Math. Ann. 298, 253–273 (1994)

Mathematische
Annalen

3-Instantons et réseaux de quadriques

L. Gruson[1] et M. Skiti[2]

[1] Département de Mathématiques, Université de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France
[2] Département de Mathématiques, Université de Nancy I, F-54506 Vandœuvre les Nancy, France

Reçu le 24 Mai 1993

Introduction

Soit $\mathbf{P}$ l'espace projectif de dimension 3 sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{M}_n$ l'espace des modules des fibrés vectoriels stables de rang 2 sur $\mathbf{P}$ de classes de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 = n$ et $\mathbb{I}_n$ l'ouvert de $\mathbb{M}_n$ formé des fibrés instantons (dits alors n-instantons). $\mathbb{I}_1$ $(= \mathbb{M}_1)$ est identifiée dans [B1] au complémentaire de la grassmannienne des droites de $\mathbf{P}$ dans $\mathbf{P}^5$. $\mathbb{I}_2$ $(= \mathbb{M}_2)$ est décrite [H] en termes de paires de Poncelet (couple de coniques avec un triangle circonscrit à l'une et inscrit à l'autre). $\mathbb{I}_3$ est l'une des deux composantes irréductibles rationnelles de $\mathbb{M}_3$ [E-S]. On donne ici une description birationnelle de $\mathbb{I}_3$ en terme de réseaux de quadriques de $P^\vee$. Plus précisément, notant $\mathfrak{R}$ la variété des réseaux de quadriques de $\mathbf{P}^\vee$ (qui s'identifie à une grassmannienne $G(2, 9)$) et $\mathfrak{R}_1$ (resp. $\mathfrak{R}_2$) l'hypersurface des réseaux contenant une quadrique de $\mathbf{P}^\vee$ dégénérée en 2 plans (resp. celle des réseaux de Lüroth (voir définition par. 5), le but de ce travail est de décrire un isomorphisme de l'ouvert $\mathfrak{U}$ des fibrés de $\mathbb{I}_3$ sans droite trisauteuse sur l'ouvert de $\mathfrak{R}$, complémentaire de $(\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2)$. Donnons un plan succinct de la démonstration. Au premier paragraphe, on décrit une stratification de $\mathbb{I}_3$ selon la nature de la variété des droites trisauteuses. Au deuxième paragraphe, on associe à tout fibré (de $\mathfrak{U}$) un réseau R de quadriques de $\mathbf{P}^\vee$ et on montre que la connaissance de R permet de retrouver E (suivant une suggestion de Ein). Dans le troisième paragraphe, on traduit en termes de réseaux de quadriques les "objets de saut" associés à E. Le quatrième paragraphe, point critique de la démonstration, décrit explicitement en termes du réseau R la forme symplectique β sur $H^1(\Omega \otimes E)$ (terme central de la monade de Beilinson) induite par celle de E. Lorsque R n'est pas dans $\mathfrak{R}_1$ cette forme est non nulle et provient de l'inverse d'un isomorphisme $\mathrm{sym}_2(R) \to \Lambda^2 V (V = H^0(O_{\mathbf{P}}(1)))$ dont on donne une interprétation géométrique simple; la construction est inspirée d'un travail de Tyurin [T]; la forme β est alors de rang 6 ou 8. La fin de la démonstation (par. 5) consiste à vérifier que β est de rang 6 si et seulement si R appartient à $\mathfrak{R}_2$. Au par. 6, on caractérise le réseau général de l'hypersurface $\mathfrak{R}_2$ et on étudie la composante du bord de $\mathbb{I}_3$ déduite de cette dernière.

1 Une stratification de $\mathbb{I}_3$

Rappelons que si E est un fibré instanton, sa restriction à une droite L est isomorphe à $O_L(-k) \oplus O_L(k)$ pour un unique entier naturel k, et que les droites L telles que $k = 0$ forment un ouvert de Zariski non vide de la grassmannienne $\mathbf{G}$ des droites de $\mathbf{P}$. Si $k \geqq 1$, on dit que L est k-sauteuse. L'ensemble des droites b-sauteuses pour $b \geqq k$ est le support de $\mathscr{R}^1 q_* p^*(E(k-2))$ où, selon l'usage, on note $F \subset \mathbf{G} \times \mathbf{P}$ la variété d'incidence, p (resp. q) la projection naturelle sur $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{G}$). Si E un 3-Instanton, la variété des droites trisauteuses est définie par le $0^{\text{iéme}}$ idéal de Fitting du $O_{\mathbf{G}}$-module $\mathscr{R}^1 q_* p^*(E(1))$; la longueur de ce dernier détermine une stratification de $\mathbb{I}_3$. Remarquons que lorsque $h^0(E(1)) = 0$, E a la cohomologie naturelle, en particulier $h^1(E) = 4$, $h^1(E(1)) = 1$ et $h^1(E(t)) = 0$ pour $t \geqq 2$.

1.1 Lemme. *On suppose que* $h^0(E(1)) = 0$. *On a l'alternative*:
(i) *La multiplication*:
$$\xi : H^1(E) \otimes H^0(O_{\mathbf{P}}(1)) \to H^1(E(1))$$
est une forme bilinéaire non dégénérée, ou:
(ii) $\mathscr{R}^1 q_* p^*(E(1))$ *est de longueur* 1.

Preuve. La résolution de O_F dans $\mathbf{G} \times \mathbf{P}$ est
$$0 \to O_{\mathbf{G}\times\mathbf{P}}(-1,-2) \to q^*(\mathscr{K}) \otimes p^*(O_{\mathbf{P}}(-1)) \to O_{\mathbf{G}\times\mathbf{P}} \to O_F \to 0 .$$
L'hyper-image directe par q de cette résolution tordue par $p^*(E(1))$ donne la suite exacte:
$$H^1(E) \otimes \mathscr{K} \to H^1(E(1)) \otimes O_{\mathbf{G}} \to \mathscr{R}^1 q_* p^*(E(1)) \to 0 .$$
La flèche de gauche s'insère dans le diagramme commutatif:
$$\begin{tikzcd} H^1(E) \otimes \mathscr{K} \arrow[r] \arrow[d] & H^1(E(1)) \otimes O_{\mathbf{G}} \arrow[d, equal] \\ V \otimes H^1(E) \otimes O_{\mathbf{G}} \arrow[r] & H^1(E(1)) \otimes O_{\mathbf{G}} . \end{tikzcd}$$
En identifiant $H^1(E(1))$ à $\mathbb{C}$, on a $\mathscr{R}^1 q_* p^*(E(1)) = O_X$ où X est un sous-schéma de $\mathbf{G}$. Supposons que ξ dégénère et soit $h \in V - \{0\}$ annulant ξ et H le plan de $\mathbf{P}$ d'équation h. On a $H^1(E|_H(1)) = \mathbb{C}$ et $h^1(E|_H) = 2$, sinon (la suite $\{h^1(E|_H(i))\}_{i \geqq -1}$ étant strictement décroissante) on aurait $h^1(E|_H(-1)) \geqq 4$ donc E serait non stable, contrairement à l'hypothèse que E est instanton. Il en résulte que l'application linéaire:
$$V/\mathbb{C}.h \otimes H^1(E|_H) \to \mathbb{C}$$
déduite de ξ admet un noyau dans $V/\mathbb{C}.h$ (qui est de dimension 3), c'est l'équation d'une droite trisauteuse pour E. Celle ci est unique dans H sinon $h^0(E|_H) \geqq 2$ et H serait non stable pour E. Ainsi le noyau de ξ dans V est de dimension 2 et définit une droite L trisauteuse pour E.

