Numer. Math. 25, 149—152 (1976)

Optimale Approximation mit Nebenbedingungen an lineare Funktionale auf periodischen Funktionen

W. Knauff und R. Kreß

Eingegangen am 1. April 1974

Optimal Approximation with Side Conditions to Linear Functionals on Periodic Functions

Summary. In a general Hilbert space of periodic functions numerical approximations with equidistant nodes for any bounded linear functional are given which are of minimal error norm in the class of approximations being exact for certain trigonometric polynomials. In examples optimal quadrature formulas with such side conditions are considered.

Numerische Approximationen von beschränkten linearen Funktionalen auf normierten Funktionenräumen durch gewichtete Summen von Funktionswerten an geeigneten Stützstellen werden optimal genannt, wenn ihre Fehlernorm minimal ist bezüglich der Gewichte. In [1] haben die Verfasser in gewissen Hilberträumen aus 2π-periodischen Funktionen bei festen äquidistanten Stützstellen solche optimalen Approximationen an beliebige beschränkte lineare Funktionale explizit angegeben. Im Gegensatz zu den in der Praxis gebräuchlicheren, auf der trigonometrischen Interpolation beruhenden, numerischen Approximationen werten die optimalen Approximationen das Funktional für trigonometrische Polynome im allgemeinen nicht exakt aus. Insbesondere quadrieren die optimalen Integrationsformeln für $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ die Konstanten nicht exakt.

Zur Behebung dieses in der Praxis mitunter unerwünschten Umstands bietet es sich an, solche Approximationen zu benutzen, die minimale Fehlernorm besitzen in der Klasse aller Approximationen durch Linearkombinationen von Punktfunktionalen, welche für gewisse trigonometrische Polynome das betrachtete Funktional exakt darstellen. In dieser Note werden im Anschluß an [1] optimale Approximationen an beliebige beschränkte lineare Funktionale unter solchen Nebenbedingungen explizit angegeben. Dabei ergibt sich ein bemerkenswerter Aufbau dieser optimalen Formeln mit Nebenbedingungen aus den beiden Grenzfällen der optimalen Approximation ohne Nebenbedingungen einerseits und der Interpolationsapproximation andererseits.

Es sei H ein wie in [1] beschriebener Hilbertraum aus 2π-periodischen komplexen Funktionen mit orthogonaler Basis $\{f_m: m\in\mathbb{Z}\}$, wobei $f_m: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definiert ist durch

$$f_m(z) := e^{imz},\ m\in\mathbb{Z}.$$

Bei ungeradem[1] $n=2\nu+1\in\mathbb{N}$ wählen wir äquidistante Stützstellen $x_k:=2\pi k/n$, $k=1,\ldots,n$. Zur Beschreibung der Nebenbedingungen sei

$$Q\subset\{-\nu,\ldots,\nu\} \quad \text{und} \quad R:=\{-\nu,\ldots,\nu\}\setminus Q.$$

Zu einem beschränkten linearen Funktional $U:H\to\mathbb{C}$ betrachten wir Approximationen $U_n:H\to\mathbb{C}$ durch gewichtete Summen

$$U_n(f):=\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k),$$

welche für die Funktionen $f_q\in H$, $q\in Q$, das Funktional U exakt auswerten, d.h. welche die Nebenbedingungen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_q(x_k)=u_q, \qquad q\in Q, \tag{Q}$$

erfüllen, wobei zur Abkürzung $u_m:=U(f_m)$, $m\in\mathbb{Z}$, gesetzt ist. Wir suchen Approximationen U_n, deren Fehler $E_n:=U-U_n$ minimale Norm besitzt, und nennen die Approximation

$$U^0_{n,Q}(f)=\sum_{k=1}^{n} a^0_{k,Q} f(x_k)$$

optimal unter den Nebenbedingungen (Q), wenn für ihren Fehler $E^0_{n,Q}=U-U^0_{n,Q}$ gilt:

$$\|E^0_{n,Q}\|=\inf\{\|E_n\|: a_k\in\mathbb{C}\wedge \sum_{k=1}^{n} a_k f_q(x_k)=u_q,\ q\in Q\}.$$

Für $Q=\emptyset$ ist die in [1] beschriebene optimale Approximation U^0_n ohne Nebenbedingungen (mit Fehler E^0_n) enthalten, für $R=\emptyset$ die ebenfalls in [1] betrachtete Interpolationsapproximation U^{int}_n (mit Fehler E^{int}_n), deren Gewichte durch die Nebenbedingungen schon eindeutig festliegen.

Bezeichnen $u\in H$ und $v_{x_k}\in H$ die Repräsentanten des Funktionals U und der Punktfunktionale $\delta_{x_k}: f\to f(x_k)$, $k=1,\ldots,n$, so besitzt der Fehler E_n die Norm

$$\|E_n\|=\|u-\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}\, v_{x_k}\|.$$

Setzen wir $V_n:=\operatorname{span}\{v_{x_1},\ldots,v_{x_n}\}$ und $V_{n,Q}:=\{v\in V_n: (f_q,v)=u_q,\ q\in Q\}$, so ist die Approximation $U^0_{n,Q}$ an U offenbar optimal unter den Nebenbedingungen (Q) genau dann, wenn

$$v^0=\sum_{k=1}^{n}\overline{a^0_{k,Q}}\, v_{x_k}$$

beste Approximierende an u bezüglich $V_{n,Q}$ ist. Da $V_{n,Q}$ eine konvexe und vollständige Teilmenge des Hilbertraumes H ist, existiert genau eine Lösung dieses Approximationsproblems.

