Über die Biegung der Kreisplatte mit exzentrischer Einzellast.

Von

Erich Reissner in Berlin.

Das Problem, die Biegungsflächen einer dünnen elastischen Kreisplatte zu bestimmen, die längs des Randes gestützt und in einem Punkte innerhalb des Randes durch eine Einzelkraft P beansprucht ist (Greensche Funktionen), lautet in mathematischer Formulierung bekanntlich[1]) folgendermaßen:

Es ist eine Lösung der Gleichung

$$\Delta \Delta w = 0; \quad \Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \tag{1}$$

zu bestimmen, die folgenden Bedingungen genügt:

$$(w)_{r=1} = 0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=1} = 0, \tag{3}$$

$$w = \frac{P \varrho_0}{8 \pi N} |z - a|^2 \ln |z - a| + \zeta (r, \vartheta). \tag{4}$$

Dabei sind ν, ϱ_0, $0 \leqq a < 1$ und N Konstanten, $z = x + iy = re^{i\vartheta}$ und ζ eine Lösung von (1), die für $r \leqq 1$ keine Singularitäten aufweist.

Diese Aufgabe ist in geschlossener Form bisher nur für den Fall $\nu = \infty$, und zwar von J. H. Michell[2]) durch Inversion des zentralsymmetrischen Ansatzes gelöst worden, während für $\nu \neq \infty$, wo das Verfahren

---

[1]) A. E. H. Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4. ed. 1927; S. 489—491.

[2]) J. H. Michell, London Math. Soc. Proc. 1902; S. 223. — Die Annahme $\nu = \infty$ bedeutet, daß die Platte starr eingespannt ist. Beim Problem der gelenkig gestützten Platte ist ν die Querkontraktionszahl ($0 \leqq \nu \leqq 0{,}5$). Wenn man der Zahl $\nu > 0$ eine andere Bedeutung zulegt, kann man (3) auch als Randbedingung für eine elastisch eingespannte Platte ansehen. — Es sei noch die Bedeutung der Konstanten in (4) angegeben: ϱ_0 ist der Plattenradius, N die Biegungssteifigkeit der Platte, $a\varrho_0$ der Belastungsradius [das Koordinatensystem ist so gewählt, daß $\vartheta(P) = 0$] und $w\varrho_0$ die Biegungsfläche in wahrer Größe.

nicht zum Ziele führt, A. Föppl[3]) vermittels Reihenentwicklungen nach einer klassischen Methode von Clebsch[4]) eine Lösung gegeben hat.

Die vorliegende Note enthält eine Lösung der von Föppl behandelten Aufgabe in geschlossener Form.

Um diese zu finden, wird ausgegangen von der bekannten Tatsache, daß sich jede Lösung von (1) in der Form

$$w = r^2 \varphi_1 + x \varphi_2 + \varphi_3$$

mit

$$\Delta \varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

darstellen läst. Also ist auch

$$w = \Re \left\{ |z - a|^2 \ln \frac{z - a}{1 - a z} + (1 - r^2) f(z) \right\} \frac{P \varrho_0}{8 \pi N} \tag{5}$$

eine Lösung von (1). Man erkennt, daß sie die Bedingungen (2) und (4) bereits im Ansatz erfüllt, wenn $f(z)$ eine für $r \leqq 1$ regulär analytische Funktion ist. Die Bedingung (3) dient dazu, diese Funktion zu bestimmen.

Es ist zweckmäßig, die Bedingung (3) etwas umzuformen. Wegen (2) ist

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)_{r=1} = \left(\Delta w - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=1}.$$

Damit wird

$$\left(\Delta w - (1 - \nu) \frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=1} = 0. \tag{3}$$

Beachtet man, daß

$$\begin{aligned} \Delta \left(r^2 \Re \{f(z)\}\right) &= 4 \Re \left\{\frac{d}{dz} (z f(z))\right\}, \\ \Delta \left(x \Re \{f(z)\}\right) &= 2 \Re \left\{\frac{d}{dz} (f(z))\right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

so erhält man mit (5) aus (3) die folgende Gleichung zur Bestimmung von $f(z)$

$$\Re \left\{\frac{4 (1 - a^2)}{1 - a z} - (1 - a^2)(1 - \nu) - 4 z \frac{df}{dz} - 2 (1 + \nu) f(z)\right\}_{r=1} = 0. \tag{3a}$$

(3a) ist in bekannter Weise als eine Differentialgleichung für $f(z)$ aufzufassen[5]). Ihr allgemeines Integral ergibt sich mit einer willkürlichen

---

[3]) A. Föppl, Ber. d. Kgl. Bayr. Ak. d. Wiss. 1912; S. 155.