Montrons que X se réduit au point l de G correspondant à L. Le choix d'un supplémentaire W' de W permet d'identifier un voisinage de l dans G à l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, W')$ (coordonnées locales). Si X n'est pas réduit au point l, il contient le sous schéma Y de $\mathbf{G}$ de longueur 2 associé à un vecteur tangent non nul

u de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, W')$. Si t est une uniformisante pour Y, le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} H^1(E)\otimes\mathscr{K}|_Y & \xrightarrow{0} & O_Y \\ \downarrow & & \| \\ V\otimes H^1(E)\otimes O_Y & \xrightarrow{\xi} & O_Y \end{array}$$

induit le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^1(E)\otimes t\mathscr{K}|_Y & \xrightarrow{0} & tO_Y \\ \downarrow & & \| \\ V\otimes H^1(E)\otimes tO_Y & \xrightarrow{\xi} & tO_Y \, . \end{array}$$

En identifiant tO_Y à $\mathbb{C}$, on identifie $t\mathscr{K}|_Y$ au graphe de u qui est distinct de W. Comme ξ s'annule sur ce graphe, on a une contradiction avec le fait que le noyau de ξ est W.

1.1.1 **Proposition.** *Lorsque ξ est non dégénérée (cas* (i) *du lemme précédent) $E(2)$ est engendré par ses sections.*

Preuve. Tout d'abord E est 3-régulier ($h^i(E(3-i)=0$ pour $i=1, 2$ et 3) et il suffit de voir que $h^1(\Omega\otimes E(3))$ est nul. On a la suite exacte:

$$0\to \Lambda^4 V\otimes E(-1)\to\Lambda^3 V\otimes E\to\Lambda^2 V\otimes E(1)\to\Omega\otimes E(3)\to 0\,.$$

Comme $h^2(E(-1))=h^3(E(-1))=0$, on en déduit une suite exacte:

$$\Lambda^3 V\otimes H^1(E)\to\Lambda^2 V\otimes H^1(E(1))\to H^1(\Omega\otimes E(3))$$

et la flèche de gauche est surjective car, ξ étant non dégénérée, elle s'identifie à la multiplication extérieure:

$$V^\vee\otimes V^\vee\to\Lambda^2 V^\vee\,.$$

c.q.f.d.

1.1.2 **Proposition.** *Lorsque $\mathscr{R}^1 q_* p^*(E(1))$ est de longueur* 1 *(cas* (ii) *du lemme précédent) E* (2) *admet une section lisse.*

Preuve. Soit L la droite trisauteuse pour E (i.e. $E|_L=O_L(-3)\oplus O_L(3)$) et $\mathfrak{K}$ le noyau de la composée:

$$E\to E\otimes O_L\to O_L(-3)\,.$$

Lemme. *$\mathfrak{K}(2)$ est engendré par ses sections.*

Preuve. On a les deux suites exactes:

$$0\to E\otimes I_L\to\mathfrak{K}\to O_L(3)\to 0 \qquad (1)$$

$$0\to E(-2)\to E^2(-1)\to E\otimes I_L\to 0\,. \qquad (2)$$

Montrons que $H^1(\mathfrak{R}(1)) = 0$: on a $H^2(\mathfrak{R}(1)) = H^2(E \otimes I_L(1))$ d'aprés la suite exacte (1), et par la suite exacte (2) on a $H^2(\mathfrak{R}(1)) = 0$; la suite exacte de cohomologie:

$$H^0(O_L(-2) \to H^1(\mathfrak{R}(1)) \to H^1(E(1)) \to H^1(O_L(-2) \to 0$$

montre alors l'assertion. Les suites (1) et (2) montrent que $H^2(\mathfrak{R}) = H^3(\mathfrak{R}(-1)) = 0$. Donc $\mathfrak{R}$ est 2-régulier d'où le lemme.

Considérons l'éclatement

$$p_L : \tilde{\mathbf{P}} \to \mathbf{P}$$

de $\mathbf{P}$ le long de L et le transformé strict $\tilde{\mathfrak{R}}$ de $\mathfrak{R}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}$, c'est un $O_{\tilde{\mathbf{P}}}$-module localement libre et le lemme montre que $\tilde{\mathfrak{R}} \otimes p_L^*(O_{\mathbf{P}}(2))$ est engendré par ses sections, si s est une section assez générale de $\tilde{\mathfrak{R}} \otimes p_L^*(O_{\mathbf{P}}(2))$ elle est lisse et son intersection avec le diviseur exceptionnel de $\tilde{\mathbf{P}}$ (isomorphe à la quadrique $L \times L^\vee$ où $L^\vee$ est la droite orthogonale à L dans $\mathbf{P}^\vee$) est formée de 5 points deux à deux distincts dans L. Le lieu des zéros de s vu comme section de $E(2)$ est donc une courbe lisse de $\mathbf{P}$. c.q.f.d.

1.2. Supposons $H^0(E(1)) \neq 0$, c'est la situation bien connue des fibrés de 't Hooft, deux autres cas sont possibles:

cas (iii) $H^0(E(1)) = 1$, dans ce cas E admet deux droites trisauteuses (éventuellement confondues) L' et L'' et $\mathscr{R}^1 q_* p^*(E(1)) = \mathbb{C}_{L'} \oplus \mathbb{C}_{L''}$. De tels fibrés forment une famille irréductible de dimension 19, la section de $E(1)$ est formée de 4 droites (non tracées sur une quadrique).

cas (iv) $H^0(E(1)) = 2$, dans ce cas les droites trisauteuses pour E forment un système de générateurs d'une quadrique i.e. une conique C de $\mathbf{G}$, et $\mathscr{R}^1 q_* p^*(E(1)) = O_C(1)$. De tels fibrés forment une famille irréductible de dimension 15.

1.3. Les propositions précédentes permettent de retrouver simplement l'irréductibilité de $\mathbb{I}_3$. En effet soit l'ouvert $\mathfrak{H}$ ($\subset \mathscr{H}_{7,1}$) du schéma de Hilbert, formé des courbes elliptiques de $\mathbf{P}$ de degré 7 lisses non tracées sur une quadrique; $\mathfrak{H}$ est lisse, connexe et on peut définir un morphisme de $\mathfrak{H}$ dans $\mathbb{I}_3$ qui à une courbe C de cet ouvert associe le fibré E de $\mathbb{I}_3$ telle que C soit une section de $E(2)$.

Définissons ce morphisme. Soit $\mathscr{C} \subset \mathfrak{H} \times \mathbf{P}$ la courbe universelle, $\mathscr{E}xt^1(J_{\mathscr{C}}, O_{\mathbf{P}}(-4))$ est un $O_{\mathscr{C}}$-module inversible dont la fibre (au-dessus des points de $\mathfrak{H}$) est l'image réciproque de son image directe $\mathscr{L}$ sur $\mathfrak{H}$. On a $\mathscr{E}xt^1(J_{\mathscr{C}}, O_{\mathbf{P}}(-4)) = O_{\mathfrak{H} \times \mathbf{P}}$ ce qui définit une suite exacte:

$$0 \to \mathscr{L} \otimes O_{\mathbf{P}}(-4) \to \mathscr{E} \to J_{\mathscr{C}} \to 0$$

où $\mathfrak{H} \times \mathbb{P}$ est un fibré de rang 2 sur $\mathscr{E}$ Le morphisme annoncé est alors défini par $\mathscr{E}$.

Les propositions précédentes montrent que l'image de ce morphisme est formée des fibrés E de $\mathbb{I}_3$ vérifiant $H^0(E(1)) = 0$ lesquels forment un ouvert irréductible, partout dense (car son complémentaire est constitué de fibrés de 't Hooft).

1.4. Les cas (i), (ii), (iii) et (iv) donnent les strates d'une stratification de $\mathbb{I}_3$ dont les adhérences forment une suite strictement décroissante de familles irréductibles de dimensions respectives 21, 20, 19 et 15. Pour vérifier que la strate du cas (ii) est irréductible de dimension 20, on peut par exemple remarquer que si C est une courbe elliptique normalement plongée dans $\mathbf{P}^6$, l'ensemble des plans de $\mathbf{P}^6$ contenus dans la variété linéaire de dimension 4 engendrée par 5 points de C est irréductible de dimension 11, d'où résulte immédiatement que la sous variété de $\mathscr{H}_{7,1}$ formée de courbes lisses ayant une 5-sécante est irréductible de dimension 27 $(= 11 + 15 + 1)$.

