Über die singulären Randpunkte eines konvexen Körpers[1]).

Von

K. Reidemeister in Hamburg.

$\mathfrak{K}$ sei ein konvexer Körper mit der Oberfläche $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}$ eine Kugel mit dem Mittelpunkt P_0 und mit der Oberfläche $\mathfrak{O}$, welche $\mathfrak{K}$ im Innern enthält, und jedem Punkte P von $\mathfrak{R}$ sei umkehrbar eindeutig ein Punkt π von $\mathfrak{O}$ durch Projektion von P_0 aus, der im Innern von $\mathfrak{K}$ liege, zugeordnet. *Dann ist das Lebesguesche Maß der Punktmenge* $\mathfrak{f}$ *in* $\mathfrak{O}$, *welche alle und nur die Punkte* π_k *und* π_e *enthält, die Bildpunkte von Kantenpunkten* P_k *und Eckpunkten* P_e *sind, gleich null.*

Zunächst seien folgende Zeichen eingeführt: Die einem jeden Kantenpunkt P_k zugeordnete ausgezeichnete Gerade, welche allen Stützebenen durch P_k gemeinsam ist, heiße g_k. Der Winkel der Extremalstützebenen durch P_k, welche $\mathfrak{K}$ enthält, heißt α_k. Die abzählbar vielen Geraden durch einen Eckpunkt P_e, welche sämtliche Kantenpunkte aus der Oberfläche des Projektionsraumes von P_e enthalten, mögen mit $g_{e1}, g_{e2}, \ldots$, die bzw. zu diesen Geraden gehörigen Winkel der Extremalstützebenen mit $\alpha_{e1}, \alpha_{e2}, \ldots$ bezeichnet werden. Es gibt nur endlich viele $\alpha_{en} < \alpha_0 < 180^0$.

Der Beweis beruht im wesentlichen auf den beiden folgenden Sätzen: 1. Konvergiert die Punktfolge $P_1, P_2, \ldots$ gegen P und ist $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge von Stützebenen von P_1, P_2 usw., so sind die *Häufungselemente* der Folge $a_1, a_2, \ldots$ *Stützebenen durch* P, und zwar solche, *die mindestens eine Gerade mit dem Projektionsraummantel von* P *gemeinsam haben.*

2. Ist $P_1, P_2, \ldots$ eine Folge gegen P konvergierender Punkte, deren Projektionsräume je mindestens eine g_k oder g_{e1} enthalten, sind diesen Geraden $g_1, g_2, \ldots$ bzw. die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ zugeordnet und bleibt

---

[1]) Über die Nomenklatur vgl. Minkowski, „Zur Theorie der konvexen Körper" (§ 13—15), Ges. Werke 2, S. 161—170. Vgl. ferner W. Blaschke, „Kreis und Kugel" 1916, S. 82.

stets $\alpha_n \leqq \alpha_0$, so *muß auch* P mindestens *eine* g_k (oder g_{en}) *besitzen, der ein Winkel* $\alpha \leqq \alpha_0$ *zugeordnet ist* und die *Häufungselement der Menge* $g_1, g_2, \ldots$ *ist.*

Der erste Satz leuchtet unmittelbar ein, der zweite läßt sich leicht aus dem ersten folgern.

