$ und somit

$$(*) \qquad \eta^0 A_\lambda(x)=A_\mu\eta^0(x) \quad \text{für alle} \quad x\in k^n.$$

Ist ε ein Isomorphismus von M_λ auf M_μ, so ist auch η^0 ein Isomorphismus. Dann hat $A_\mu=\eta^0\cdot A_\eta\cdot(\eta^0)^{-1}$ den gleichen Eigenwert wie A_λ, also ist $\lambda=\mu$.

Ist nun $\lambda=\mu$ und ε eine Projektion, so sind auch ε^0 und η^0 Projektionen. Aus (*) folgt, daß $\ker(\eta^0)$ und $\operatorname{Im}(\eta^0)$ A_λ-invariante Unterräume von k^n sind. Da $k^n=\ker(\eta^0)\oplus\operatorname{Im}(\eta^0)$ und A_λ irreduzibel ist, ist η^0 und damit ε_0 trivial. Aus dem Nakayama-Lemma folgt, daß auch ε trivial ist. Damit ist M_λ nach Lemma 3(ii) unzerlegbar.

Lemma 5. *Falls* $\operatorname{mult}(R)\geqq\operatorname{embdim}(R)+2$, *so ergibt es unendlich viele verschiedene Ringe R' mit $R\subset R'\subset\tilde{R}$ und für jedes unendlich viele unzerlegbare torsionsfreie R-Moduln vom Rang n.*

Beweis. Ist m_i die Multiplizität von C_i, so ist $\operatorname{mult}(R)=m_1+\ldots+m_r$, und mit $m:=(m_1,\ldots,m_r)$ gilt $\mathfrak{m}\cdot\tilde{R}=J_{(m)}$. Aus der exakten Sequenz

$$0\to\mathfrak{m}\cap J_{(2m)}/\mathfrak{m}^2\to\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to J_{(m)}/J_{(2m)}\to J_{(m)}/\mathfrak{m}+J_{(2m)}\to 0$$

folgt

$$\dim_k(J_{(m)}/J_{(2m)}+\mathfrak{m})\geqq m_1+\ldots+m_r-\operatorname{embdim}(R)\geqq 2.$$

Wegen $\mathfrak{m}\subset J_{(m)}$ ist die Voraussetzung von Lemma 4 erfüllt, und daraus folgt die Behauptung.

Bei den in Lemma 2 diskutierten Fällen reduzierter Kurvensingularitäten, die keine einfache ebene Kurvensingularität dominieren, sind in den folgenden Fällen die Vorasussetzungen von Lemma 4 für den Ring $\hat{R}$ erfüllt:

(1.1) $\hat{R}=k+J_{(4)}$ mit $\ell=(2)$,

(1.2) $\hat{R}=k+k\cdot t^3+J_{(6)}$ mit $\ell=(3)$,

(2.1) $\hat{R}=k+J_{(2,2)}$ mit $\ell=(1,1)$,

(2.3) $\hat{R}=k+k\cdot(t,t^2)+J_{(2,4)}$ mit $\ell=(1,2)$,

(3.2) $\hat{R}=k+k\cdot(t,t,t)+J_{(2,2,2)}$ mit $\ell=(1,1,1)$.

In diesen Fällen gibt es also nach Lemma 4 und Lemma 3 für jedes n unendlich viele unzerlegbare torsionsfreie R-Moduln vom Rang n, und ebenso gibt es unendlich viele Ringe zwischen R und seiner Normalisierung $\tilde{R}$.

In den verbleibenden Fällen (2.2), (3.1) und (4) ist $\operatorname{mult}(R)\geqq 4$. Ist nun $(C,0)$ eine ebene Singularität, so ist die Voraussetzung von Lemma 5 erfüllt, es gibt also wieder unendlich viele Ringe zwischen R und $\tilde{R}$. Damit ist der Beweis von Satz 2 bereits beendet.

Zum Beweis von Satz 1 ist noch zu zeigen, daß es in den Fällen (2.2), (3.1) und (4) von Lemma 2 über dem Ring $\hat{R}$ für jedes n unendlich viele unzerlegbare torsionsfreie Moduln vom Rang n gibt. Für $\lambda\in k$ bezeichne A_λ wieder die irreduzible $n\times n$-Matrix bestehend aus einem Jordanblock mit Eigenwert λ. Wir wählen Elemente f, g in der Normalisierung von $\hat{R}$ folgendermaßen:

im Fall (2.2), $\hat{R}=k+J_{(1,3)}$, $f:=(1,t)$, $g:=(0,t^2)$,
im Fall (3.1), $\hat{R}=k+J_{(1,1,2)}$, $f:=(1,t,0)$, $g:=(0,0,1)$,
im Fall (4), $\hat{R}=k+J_{(1,\dots,1)}$, $f:=(1,2,0,\dots,0)$, $g:=(0,0,1,0,\dots,0)$

und setzen $M_\lambda:=\hat{R}^n+(f+gA_\lambda)\cdot\hat{R}^n$. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 4(ii) prüft man nach, daß M_λ ein zerlegbarer torsionsfreier $\hat{R}$-Modul vom Rang n ist, und daß für $\lambda \neq \mu$ die Moduln M_λ und M_μ nicht isomorph sind. Dies beendet auch den Beweis von Satz 1.