2 Description birationnelle de $\mathbb{I}_3$

Soit E un 3-Instanton tel que $h^0(E(1))$ soit nul. La variante suivante de la suite spectrale de Beilinson nous a été signalée par Ein. La diagonale Δ de $\mathbf{P}\times\mathbf{P}$ est une section du fibré $\Omega_{\mathbf{P}}^{\vee}(-1)\boxtimes O_{\mathbf{P}}(1)$ ($\mathscr{F}\boxtimes\mathscr{G}$ désigne $p_1^*\mathscr{F}\otimes p_2^*\mathscr{G}$ où p_1 et p_2 représentent les projections naturelles) et admet donc la résolution de Koszul:

$$\Omega_{\mathbf{P}}^3(3)\boxtimes O_{\mathbf{P}}(-3)\to\Omega_{\mathbf{P}}^2(2)\boxtimes O_{\mathbf{P}}(-2)\to\Omega_{\mathbf{P}}^1(1)\boxtimes O_{\mathbf{P}}(-1)\to O_{\mathbf{P}\times\mathbf{P}}\to O_\Delta\to 0\,.$$

En tensorisant par $O_{\mathbf{P}}\boxtimes E(1)$ et en prenant l'hyper-image directe relative à la première projection, on obtient un complexe (monade de Ein):

$$0\to\Omega_{\mathbf{P}}^2(2)\otimes H^1(E(-1))\to\Omega_{\mathbf{P}}^1(1)\otimes H^1(E)\to O_{\mathbf{P}}\otimes H^1(E(1))\to 0$$

exact sauf au terme médian où l'homologie est $E(1)$. De plus les flèches de ce morphisme se déduisent de la structure du $\mathrm{sym}(V)$-module gradué $M=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}H^1(E(i))$. Plus précisément, le complexe de Koszul de ce module gradué s'écrit:

$$\begin{aligned}0\to\Lambda^4V\otimes_{\mathbb{C}}M(-4)\to\Lambda^3V\otimes_{\mathbb{C}}M(-3)\\ \to\Lambda^2V\otimes_{\mathbb{C}}M(-2)\to V\otimes_{\mathbb{C}}M(-1)\to M\to 0\end{aligned}$$

d'où en particulier une suite exacte:

$$\Lambda^3V\otimes H^1(E(-1))\to\Lambda^2V\otimes H^1(E)\to V\otimes H^1(E(1))$$

qui, tensorisée par $O_{\mathbf{P}}$, induit le complexe indiqué.

On remarque plus généralement que pour tout $\mathrm{sym}(V)$-module gradué, on a ainsi un complexe:

$$0\to M_{-3}\otimes\Omega_{\mathbf{P}}^3(3)\to M_{-2}\otimes\Omega_{\mathbf{P}}^2(2)\to M_{-1}\otimes\Omega_{\mathbf{P}}(1)\to M_0\otimes O_{\mathbf{P}}(3)\to 0\,.$$

D'aprés ce qui précéde si E est un fibré de $\mathbb{I}_3$ avec $h^0(E(1))=0$, $E(1)$ est la cohomologie de la monade:

$$0\to H^1(E(-1))\otimes\Omega_{\mathbf{P}}^2(2)\to H^1(E)\otimes\Omega_{\mathbf{P}}(1)\to H^1(E(1))\otimes O_{\mathbf{P}}\to 0\,.$$

En particulier, il est complètement déterminé par la connaissance du $(\mathrm{sym}(V))$-module gradué $M=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}H^1(E(i))$ concentré en degrés $(-1,0,1)$.

2.1. Si E n'a pas de droite trisauteuse on a vu que la multiplication:

$$\xi: H^1(E)\otimes V\to H^1(E(1))$$

est non dégénérée et la multiplication:

$$\xi: H^1(E(-1))\otimes V\to H^1(E)$$

peut être vue comme une inclusion:

$$H^1(E(-1))\subsetneq\mathrm{sym}_2(V^\vee)$$

moyennant l'identification par ξ de $H^1(E)$ à $V^\vee$. L'image R de cette inclusion est un réseau de quadriques de $\mathbf{P}^\vee$. $M^\vee[1]$ est le quotient de $\mathrm{sym}(V)$ par l'idéal engendré par l'orthogonal de R dans $\mathrm{sym}(V)$ (7 quadriques de $\mathbf{P}$). Il est maintenant clair que E est complètement déterminé par la donnée de R.

Proposition. *La correspondance "fibré E – réseau R", est birationnelle entre* $\mathbb{I}_3$ *et la variété* $\mathfrak{R}$ (*grassmannienne* $G(2,9)$) *des réseaux de quadriques de* $\mathbf{P}^\vee$.

Preuve. Soit $\mathscr{R} \subsetneq \mathrm{sym}_2(V^\vee) \otimes O_{\mathfrak{R}}$), le sous fibré tautologique de rang 3 sur $\mathfrak{R}$. Au dessus de $\mathfrak{R} \times \mathbf{P}$, on considère le complexe:

$$0 \to \mathscr{R} \boxtimes \Omega^2_{\mathbf{P}}(2) \to V^\vee \boxtimes \Omega_{\mathbf{P}}(1) \to O_{\mathfrak{R}} \boxtimes O_{\mathbf{P}} \to 0$$

induit par le complexe de Koszul (du $\mathrm{sym}(V)$-module $\mathrm{sym}(V^\vee)$) défini par la dérivation):

$$0 \to \mathrm{sym}_2(V^\vee) \otimes \Omega^2_{\mathbf{P}}(2) \to \mathrm{sym}_1(V^\vee) \otimes \Omega_{\mathbf{P}}(1) \to O_{\mathbf{P}} \to 0 .$$

Les termes de ce complexe sont des fibrés et l'ensemble des points de $\mathfrak{R}$ où la flèche de droite et la transposée de celle de gauche sont inversibles à droite, est un ouvert $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{R}$ dont on vient de voir qu'il est non vide. Au-dessus de cet ouvert, la cohomologie de la précédente monade est un fibré $\mathscr{E}$ qui définit un morphisme de $\mathfrak{V}$ dans $\mathbb{I}_3$. Ensemblistement, ce morphisme est évidemment l'application réciproque de celle que nous venons de construire. On conclut alors à l'aide des dimensions. c.q.f.d.

2.2. Intéressons-nous maintenant au fermé $\mathbb{I}_3^1$ de $\mathbb{I}_3$ formé des fibrés E admettant une droite trisauteuse. Soient E un tel fibré, tel que $h^0(E(1)) = 0$, $W \subset V$ le sous-espace vectoriel de dimension 2 définissant la droite trisauteuse L de E et Q l'orthogonal de W dans $V^\vee$. Le module $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^1(E(i))$ est engendré par son terme de degré -1, $R = H^1(E(-1)) = \mathrm{sym}_2(Q)$, car E est un fibré instanton (donc la présentation minimale du $\mathrm{sym}(V)$-module gradué M est la partie de droite de la monade symétrique de Beilinson). Il admet pour quotient le sous module M' de $\mathrm{sym}(V^\vee)$ [1] engendré par R: $M'_{-1} = R$, $M'_0 = Q^\vee = V/W$ et $M'_1 = \mathbb{C}$. Le noyau K de la surjection:

$$H^1((E)) \to Q^\vee$$

est donc un quotient de rang 2 du noyau de l'application naturelle $V \otimes R \to Q^\vee$, on vérifie aisément que le noyau est le dual de $H^0(J^2_{L^\vee}(3))(\subsetneq \mathrm{sym}_3(V^\vee))$ (ensemble des cubiques de $\mathbf{P}^\vee$ singulières le long de la droite $L^\vee$). La donnée de L est donc équivalente à la donnée d'un sous-espace vectoriel $K^\vee$ de $H^0(J^2_{L^\vee}(3))$ de dimension 2. Remarquons qu'un pinceau de cubiques singulières le long de $L^\vee$ admet en général pour intersection résiduelle (de $L^\vee$) une quintique rationnelle Γ de $\mathbf{P}^\vee$ quadrisécante à $L^\vee$.