Mit Hilfe der orthogonalen Basis

$$w_q:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{iqx_k}\, v_{x_k}, \qquad q=-\nu,\ldots,\nu,$$

[1] Wir verzichten auf die Darstellung des weitgehend analogen Falles gerader Stützstellenzahl.

von V_n (vgl. Lemma 1.1 in [1]), findet man für die lineare Mannigfaltigkeit $V_{n,Q}$ die Darstellung

$$V_{n,Q} = \{v_Q + w : w \in W_R\},$$

wobei

$$v_Q := \sum_{q \in Q} \overline{u_q}\, w_q \quad \text{und} \quad W_R := \operatorname{span}\{w_q : q \in R\}$$

gesetzt ist. Folglich ist v^0 die beste Approximierende an u bezüglich $V_{n,Q}$ genau dann, wenn $v_R := v^0 - v_Q$ die beste Approximierende an $u - v_Q$ bezüglich des linearen Teilraumes W_R von V_n ist. Somit gewinnt man v_R unmittelbar als orthogonale Projektion von $u - v_Q$ auf W_R, woraus sich die optimalen Gewichte $a^0_{k,Q}$ und die minimale Fehlernorm $\|E^0_{n,Q}\|$ ermitteln lassen. Die leichte Rechnung führt bei Verwendung von Satz 2.2 aus [1] auf den folgenden

Satz. *Zu jedem beschränkten linearen Funktional U auf H gibt es genau eine optimale Approximation $U^0_{n,Q}$ an U unter den Nebenbedingungen (Q). Deren Gewichte lauten*

$$a^0_{k,Q} = \frac{1}{n} \sum_{q \in Q} u_q e^{-iqx_k} + \frac{1}{n} \sum_{q \in R} \frac{(w_q, u)}{\|w_q\|^2} e^{-iqx_k}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

und für ihre Fehlernorm gilt

$$\|E^0_{n,Q}\|^2 = \|E^0_n\|^2 + \sum_{q \in Q} \frac{|(w_q, u) - u_q \|w_q\|^2|^2}{\|w_q\|^2} = \|E^{\mathrm{int}}_n\|^2 - \sum_{q \in R} \frac{|(w_q, u) - u_q\|w_q\|^2|^2}{\|w_q\|^2}.$$

Wir bemerken noch, daß sich die Größen $\|w_q\|^2$ und (w_q, u) mit Hilfe von Fourierentwicklungen nach der Hilbert-Basis $\{f_m / \|f_m\| : m \in \mathbb{Z}\}$ für H in einfacher Weise durch die Zahlen $\|f_m\|^2$ und u_m, $m \in \mathbb{Z}$, ausdrücken lassen, vgl. (1.31) und (1.32) von [1].

Als Anwendung für unseren Satz betrachten wir optimale Quadraturformeln. Besonders einfach gelagert sind die Verhältnisse für das Funktional

$$U(f) := \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

wofür wir $u_0 = 2\pi$ und $u_m = 0$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, haben. Hiermit folgt aus unserem Satz, daß nur zwei verschiedene optimale Quadraturformeln mit Nebenbedingungen auftreten, je nachdem ob $0 \in Q$ oder $0 \notin Q$, d.h. ob Konstante exakt integriert werden sollen oder nicht. Falls $0 \in Q$ ist, ergibt sich immer der Grenzfall der Interpolationsapproximation, d.h. die Rechteckregel; falls $0 \notin Q$ ist, ergibt sich stets der andere Grenzfall der optimalen Quadraturformel ohne Nebenbedingungen; vgl. Satz 3.1 aus [1]. Dort befinden sich auch Tabellen für die Gewichte und Fehlernormen der beiden Quadraturformeln in zwei Hardyschen und einem Sobolewschen Raum. Im Unterschied hierzu muß die Quadraturformel, die z.B. bezüglich der Sobolewschen Halbnorm

$$\|f\| := \left[\int_0^{2\pi} |f^{(m)}(x)|^2\, dx\right]^{1/2}, \quad m \in \mathbb{N},$$

optimal ist, stets Konstante exakt integrieren, da die Konstanten im Kern dieser Halbnorm enthalten sind. Solche optimalen Formeln lassen sich mit einer anderen Methodik durch Splineinterpolation charakterisieren, vgl. etwa [2].

Für das ebenfalls in [1] behandelte Funktional

$$U(f) := \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} f(x)\, dx$$

vermerken wir abschließend, daß in den voranstehend erwähnten Hilberträumen die optimale Quadraturformel ohne Nebenbedingungen die Konstanten bereits exakt integriert; darüber hinaus werden sogar alle geraden Funktionen des jeweiligen Hilbertraumes exakt integriert. Falls R, $Q \neq \emptyset$ und $Q \neq \{0\}$ gilt, ergeben sich hier jedoch von den Grenzfällen verschiedene optimale Quadraturformeln mit Nebenbedingungen.

Literatur

1. Knauff, W., Kreß, R.: Optimale Approximation linearer Funktionale auf periodischen Funktionen. Numer. Math. **22**, 187–205 (1974)
2. Golomb, M.: Approximation by Periodic Spline Interpolants on Uniform Meshes. J. Approximation Theory **1**, 26–65 (1968)

Dr. W. Knauff und Prof. Dr. R. Kreß
Lehrstühle für Numerische
und Angewandte Mathematik
Lotzestraße 16—18
D-3400 Göttingen
Bundesrepublik Deutschland