Sei nunmehr $\mathfrak{f}_1$ die Menge derjenigen Punkte in $\mathfrak{O}$, welche Bildpunkte von solchen P_k und P_e sind, die mindestens eine g_k bzw. g_{en} mit den zugeordneten Winkeln α_k bzw. α_{en} besitzen derart, daß $\alpha_k \leqq \alpha_1$, $\alpha_{en} \leqq \alpha_1 < 180^0$ ist. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{f}_1$ abgeschlossen. Sei π_k das Bild eines P_k und γ_k der Hauptkreis durch π_k, der durch die durch P_0 und g_k gehende Ebene auf $\mathfrak{O}$ ausgeschnitten wird. Seien β_k und β_k' zwei weitere Hauptkreise durch π_k, welche mit γ_k den spitzen Winkel ε bilden. Der Winkelraum (β_k, β_k'), der γ_k enthält, heiße Winkelraum (1), der komplementäre Winkelraum (2). Dann kann ich zu jedem ε ein größtes ϱ_k so bestimmen, daß innerhalb der mit dem Radius ϱ_k um π_k geschlagenen Kugel alle Punkte von $\mathfrak{f}_1$ innerhalb des Winkelraumes (1) liegen. Denn angenommen, es gäbe in (2) eine Folge $P_1, P_2, \ldots$ aus $\mathfrak{f}_1$, die gegen P_k konvergierte, so müßten sich $g_1, g_2, \ldots$ nach Satz 2 gegen g_k häufen und die Extremalstützebenen von $P_1, P_2, \ldots$ würden zu Häufungselementen solche Ebenen durch g_k besitzen, die innere Punkte von $\mathfrak{K}$ enthalten. Analog bestimme ich zu jedem π_e ein ϱ_e. An Stelle des einen Winkelraumes (1) treten für π_e endlich viele Winkelräume. Nun sei zu einem festen ε für jeden Punkt von $\mathfrak{f}_1$ ein solches ϱ_k bzw. ϱ_e bestimmt; da die Menge $\mathfrak{f}_1$ abgeschlossen und die ϱ_k bzw. ϱ_e stetige Funktionen der π_k bzw. π_e sind, gibt es einen kleinsten Radius δ unter ihnen. Jedem Punkt π_k und π_e werde als Umgebung das innerhalb der Kugel mit dem Radius δ um $\pi_k(\pi_e)$ liegende Gebiet von $\mathfrak{O}$ zugeordnet. Dann reichen endlich viele dieser Gebiete aus, um $\mathfrak{f}_1$ zu überdecken. Ist π_1 und π_2 Mittelpunkt eines solchen Gebietes, so können wir die endlich vielen Umgebungen stets so ausgewählt denken, daß die Entfernung $\overline{\pi_1 \pi_2} \geqq \delta$ ist. Mithin haben die um dieselben endlich vielen Mittelpunkte der zur Überdeckung von $\mathfrak{f}_1$ benutzten Gebiete mit dem Radius $\frac{\delta}{2}$ geschlagenen Kugeln keine inneren Punkte gemeinsam, so daß sich die Ungleichung

$$\vartheta(\delta)\, n \cdot \pi \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 < 4\pi R^2, \quad n \cdot \delta^2 < 4\, \frac{R}{\vartheta(\delta)}$$

ergibt, wo R der Radius der Kugel $\mathfrak{B}$, n die Anzahl der zur Überdeckung von $\mathfrak{f}_1$ benutzten Gebiete und $\vartheta(\delta)$ eine Funktion von δ ist, für die $\lim\limits_{\delta=0} \vartheta(\delta) = 1$ und $\vartheta(\delta) > 0$, wenn $\delta < 2R$, gilt.

Nun schneiden wir aus jeder Umgebung diejenigen Winkelräume heraus, welche sicher keine Punkte von $\mathfrak{f}_1$ erhalten. Dadurch erhalten wir ein $\mathfrak{f}_1$ überdeckendes Gebiet von dem Inhalte $n \cdot \eta \cdot \delta^2 < 4\eta \cdot \frac{R}{\vartheta(\delta)}$, wo η nur von ε abhängt und mit ε unendlich klein wird. Mithin ist das Inhaltsmaß von $\mathfrak{f}_1$ gleich null.

Folglich ist das Lebesguesche Maß von $\mathfrak{f}$ gleich null. Denn ist $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ eine Folge von Zahlen, welche gegen 180 konvergiert, und $\alpha_n < 180$, so kann ich jedem α_n ein $\mathfrak{f}_n$ zuordnen, dessen Inhaltsmaß gleich null ist.

Verstehe ich unter $\mathfrak{f}_0$ die abzählbar vielen π_e, für die der Projektionsraum von P_e keine Kantenpunkte als Randpunkte enthält, und unter $(\mathfrak{f}_n - \mathfrak{f}_{n-1})$ die Punkte, welche in $\mathfrak{f}_n$, aber nicht in $\mathfrak{f}_{n-1}$ enthalten sind, so ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_1 + (\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1) + \ldots$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Der in „*Kreis und Kugel*"[2]) angedeutete Beweis beruht auf der Tatsache, daß die partielle Abteilung $\frac{\partial f}{\partial x}$ einer konvexen Funktion $f(x, y)$ stetig als Funktion von x und y ist, sobald sie es als Funktion von x allein ist — was sich aus denselben Überlegungen, die zu Satz 2 dieser Note führten, ergibt — und erfolgt dann sehr kurz unter Benutzung eines Satzes von *Fubini*.

Daneben verdient der hier gegebene Beweis Beachtung nicht nur, weil er mit elementaren Hilfsmitteln auskommt, sondern weil sich aus ihm auch sofort noch folgendes ergibt:

Ist $\mathfrak{c}$ eine stetige Folge von Kantenpunkten, so besitzt $\mathfrak{c}$ stetige Tangenten; die g_k eines P_k ist Tangente an die höchstens abzählbar vielen Kurven $\mathfrak{c}$, welche durch P_k hindurchgehen.

---

[2]) Siehe Anm. [1]).

(Eingegangen am 9. 11. 1920.)