Proposition. *La correspondance "fibré E – quintique* Γ*" est birationnelle entre* $\mathbb{I}_3^1$ *et le schéma de Hilbert des quintiques rationnelles de* $\mathbf{P}^\vee$.

Preuve. Soit $\mathfrak{H}$ l'ouvert du schéma de Hilbert de $\mathbf{P}^\vee$ formé de courbes rationnelles de degré 5 non tracées sur une quadrique. On va globaliser la description du pinceau de surfaces cubiques gauches contenant une courbe de $\mathfrak{H}$. Décrivant d'abord un sous fibré de rang 2 de $V^\vee \otimes O_{\mathfrak{H}}$ dont la fibre en un point C de $\mathfrak{H}$ est l'espace d'équations (de degré 1) de la quadrisécante à C.

Soit $\mathscr{C} \subset \mathfrak{H} \times \mathbf{P}^\vee$ la courbe universelle et soit $\mathscr{L}$ le $O_{\mathscr{C}}$-module inversible $\omega_{\mathscr{C}|\mathfrak{H}}^{\otimes 2} \otimes \pi^* O_{\mathbf{P}^\vee}(1)$, où:

$$\pi : \mathscr{C} \to \mathbf{P}^\vee$$

est la seconde projection. La restriction de $\mathscr{L}$ à la fibre d'un point C de $\mathfrak{H}$ est le générateur positif de $\mathrm{Pic}(C)$. Considérons le diagramme suivant (où $\mu : \mathscr{C} \to \mathfrak{U}$ est la première projection):

$$\begin{tikzcd}
(\mu_*\mathscr{L})^\vee \otimes ((\mu_*\mathscr{L}^{\otimes 5})/V \otimes O_{\mathfrak{H}}) \arrow[r, equal] & (\mu_*\mathscr{L})^\vee \otimes ((\mu_*\mathscr{L}^{\otimes 5})/V \otimes O_{\mathfrak{H}}) \\
(\mu_*\mathscr{L}^{\otimes 4}) \arrow[u] \arrow[r, "\text{mult.}"] & (\mu_*\mathscr{L})^\vee) \otimes ((\mu_*\mathscr{L}^{\otimes 5}) \arrow[u] \\
\mathscr{K} \arrow[u] \arrow[r] & (\mu_*\mathscr{L})^\vee \otimes V^\vee \arrow[u] \\
0 \arrow[u] & 0\,. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

On vérifie (fibre par fibre) que $\mathscr{K}$ est un $O_{\mathfrak{H}}$-module inversible et que la flèche:

$$\mathscr{K} \otimes (\mu_*\mathscr{L}) \to V \otimes O_{\mathfrak{H}}$$

est localement scindée i.e. $\mathscr{K} \otimes (\mu_*\mathscr{L})$ est le module des sections d'un sous fibré de rang 2 du fibré trivial de fibre $V^\vee$. On voit (à nouveau fibre par fibre) que ce fibré représente les équations de degré 1 de la quadrisécante. Soit $\mathbb{L} \subset \mathfrak{H} \times \mathbf{P}^\vee$ le sous schéma définit par ces équations, la fibre de $\mathbb{L}$ en un point C de $\mathfrak{H}$ est la quadrisécante à C et $\mathbb{L}$ est $\mathfrak{H}$-plat, le $O_{\mathfrak{H}}$-module $\mathscr{C} = \mu_*(J_{\mathbb{L}}^2(3) \cap J_{\mathscr{C}}(3))$ est un sous fibré de rang 2 du fibré de rang 10 sur $\mathfrak{H}$. On peut alors construire un $(\mathrm{sym}(V) \otimes O_{\mathfrak{H}})$-module $\mathscr{M}_*$ en posant:

$\mathscr{M}_{-1} = \mathrm{sym}_2(\mu_*(J_{\mathbb{L}}(1))$
$\mathscr{M}_0 =$ le module quotient de $V \otimes \mathscr{M}_{-1}$ par l'orthogonal de $\mathscr{C}$
$\mathscr{M}_1 = O_{\mathfrak{H}}$.

Cette donnée permet de définir une monade (de Ein) comme précédemment et on conclut par un argument de dimension (20) comme lors de la proposition précédente.

2.3.1 **Proposition.** *Soit R un réseau, pour que l'application $O_{\mathbf{P}}$-linéaire:*

$$R \otimes \Omega_{\mathbf{P}}^2(2) \to V^\vee \otimes \Omega_{\mathbf{P}}(1)$$

ne soit pas injective au point x de $\mathbf{P}$ il faut et il suffit qu'il existe une surface cubique S de $\mathbf{P}^\vee$ telle que les quadriques polaires de S par rapport aux points du plan de $\mathbf{P}^\vee$ défini par x appartiennent toutes à R.

Preuve. On a une suite exacte:

$$0 \to O_{\mathbf{P}}(-4) \to \mathrm{sym}_3(V^\vee) \otimes \Omega^3_{\mathbf{P}}(3) \to \mathrm{sym}_2(V^\vee) \otimes \Omega^2_{\mathbf{P}}(2) \to V^\vee \otimes \Omega_{\mathbf{P}}(1) \to O_{\mathbf{P}} \to 0 \tag{1}$$

de transposée, la suite spectrale de Beilinson (relative à la résolution de la diagonale de $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$, vue comme section du fibré $(\Omega^\vee_{\mathbf{P}}(-1) \boxtimes O_{\mathbf{P}}(1))$, tordue par $O_{\mathbf{P}} \boxtimes O_{\mathbf{P}}(3)$.

Soit x un point de $\mathbf{P}$, pour que l'application $O_{\mathbf{P}}$-linéaire:

$$R \otimes \Omega^2_{\mathbf{P}}(2) \to V^\vee \otimes \Omega_{\mathbf{P}}(1)$$

ne soit pas injective en x il faut et il suffit qu'il existe un élément s appartenant à $\mathrm{sym}_3(V^\vee)$ dont l'image par la différentielle de (1) appartienne à $R \otimes \Omega^2_x$ i.e. soit une application de Ω_x dans R. Or l'application de Ω_x dans $\mathrm{sym}_2(V^\vee)$ image de s par la différentielle de (1), transforme un élément de Ω_x i.e. un vecteur h de $V^\vee$ orthogonal à x en la quadrique polaire de s par rapport à h. c.q.f.d.

Remarque. Selon Barth [B2, p. 84; remarque 2] citant Bateman [B], l'existence d'un point x de $\mathbf{P}$ et d'une surface cubique s de $\mathbf{P}^\vee$ tels que R soit l'ensemble des polaires de S par rapport aux points de $\mathbf{P}^\vee$ orthogonaux à x, caractérise (au moins sous les hypothèses générales entamant cette remarque) "les réseaux de Lüroth" (par. 5).

2.3.2. On note $\mathfrak{R}_0$ (resp. $\mathfrak{R}'_0$) le fermé de codimension 3 (resp. 4) de $\mathfrak{R}$ des réseaux contenant un pinceau de quadriques ayant un point singulier fixe (resp. contenant un plan double).

Proposition. *Au-dessus de l'ouvert de $\mathfrak{R}$, complémentaire de $\mathfrak{R}_0 \cup \mathfrak{R}'_0$, la monade de Ein:*

$$R \boxtimes \Omega^2_{\mathbf{P}}(2) \to V^\vee \otimes O_{\mathfrak{R}} \boxtimes \Omega_{\mathbf{P}}(1) \to O_{\mathfrak{R}\times\mathbf{P}}$$

a une cohomologie plate et sans torsion au-dessus de $\mathfrak{R}$. On obtient donc un morphisme de cet ouvert dans le schéma de Maruyama $M(0,3,0)$ des $O_{\mathbf{P}}$-modules sans torsion de rang 2 et de classes de Chern $(c_1, c_2, c_3) = (0,3,0)$. Ce morphisme est bijectif, et est donc un isomorphisme au dessus de l'ouvert $\mathfrak{U}$ de $\mathbb{I}_3$ des fibrés sans droite trisauteuse.