Anhang: Die unzerlegbaren torsionsfreien Moduln über dem lokalen Ring einer einfachen ebenen Kurvensingularität

Aus den Arbeiten von Jacobinsky [7] und Green u. Reiner [5] ergibt sich folgende Klassifikation: Sei $(C,0)$ eine einfache ebene Kurvensingularität mit den Zweigen $(C_1,0),\dots,(C_r,0)$, R (bzw. R_i) der lokale Ring von $(C,0)$ [bzw. von $(C_i,0)$], $\tilde{R}$ die Normalisierung von R und $\tilde{R}^m=\tilde{R}e_1\oplus\dots\oplus\tilde{R}e_m$ bezeichne den freien $\tilde{R}$-Modul vom Rang m. Ferner sei M ein unzerlegbarer torsionsfreier R-Modul. Mit $\varrho_i(M)$ bezeichnen wir den Rang von $M\otimes_R R_i$ als R_i-Modul; falls C irreduzibel ist, schreiben wir $\varrho(M)$ statt $\varrho_1(M)$. Bis auf Isomorphie liegt dann einer der folgenden Fälle vor:

1. $r=1$

(1.1): $(C,0)$ ist vom Typ A_n, n gerade, $R=k[[t^2,t^{n+1}]]$

$$M=R+R\cdot t^i\subset\tilde{R},\qquad i=1,3,5,\dots,n-1,n+1.$$

(1.2): $(C,0)$ ist vom Typ E_6, $R=k[[t^3,t^4]]$

(i) $\varrho(M)=1$:

$$M=R+R\cdot t^i\subset\tilde{R},\qquad i=1,2,5\quad\text{oder}$$
$$M=R\quad\text{oder}\quad M=\tilde{R}.$$

(ii) $\varrho(M)=2$:

$$M=Re_1+Re_2+R(te_1+t^2e_2)\subset\tilde{R}^2\quad\text{oder}$$
$$M=Re_1+Re_2+R(te_1+t^2e_2)+R\cdot t^2e_1\subset\tilde{R}^2.$$

(1.3): $(C,0)$ ist vom Typ E_8, $R=k[[t^3,t^5]]$

(i) $\varrho(M)=1$:

$$M=R+R\cdot t^i\subset\tilde{R},\qquad i=1,2,4,7\quad\text{oder}$$
$$M=R+R\cdot t^2+R\cdot t^4\subset\tilde{R}\quad\text{oder}$$
$$M=R\quad\text{oder}\quad M=\tilde{R}.$$

(ii) $\varrho(M)=2$:

a) $M=L_1:=Re_1+Re_2+R(te_1+t^2e_2)\subset\tilde{R}^2$ oder

$M=L_1+R\cdot t^2e_1, \quad M=L_1+R\cdot t^4e_2,$

$M=L_1+R\cdot t^2e_1+R\cdot t^4e_2$ oder

b) $M=L_2:=Re_1+Re_2+R(t^2e_1+t^4e_2)\subset\tilde{R}^2$ oder

$M=L_2+R\cdot t^ie_1, \quad i=1,4.$

(iii) $\varrho(M)=3$:

a) $M=L_3:=Re_1+Re_2+Re_3+R(te_1+t^2e_2)+R(t^2e_1+t^4e_3)\subset\tilde{R}^3$ oder

$M=L_3+R\cdot t^4e_2$ oder

b) $M=Re_1+Re_2+Re_3+R(te_1+t^2e_3)+R\cdot te_2+R(t^2e_2+t^4e_3).$

2. $r=2$

(2.0): $M=i_*(M')$, wobei $i: C_j \hookrightarrow C$ die Inklusion einer Komponente C_j von C bezeichnet und M' ein unzerlegbarer torsionsfreier R_j-Modul ist.