[4]) A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862.

[5]) Auf diesen direkten Schluß hat mich freundlicherweise Herr Prof. G. Hamel hingewiesen. Ursprünglich war die Lösung gefunden worden durch Ansetzen einer Potenzreihe für $f(z)$, deren Koeffizienten sich aus (3a) bestimmen, und Identifizierung der Reihe mit der Funktion (8).

Konstanten c und unter Weglassung einer bedeutungslosen rein imaginären additiven Konstanten zu

$$f(z) = c z^{-\frac{1+\nu}{2}} + 2(1-a^2)(az)^{-\frac{1+\nu}{2}} \int_0^{\sqrt{az}} \frac{u^\nu\, du}{1-u^2} - \frac{1-a^2}{2}\,\frac{1-\nu}{1+\nu}. \tag{8}$$

Wegen der vorausgesetzten Regularität von $f(z)$ ist $c = 0$.

Wenn man (8) in (5) einsetzt, wird die gesuchte Biegungsfläche

$$\begin{aligned} w = \frac{P\varrho_0}{8\pi N}\,\Re\Big\{ & |z-a|^2 \ln \frac{z-a}{1-az} \\ & + (1-a^2)(1-r^2)\Big[2(az)^{-\frac{1+\nu}{2}} \int_0^{\sqrt{az}} \frac{u^\nu\, du}{1-u^2} - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)}\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Nun läßt sich das Integral in (9) in allen den Fällen geschlossen ausintegrieren, in denen ν eine rationale Zahl ist, also praktisch immer, und damit hat man in (9) die gesuchte Lösung der Aufgabe in geschlossener Form.

Für den Grenzfall $\nu = 0$ z. B. erhält man in reeller Schreibweise

$$\begin{aligned} w = \frac{P\varrho_0}{16\pi N}\Big\{ & (r^2+a^2-2ar\cos\vartheta)\ln\frac{r^2+a^2-2ar\cos\vartheta}{1+a^2r^2-2ar\cos\vartheta} \\ & + (1-a^2)(1-r^2)\Big[\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{ar}}\ln\frac{1+ar+2\sqrt{ar}\cos\frac{\vartheta}{2}}{1+ar-2\sqrt{ar}\cos\frac{\vartheta}{2}} \\ & + \frac{2\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{ar}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{2\sqrt{ar}\sin\frac{\vartheta}{2}}{1-ar}\Big) - 1\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{9a}$$

Für $\nu = \frac{1}{3}$ ist

$$\begin{aligned} w = \frac{P\varrho_0}{8\pi N}\,\Re\Big\{ & |z-a|^2\ln\frac{z-a}{1-az} \\ & + (1-a^2)(1-r^2)\Big[-\frac{1}{4} + \frac{2}{\sqrt[3]{az}}\Big(\ln\frac{(1+\sqrt[3]{az})^2-\sqrt[3]{az}}{1-\sqrt[3]{az}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{az}}{2+\sqrt[3]{az}}\Big)\Big)\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{9b}$$

Für die Durchbiegung unter dem Lastangriffspunkt (Biegungspfeil) ergibt sich daraus

$$\nu = 0;\; w(a,0) = \frac{P\varrho_0}{16\pi N}(1-a^2)^2\Big[\frac{2}{a}\ln\frac{1+a}{1-a} - 1\Big],$$

$$\nu = \frac{1}{3};\; w(a,0) = \frac{P\varrho_0}{8\pi N}(1-a^2)^2\Big\{\frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}\Big[\ln\frac{1+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}}{1-\sqrt[3]{a^2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{a^2}}{2+\sqrt[3]{a^2}}\Big] - \frac{1}{4}\Big\}.$$

Man kann als einfache Verallgemeinerung des vorstehenden Lösungsgedankens den folgenden Satz aussprechen:

Die Randwertaufgabe der Bipotentialtheorie für den Kreis läßt sich im Falle gegebener Funktionsrandwerte auf eine Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den Kreis zurückführen, deren Art von der zweiten Randbedingung für die Bipotentialfunktion abhängt.

Dieser Satz kann mit Vorteil noch für andere technisch wichtige Aufgaben aus der Theorie der durch eine oder mehrere Einzelkräfte und stetige Belastung beanspruchten Kreisplatte verwendet werden. Es ist beabsichtigt, dies an anderer Stelle auszuführen.

(Eingegangen am 18. 5. 1935.)