Preuve. Soit R un réseau appartenant à l'ouvert de l'énoncé; $\mathscr{F}$ le conoyau l'$O_{\mathbf{P}}$-morphisme

$$V \otimes \Omega^2_{\mathbf{P}}(3) \to R^\vee \otimes \Omega_{\mathbf{P}}(2)\,;$$

X_1 une composante irréductible du support de $\mathscr{F}$ et X_2 un modèle non singulier de $\mathrm{Proj}(\mathrm{sym}(\mathscr{F}))$. Pour montrer la proposition il suffit de voir que la dimension de X_1 n'excède pas 1. Au-dessus de X_2, on a une séquence:

$$\mathscr{K} \to R \otimes \Omega^2_{X_2}(2) \to V^\vee \otimes \Omega_{X_2}(1)$$

de conoyau nul. La première flèche donne un morphisme:

$$\Omega_{X_2}(2) \to R \otimes \mathscr{K}^\vee$$

de O_{X_2}-modules de rang 3. Montrons que c'est un isomorphisme. Si x est un point de X_2 où ce morphisme n'est pas un isomorphisme l'interprétation géométrique de ce morphisme montre qu'il existe une surface cubique s de $\mathbf{P}^\vee$ telle que les polaires de s par rapport aux points de $\mathbf{P}^\vee$ orthogonaux à l'image ζ de x dans $\mathbf{P}$, forment un sous espace de R distinct de R, si ce sous espace est de dimension 2 s est un cône de sommet dans $\zeta^\perp$ et R contient un pinceau de cônes quadriques de même sommet, ce qui était exclu. Si ce sous espace est de dimension 1 alors s est réunion de 3 plans non tous confondus passant par une droite de $\zeta^\perp$ d'une part et d'autre part si la dimension de X_1 est supérieure ou égale à 2, ζ décrit une variété de dimension supérieure ou égale à 1. On a donc un isomorphisme:

$$\Omega_{X_2}(2) \to R \otimes \mathscr{K}^\vee$$

i.e. $\Omega_{X_2}(1) = R \otimes \mathscr{L}^\vee$ où $\mathscr{L} = \mathscr{K}(1)$. On en déduit que $O_{X_2}(1) = \mathscr{L}^{\otimes 3}$, donc si dimension X_2 est supérieure ou égale à 2, $H^1(\mathscr{L}^\vee) = 0$ d'après le théorème de Ramanujam [S–S, Théorème 7.1]. Donc $H^1(\Omega_{X_2}(1)) = 0$ ce qui prouve que $V = H^0(O_{X_2}(1))$ il en résulte immédiatement que $W = H^0(\mathscr{L})$ est de dimension 2 et que $V = \mathrm{sym}_3(W)$, donc X_2 est une cubique gauche, d'où la contradiction.

2.3.3 *Application.* Considérant la composante $\mathbf{C}$ du bord de $M(0, 3, 0)$ dont le terme général est un faisceau sans torsion E dont le bidual $\tilde{\mathsf{E}}$ est un $O_{\mathbf{P}}$-module localement libre de $\mathbb{I}_2$ et tel que $\tilde{\mathsf{E}}/\mathsf{E} \simeq O_L(1)$.

Proposition. $\mathbf{C}$ *est irréductible de dimension* 20.

Preuve. Le morphisme de la proposition précédente établit une correspondance birationnelle entre $\mathfrak{R}_1$ et $\mathbf{C}$ en effet, on vérifie facilement que la cohomologie d'un tel module est le sous module de $\mathrm{sym}(V^\vee)$, engendré par un réseau de $\mathfrak{R}_1$.

3 Description géométrique des éléments de saut

Soit E un fibré général de $\mathbb{I}_3$, il lui correspond un réseau de quadriques ($\simeq H^1(E(-1))$) général de $\mathbf{P}^\vee$. Dans ce paragraphe, on interprète les variétés de droites sauteuses et des plans non stables pour E en termes du réseau de quadriques R.

Au réseau R, on associe une quartique $\Delta \subset \mathbb{P}(R)$ ($= \mathrm{proj}(\mathrm{sym}(R^\vee))$), d'équation le discriminant de R (forme quartique sur $\mathrm{sym}_2(V^\vee)$), muni d'une θ-caractéristique paire ϑ et et d'un isomorphisme $V^\vee \simeq H^0(\mathscr{L})$, avec $\mathscr{L} = \vartheta(1)$. $\mathscr{L}$ définit un plongement de Δ dans $\mathbf{P}^\vee$ d'image Γ le lieu des sommets des cônes du réseau.

3.1 Proposition. *Γ est le lieu des plans non stables pour E.*

Preuve. Soit $\mathbf{F} \subset \mathbf{P}^\vee \times \mathbf{P}$ la variété d'incidence point-plan, p (resp. q) la projection sur $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{P}^\vee$). On a la suite exacte:

$$0 \to O_{\mathbf{P}^\vee \times \mathbf{P}}(-1, -1) \to O_{\mathbf{P}^\vee \times \mathbf{P}} \to O_{\mathbf{F}} \to 0$$

qui donne la suite exacte:

$$0 \to O_{\mathbf{P}^\vee}(-1) \boxtimes E(-1) \xrightarrow{\mu} O_{\mathbf{P}^\vee} \boxtimes E \to p^*E \to 0$$

puis la suite exacte de cohomologie:

$$0 \to H^1(E(-1)) \otimes O_{\mathbf{P}^\vee}(-1) \to H^1(E) \otimes O_{\mathbf{P}^\vee} \to \mathscr{R}^1 q_* p^*(E) \to 0 .$$

La matrice de μ étant définie par l'inclusion:

$$H^1(E(-1)) = R \subsetneq V^\vee \otimes V^\vee = H^1(E) \otimes H^0(O_{\mathbf{P}}(1))\ .$$

Il est naturel de définir le lieu des plans non stables pour E comme le lieu de dégénérescence de μ, puisque les plans H non stables sont caractérisés par $h^1(E|_H) > -\chi(E|_H)$. D'un autre côté, le lieu de dégénérescence de μ est le lieu des sommets des cônes de R (points de $\mathbf{P}^\vee$, dont les polaires par rapport aux quadriques du réseau forment un pinceau linéaire). c.q.f.d.

Si on regarde R comme un sous espace de $V^\vee \otimes V^\vee$, on peut considérer la sous variété $\Pi \subset \mathbf{P}^\vee \times \mathbf{P}^\vee$ définie par les équations de $\mathbf{R} \subset H^0(O_{\mathbf{P}^\vee \times \mathbf{P}^\vee}(-1,-1))$. Π est une variété lisse de dimension 3. Si R est assez général, c'est le graphe d'une correspondance classique (dite cubo-cubique) sur $\mathbf{P}^\vee$. Π est l'éclatement de Γ dans $\mathbf{P}^\vee$; la projection sur l'autre facteur du diviseur exceptionnel de Π est la surface réglée des trisécantes à Γ. La courbe T de $\mathbf{G}$ (grassmannienne des droites de $\mathbf{P}^\vee$) base de cette surface réglée est isomorphe à Γ d'après ce qu'on vient de voir, plus précisément le diviseur exceptionnel de Π s'identifie à $\mathrm{Proj}(J_\Gamma/J_\Gamma^2)$ et la suite exacte:

$$0 \to R \otimes O_{\mathbf{P}^\vee}(-4) \to V^\vee \otimes O_{\mathbf{P}^\vee}(-3) \to J_\Gamma \to 0$$

montre que $J_\Gamma/J_\Gamma^2(3)$ est un fibré quotient de $V^\vee \otimes O_\Gamma$ de rang 2 définissant un morphisme de Γ dans $\mathbf{G}$, dont l'image est T.