(2.1): $(C,0)$ ist vom Typ A_n, n ungerade, $R=k\left[\left[(t,t),\left(t^{\frac{n+1}{2}},0\right)\right]\right]$

$$M=R+R\cdot(t^i,0)\subset\tilde{R}, \quad i=1,\ldots,\frac{n+1}{2}.$$

(2.2): $(C,0)$ ist vom Typ D_n, n ungerade, $R=k[[(t^{n-2},t),(t^2,0)]]$

(i) $\varrho_1(M)=1$, $\varrho_2(M)=1$:

$$M=R+R\cdot(t^i,0)\subset\tilde{R}, \quad i=1,3,5,\ldots,n \quad \text{oder}$$

$$M=R\cdot(1,0)+R\cdot(t^i,1)\subset\tilde{R}, \quad i=1,3,5,\ldots,n-4.$$

(ii) $\varrho_1(M)=1$, $\varrho_2(M)=2$:

$$M=Re_1+R\cdot((t^i,0)e_1+(0,1)e_2)\subset\tilde{R}^2, \quad i=1,3,5,\ldots,n-4.$$

(2.3): $(C,0)$ ist vom Typ E_7, $R=k[[(t^2,t),(t^3,0)]]$

(i) $\varrho_1(M)=1, \varrho_2(M)=1$:

$$M=R+R\cdot(t^i,0)\subset\tilde{R}, \quad i=1,2,4,5 \quad \text{oder}$$

$$M=R+R\cdot(t,0)+R\cdot(t^2,0)\subset\tilde{R} \quad \text{oder}$$

$$M=R\cdot(1,0)+R\cdot(t,1)\subset\tilde{R}.$$

(ii) $\varrho_1(M)=1$, $\varrho_2(M)=2$:

$$M=L_1:=Re_1+R\cdot((t,0)e_1+(0,1)e_2)\subset\tilde{R}^2 \quad \text{oder}$$

$$M=L_1+R\cdot(t^2,0)e_1.$$

(iii) $\varrho_1(M)=2$, $\varrho_2(M)=1$:

$$M=R\cdot(1,0)e_1+Re_2+R\cdot((t,0)e_1+(t^2,0)e_2)\subset\tilde{R}^2.$$

(iv) $\varrho_1(M)=2$, $\varrho_2(M)=2$:

$$M=L_2:=Re_1+Re_2+R\cdot((t,0)e_1+(t^2,0)e_2)\subset\tilde{R}^2 \quad \text{oder}$$

$$M=L_2+R\cdot(t^2,0)e_1 \quad \text{oder}$$

$$M=R\cdot(1,0)e_1+Re_2+R\cdot((t,0)e_1+(t^2,0)e_2)+R\cdot((t,0)e_2+(0,1)e_1)\subset\tilde{R}^2.$$

3. $r=3$

$(C,0)$ ist vom Typ D_n, n gerade, $R=k\left[\left[(t,t,0),\left(t^{\frac{n-2}{2}},0,t\right)\right]\right]$

(i) $M=i_*(M')$, wobei $i: C'\hookrightarrow C$ die Inklusion einer Vereinigung von höchstens zwei Zweigen von C bezeichnet und M' ein unzerlegbarer torsionsfreier Modul über dem lokalen Ring von $(C',0)$ ist.

(ii) $\varrho_1(M)=1$, $\varrho_2(M)=1$, $\varrho_3(M)=1$:

$$M=R+R\cdot(t^i,0,0)\subset\tilde{R}, \quad i=1,\dots,\frac{n}{2} \quad \text{oder}$$

$$M=R\cdot(1,1,0)+R\cdot(t^i,0,1)\subset\tilde{R}, \quad i=0,\dots,\frac{n-4}{2}.$$

(iii) $\varrho_1(M)=1$, $\varrho_2(M)=1$, $\varrho_3(M)=2$:

$$M=R\cdot e_1+R\cdot((t^i,0,0)e_1+(0,0,1)e_2)\subset\tilde{R}^2, \quad i=1,\dots,\frac{n-4}{2}.$$

Bemerkung. Inzwischen wurden die Auslander-Reiten Köcher der unzerlegbaren torsionsfreien Moduln über den einfachen ebenen Kurvensingularitäten von Dieterich u. Wiedemann [3] berechnet, s. auch [9].

Literatur

1. Arnol'd, V.I.: Critical points of smooth functions. Proc. Int. Congress Math. Vancouver 1974, Vol. 1, 19–39
2. Barth, W., Peters, Chr., Van de Ven, A.: Compact complex surfaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1984
3. Dietrich, E., Wiedemann, A.: The Auslander-Reiten quiver of a simple curve singularity. Preprint 1984
4. Durfee, A.: Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points. L'Enseignement Math. **25**, 131–163 (1979)
5. Green, E., Reiner, I.: Integral representations and diagrams. Mich. Math. J. **25**, 53–84 (1978)
6. Herzog, J.: Ringe mit nur endlich vielen Isomorphieklassen von maximalen unzerlegbaren Cohen-Macaulay-Moduln. Math. Ann. **233**, 21–34 (1978)
7. Jacobinsky, H.: Sur les ordres commutatifs avec un nombre fini de résaux indécomposables. Acta Math. **118**, 1–31 (1967)
8. Kirby, D., Tavallee, H.: On Cohen-Macaulay local rings of dimension one and embedding dimension two. Preprint, Southampton, Great Britain
9. Knörrer, H.: The indecomposable Cohen-Macaulay modules over simple hypersurface singularities (in Vorbereitung)

Eingegangen am 22. August 1984