3.2 Proposition. *T est le lieu des droites bisauteuses pour E.*

Preuve. On a le diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd}
H^1(E(-1)) \otimes \mathscr{K} \arrow[r, "B"] \arrow[d, hook] & H^1(E) \otimes O_{\mathrm{G}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{R}^1 q_* p^*(E) \\
H^1(E(-1)) \otimes V \otimes O_{\mathrm{G}} \arrow[r] & H^1(E) \otimes O_{\mathrm{G}}\ . &
\end{tikzcd}$$

Par définition, le lieu des droites bisauteuses pour E est défini par les mineurs maximaux de B. D'autre part, T est définie comme le plongement de Γ dans $\mathbf{G}$ déduit du quotient $(J_\Gamma/J_\Gamma^2(3))$ de $V^\vee \otimes O_\Gamma$. Montrons que T est contenue dans le lieu de dégénérescence de B. On a la suite exacte:

$$0 \to \omega^\vee(-1) \to R \otimes O_\Gamma(-1) \to V^\vee \otimes O_\Gamma \to J_\Gamma/J_\Gamma^2(3) \to 0\ ,$$

elle définit un morphisme de $R \otimes O_T$ dans $\mathscr{Q}|_T(1)$, où $\mathscr{Q}$ est le sous fibré tautologique de $V^\vee \otimes O_{\mathrm{G}}$, donc un morphisme de $R \otimes \mathscr{Q}^\vee|_T$ dans $O_T(1)$. En appliquant le foncteur H^0, on trouve la multiplication $R \otimes V \to V^\vee$ et le diagramme commutatif et exact:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \otimes \mathscr{K}|_T \arrow[r] & R \otimes V \otimes O_T \arrow[r] \arrow[d] & R \otimes \mathscr{Q}^\vee|_T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & V^\vee \otimes O_T \arrow[r] & O_T(1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

montre que la composée:

$$R \otimes \mathscr{K}|_T \to V^\vee \otimes O_T \to O_T(1)$$

est nulle, ce qui montre que T est contenue dans le lieu de dégénérescence de B. La restriction de $\mathscr{R}^1 q_* p^*(E)$ à T coïncide avec $O_T(1)$.

Inversement, comme E n'a pas de droite trisauteuse $\mathscr{R}^1 q_* p^*(E)$, qu'on note par la suite $\mathfrak{L}$, est un O_T-module inversible quotient de $V^\vee \otimes O_T$ et définit donc un morphisme de T dans $\mathbf{P}^\vee$. Montrons que son image est contenue dans Γ. Il suffit pour cela de vérifier que la composée:

$$R \otimes \mathfrak{L}^\vee \to V \otimes O_T \to \mathscr{K}^\vee \otimes R^\vee$$

est nulle. On sait que la composée:

$$\mathfrak{L}^\vee \to V \otimes O_T \to \mathscr{K}^\vee \otimes R^\vee$$

est nulle, en tensorisant par R on trouve un diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc} R \otimes \mathfrak{L}^\vee & \longrightarrow & R \otimes V \otimes O_T & \longrightarrow & \mathscr{K}^\vee \otimes R^\vee \otimes R & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr} \otimes \mathbb{1}_{\mathscr{K}^\vee}} & & \\ & & V^\vee \otimes O_T & \longrightarrow & \mathscr{K}^\vee & & \end{array}$$

On vérifie qu'il est commutatif en passant aux sections (commutativité de:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1}_R & & \\ \cap & & \\ R \otimes V & \longrightarrow & R \otimes R^\vee \otimes V^\vee \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr} \otimes \mathbb{1}_V} \\ V^\vee & = & V^\vee \end{array} \quad)$$

d'où l'assertion. c.q.f.d.

3.3. Avant d'étudier la variété des droites sauteuses, définissons certains covariants du réseau R. En supposant R général, on a un isomorphisme $\omega_\Gamma^{\otimes 3} = O_\Gamma(2)$ exprimant que $\omega_\Gamma^\vee(1)$ est une θ-caractéristique. De même, on a un isomorphisme $\Lambda^2 N_\Gamma^\vee(3) \simeq \omega_\Gamma^{\otimes 2}$ (où N_Γ est le fibré conormal à Γ dans $\mathbf{P}^\vee$) déduit du complexe cotangent à l'inclusion $\Gamma \subsetneq \mathbf{P}^\vee$ et de l'isomorphisme précédent. Par passage aux sections, on obtient un isomorphisme:

$$\alpha : \mathrm{sym}_2(R) \to \Lambda^2 V .$$

Cherchons une expression plus précise de α. Si on choisit des coordoonnées (T_0, T_1, T_2) de R; (X_0, X_1, X_2, X_3) de V, on peut représenter la donnée du réseau par une expression:

$$\left(\sum a_{ijk} X_i X_j T_k\right)_{i,j=0,1,2,3\ k=0,1,2} .$$

Où les a_{ijk} sont des scalaires avec $a_{ijk} = a_{jik}$, l'équation de Δ est alors $\det(A) = 0$ où $A = (\sum_{k=0}^{k=2} a_{ijk} T_k)_{i,j=0,1,2,3}$, tandis que la résolution de $J_\Gamma(3)$ est:

$$0 \longrightarrow O_{\mathbf{P}}^3(-1) \xrightarrow{B} O_{\mathbf{P}}^4 \longrightarrow J_\Gamma(3) \longrightarrow 0 .$$

Où ${}^tB = (\sum_{i=0}^{i=3} a_{ijk} X_i)_{j=0,1,2,3\ k=0,1,2}$.

Considérons l'anneau gradué $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(\vartheta^{\otimes n})$ et notons t_k la classe de T_k et x_i celle de X_i dans cet anneau. L'isomorphisme $\omega_\Gamma^{\otimes 3} = O_\Gamma(2)$ se traduit par les identités:

$$x^s = \sum A_{sr} t^r$$

où r (resp. s) est un multi-indice d'ordre 3 (resp. 2) ($(x_i x_j) = (-1)^{i+j} \times$(le mineur d'indice (i,j) de A)), ceci exprime que (x_0, x_1, x_2, x_3) est une solution du système linéaire de matrice A (supposée symétrique). Les A_{sr} apparaissent comme des polynômes homogènes de degré 3 en a_{ijk}.

Considérons maintenant la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \omega^\vee(-1) \xrightarrow{\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}} R \otimes O_\Gamma(-1) \xrightarrow{B} V^\vee \otimes O_\Gamma \longrightarrow N_\Gamma^\vee(3) \longrightarrow 0 ;$$

la puissance extérieure deuxième de la flèche de droite est une application de $\Lambda^2 V^\vee \otimes O_\Gamma$ dans $\Lambda^2(N_\Gamma^\vee(3)) \simeq \omega_\Gamma^{\otimes 2}$ qui, par passage aux sections, est la transposée de l'isomorphisme α annoncé, sa matrice (g_{nI}) ($n \in \mathbb{N}^3 |n| = 2$; $I \subset [0, 3]$ et $|I| = 2$) est définie comme suit:

Soit B_{kI} le cofacteur de la matrice B correspondant à la colonne d'indice k et aux lignes indexées par I, c'est un polynôme de degré 2 en X. Par l'application linéaire $\mathrm{sym}_2(V^\vee) \to \mathrm{sym}_3(R^\vee)$ précédemment étudiée, il lui correspond un polynôme de degré 3 sur les coordonnés de R (et de degré 5 en les a_{ijk}) égal à $t_k \cdot \sum g_{nI} \cdot t^n$, ce qui décrit la matrice (g_{nI}).

Lorsque R est général, α est un isomorphisme et T est l'intersection complète de $\mathbf{G}$ et de l'image par α de la surface de Véronèse $\mathbb{P}(R) \subsetneq \mathbb{P}(\mathrm{sym}_2(R)$. Le cas où l'image de la surface de Véronèse est contenue dans G, a été identifié par Barth [B2] au cas des "réseaux de Lüroth" que nous étudions plus loin, d'ailleurs ce cas peut être exclu sans faire le lien avec cette propriété en supposant R assez général.

3.4.1 **Proposition.** *On a une suite exacte*:

$$0 \longrightarrow R^\vee \otimes O_{\mathbf{G}}(-1) \xrightarrow{\beta} R^\vee \otimes O_{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathscr{R}^1 q_* p^*(E(-1) \longrightarrow 0 .$$

Où $\beta = {}^t\beta$ et où la section de $\mathrm{sym}_2(R) \otimes O_{\mathbf{G}}(1)$ *est la matrice des cofacteurs de α.*

Corollaire. *La variété des droites sauteuses est l'intersection de* $\mathbf{G}$ *et du lieu des cordes de la surface de Véronèse.*

Preuve. La suite spectrale d'hypercohomologie (relative à la projection sur $\mathbf{G}$) de la résolution de $O_{\mathbf{F}}$ sur $O_{\mathbf{G}\times\mathbf{P}}$ tensorisé par $O_{\mathbf{G}} \boxtimes E(-1)$ se réduit à la suite exacte:

$$0 \longrightarrow R^\vee \otimes O_{\mathbf{G}}(-1)) \xrightarrow{\beta'} R \otimes O_{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathscr{R}^1 q_* p^*(E(-1)) \longrightarrow 0 .$$

Où β' provient d'un élément (a priori peu accessible) de $\mathrm{sym}_2(R) \otimes \Lambda^2(V)$. Il faut voir que β' est proportionnelle à β lorsque R est général. Or d'une part, les idéaux J et J' de $O_{\mathbf{P}^5}$ engendrés par les 2-mineurs de β respectivement β' ont la même image dans $O_{\mathbf{G}}$, l'idéal de T. D'autre part, J' est l'idéal d'une surface (sinon T ne serait pas une courbe) nécessairement de degré 4, non contenue dans un hyperplan et irréductible (car T l'est). On conclut facilement (par exemple en prenant une section hyperplane) que les deux surfaces coïncident. L'hypersurface d'équation $\det(\beta)$ respectivement $\det(\beta') = 0$ est le lieu des cordes de cette surface. c.q.f.d.

3.4.2. Décrivons (rapidement) la construction analogue dans le cas d'un fibré de $\mathbb{I}_3^1$ supposé général de droite trisauteuse L. Tout d'abord la courbe des plans non stables pour E est $\Gamma \cup L$ où Γ est la quintique rationnelle de $\mathbf{P}^\vee$ associé à E (par. 3.2). Pour le voir, on remarque que la matrice de la multiplication $H^1(E(-1)) \to H^1(E) \otimes V^\vee$ dans une base convenable s'écrit:

$$\begin{pmatrix} X_0^\vee & X_1^\vee & 0 \\ 0 & X_0^\vee & X_1^\vee \\ V_{20} & V_{21} & V_{22} \\ V_{30} & V_{31} & V_{32} \end{pmatrix}$$

(on choisit une base (X_0, X_1, X_2, X_3) de V telle que (X_2, X_3) engendre l'idéal de L; $H^1(E(-1)) = \mathrm{sym}_2(Q^\vee)$ est muni de la base $(X_0^2, X_0.X_1, X_2^2)$, on choisit la base de $H^1(E)$ de sorte que les derniers vecteurs soient dans le noyau de la surjection $H^1(E) \to Q^\vee$, tandis que les deux premiers étant la base (X_0, X_1) de $Q^\vee$).

La courbe des plans non stables est définie par les mineurs maximaux de cette matrice, i.e. la courbe résiduelle de la droite $L^\vee$ "épaissie" d'idéal $J_L^{\vee 2}$ (i.e. les mineurs maximaux de:

$$\left(\begin{pmatrix} X_0^\vee & X_1^\vee & 0 \\ 0 & X_0^\vee & X_1^\vee \end{pmatrix}\right),$$

dans l'intersection complète des deux surfaces cubiques:

$$S_2 = \begin{vmatrix} X_0^\vee & X_1^\vee & 0 \\ 0 & X_0^\vee & X_1^\vee \\ V_{20} & V_{21} & V_{22} \end{vmatrix} \qquad S_3 = \begin{vmatrix} X_0^\vee & X_1^\vee & 0 \\ 0 & X_0^\vee & X_1^\vee \\ V_{30} & V_{31} & V_{32} \end{vmatrix}.$$

Celles-ci sont précisément celles qui nous ont servi à définir la quintique rationnelle attachée à E, d'où l'assertion.

Comme précédemment, la courbe T des droites bisauteuses pour E est la courbe des trisécantes à Γ de degré 8 et de genre géométrique 0 dont le point l de $\mathbf{G}$ correspondant à L est un point quadruple.

T est intersection complète de $\mathbf{G}$ est du cône quartique $\mathscr{S}$ de sommet l et de base T (dont le lieu à l'infini est une quartique $\mathscr{S}_\infty$ rationnelle normale). Enfin le lieu des droites sauteuses pour E est l'intersection de $\mathbf{G}$ et du cône de sommet l dont le lieu à l'infini est le lieu des cordes de $\mathscr{S}_\infty$.

4 Forme alternée attachée à un réseau de quadriques

On veut inverser le passage d'un fibré E de $\mathbb{I}_3$ sans droite trisauteuse à un réseau de quadriques de $\mathbf{P}^\vee$, décrit au par. 2. Pour cela, partant d'un réseau de quadriques de $\mathbf{P}^\vee$, on va essayer de construire directement une monade symétrique de Beilinson:

$$0 \to R^\vee \otimes O_\mathbf{P}(-1) \to N \otimes O_\mathbf{P} \to R \otimes O_\mathbf{P}(1) \to 0$$

où N (jouant le rôle de $H^1(\Omega \otimes E)$) doit être le noyau de l'application naturelle: $R \otimes V \to V^\vee$. L'application: $N \otimes O_\mathbf{P} \to R \otimes O_\mathbf{P}(1)$ doit résulter de l'inclusion $N \subsetneq R \otimes V$, et il manque la définition d'une forme alternée non dégénérée sur N telle que en tout point de $\mathbf{P}$, la restriction de cette forme au noyau de la fibre de $N \otimes O_\mathbf{P} \to R \otimes O_\mathbf{P}(1)$ en ce point soit de rang 2. Nous allons déduire cette forme de l'élément $\beta \in \mathrm{sym}_2(R) \otimes \Lambda^2 V$, attaché à R au par. 3, suivant un schéma indiqué par Tyurin [T].

4.1. Eliminons d'abord le fermé $\mathfrak{R}_1$ de $\mathfrak{R}$.

Lemme. *Si E est un fibré de $\mathbb{I}_3$ sans droite trisauteuse, le réseau associé est sans quadrique dégénérée en deux plans.*

Supposons que le réseau R contienne une quadrique q de sommet une droite L et montrons que l'application de gauche dans le complexe:

$$0 \to R \otimes \Omega^2_\mathbf{P}(2) \to V^\vee \otimes \Omega_\mathbf{P}(1) \to O_\mathbf{P} \to 0$$

n'est pas localement scindée le long de L. Rappelons que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} R \otimes \Omega^2_\mathbf{P}(2) & \longrightarrow & V^\vee \otimes \Omega_\mathbf{P}(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^2 V & \longrightarrow & V \otimes V^\vee \otimes O_\mathbf{P} \end{array}$$

est commutatif. En restreignant la flèche à L, on trouve un O_L-morphisme:

$$(\Lambda^2 W_L \otimes O_L \oplus O_L^2(-1)) \otimes R \to (W_L \otimes O_L \oplus O_L(-1)) \otimes V^\vee$$

(où W_L est l'espace des équations de degré 1 de L), puis en passant aux sections une application $\mathbb{C}$-linéaire:

$$\Lambda^2 W_L \otimes R \to W_L \otimes V^\vee$$

qui, compte-tenu de l'isomorphisme $W_L^\vee \simeq W_L \otimes (\Lambda^2 W_L)^\vee$, s'identifie à l'application $\mathbb{C}$-linéaire composée:

$$R \subsetneq V^\vee \otimes V^\vee \to W_L^\vee \otimes V^\vee .$$

Celle ci s'annule sur q d'où la contradiction cherchée. c.q.f.d.

4.2. On a défini au par. 3 à partir d'un réseau quelconque une application $\mathbb{C}$-linéaire α: $\mathrm{sym}_2(R) \to \Lambda^2 V$. Remarquons en passant que celle ci a été décrite par Barth [B2, p. 66], plus précisément un calcul simple montre que si (q_0, q_1, q_2) sont 3 éléments de R on a:

$$q_0(\Lambda^3 q_1)q_2 - q_2(\Lambda^3 q_1)q_0 = (q_0 \Lambda q_1 \Lambda q_2)\alpha(q_1 \otimes q_1) .$$

On choisit ici les générateurs de $\Lambda^4 V$ et $\Lambda^3 R$ de sorte que le premier membre soit défini comme une application linéaire alternée de V dans $V^\vee$ (i.e. un élément de $\Lambda^2 V^\vee \simeq \Lambda^2 V$) et $(q_0 \Lambda q_1 \Lambda q_2)$ $(\in \Lambda^3 R)$ comme un scalaire.

Proposition. *α est un isomorphisme si et seulement si $R \notin \mathfrak{R}_1$.*

Preuve. La description selon Barth de α montre immédiatement que $\alpha(q^2) = 0$ si q est de rang 2 donc α n'est pas un isomorphisme si $R \in \mathfrak{R}_1$. On sait d'autre part que $\mathfrak{R}_1$ est une hypersurface irréductible de $\mathfrak{R}$ de degré 10. Soit $\mathscr{R} \subset \mathrm{sym}_2(V^\vee) \otimes O_{\mathfrak{R}}$ le sous fibré universel, en inspectant la construction de α on voit qu'elle se globalise en une section (encore notée α) de: $\Lambda^2 V \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{sym}_2(\mathscr{R}^\vee)(1)$ (où $O_{\mathfrak{R}}(1) = \Lambda^3 \mathscr{R}^\vee$). On conclut, comme d'habitude, en remarquant que la première classe de Chern de ce fibré est 10 et que α est un isomorphisme au point générique de $\mathfrak{R}$ (par exemple aux points correspondants à des fibrés sans droite trisauteuse). c.q.f.d.

4.3. Soit $\beta: \Lambda^2 V \to \mathrm{sym}_2(R)$ la matrice adjointe de α, on peut la regarder comme un élément de $\Lambda^2 V \otimes \mathrm{sym}_2(R)$ et on a la décomposition canonique:

$$\Lambda^2(V \otimes R) \simeq \Lambda^2 V \otimes \mathrm{sym}_2(R) \oplus \Lambda^2 R \otimes \mathrm{sym}_2(V)$$

qui permet de l'identifier à un élément de $\Lambda^2(V \otimes R)$. Soit N le noyau de la surjection: $V \otimes R \to V^\vee$ (on suppose ici que $R \notin \mathfrak{R}_1$) on a:

Proposition. *β est un élément de $\Lambda^2 N$.*

Preuve. Il s'agit d'une identité algébrique qu'il suffit de vérifier aux points généraux de $\mathfrak{R}$, on peut donc supposer que R provient d'un fibré de l'ouvert $\mathfrak{U} = \mathbb{I}_3 - \mathbb{I}_3^1$. Comme $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathscr{R}^1 q_* p^*(E(i))$ est un $\mathrm{sym}_{O_G}(\mathscr{Q}^\vee)$-module gradué, on a une multiplication:

$$\mathscr{R}^1 q_* p^*(E(-1)) \otimes \mathscr{Q}^\vee \to \mathscr{R}^1 q_* p^*(E)$$

qui par passage aux sections est la multiplication $f: V \otimes R \to V^\vee$. D'autre part, on a la résolution:

$$0 \longrightarrow R^\vee \otimes \mathscr{Q} \xrightarrow{\beta} R \otimes \mathscr{Q}^\vee \longrightarrow \mathscr{R}^1 q_* p^*(E(-1)) \otimes \mathscr{Q}^\vee \longrightarrow 0$$

donc une séquence:

$$0 \longrightarrow R^\vee \otimes \mathscr{Q} \xrightarrow{\beta} R \otimes \mathscr{Q}^\vee \longrightarrow \mathscr{R}^1 q_* p^*(E)$$

de composée nulle. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(R^\vee \otimes \mathscr{Q}, -)$, on trouve la séquence d'application $\mathbb{C}$-linéaire:

$$\mathrm{End}(R^\vee) \longrightarrow R \otimes V \otimes R \otimes V \xrightarrow{f \otimes \mathbb{1}_{R \otimes V}} R \otimes V \otimes V^\vee .$$

L'image par la première flèche de $\mathbb{1}_R$ est β il en résulte que $\beta \in R \otimes V \otimes N$ donc (par antisymétrie) $\beta \in \Lambda^2 N$. c.q.f.d.

Proposition. *Si β (vue comme élément de $\Lambda^2 N$) est de rang 8 et $R \notin \mathfrak{R}_1$, alors R est dans l'image de $\mathfrak{U}$.*

Preuve. Considérons la séquence de morphismes:

$$R^\vee \otimes O_{\mathbf{P}}(-1) \to N^\vee \otimes O_{\mathbf{P}} \to N \otimes O_{\mathbf{P}} \to R \otimes O_{\mathbf{P}}(1)$$

dont la flèche de droite est la composée:

$$N \otimes O_{\mathbf{P}} \hookrightarrow R \otimes V \otimes O_{\mathbf{P}} \xrightarrow{\mathbb{1}_R \otimes (\mathrm{taut})} R \otimes O_{\mathbf{P}}(1)$$

la flèche de gauche est sa transposée et la flèche du milieu est donnée par $\beta \in \Lambda^2 N$. Si β est rang 8, on peut concentrer cette séquence en identifiant les termes médians:

$$R^\vee \otimes O_{\mathbf{P}}(-1) \to N \otimes O_{\mathbf{P}} \to R \otimes O_{\mathbf{P}}(1) .$$

La composée de cette séquence est nulle; c'est la section image de β par le morphisme $\Lambda^2 N \otimes O_\Gamma \to \Lambda^2 N \otimes O_\Gamma(2)$ i.e. l'image de β par la projection $\Lambda^2(V \otimes R) \to \Lambda^2 R \otimes \mathrm{sym}_2(V)$ dont on a vu qu'elle était nulle ($\beta \in \Lambda^2 V \otimes \mathrm{sym}_2(R)$).

Lemme. *Si la suite $N \otimes O_{\mathbf{P}} \to R \otimes O_{\mathbf{P}}(1) \to 0$ n'est pas exacte, R contient un pinceau linéaire de quadriques ayant un point singulier commun.*

Preuve. Soit p un point du support du conoyau et $v \in V^\vee - \{0\}$ un relèvement de p. On construit un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R \otimes V & \xrightarrow{f} & V^\vee & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v \otimes \mathbb{1}_R} & & \downarrow{\scriptstyle W} & & \\
0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & R \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{k} & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

Donc, pour tout vecteur décomposable $q \otimes u$ de $R \otimes V$, on a:

$$\langle q, u \otimes w \rangle = (k, q) \langle v, u \rangle .$$

En particulier si $q \in N_1$, on a: $\langle q, u \otimes w \rangle = 0$ pour tout u appartenant à V, ce qui montre que le point de $\mathbf{P}^\vee$, classe de w est singulier pour le pinceau linéaire des quadriques N_1.

Revenons à la proposition: si β est de rang 8, on a par le lemme la surjectivité de l'$O_{\mathbf{P}}$-morphisme $N \otimes O_{\mathbf{P}} \to R \otimes O_{\mathbf{P}}(1)$ si R n'appartient pas à $\mathfrak{R}_1$, et la suite:

$$0 \to R^\vee \otimes O_{\mathbf{P}}(-1) \to N \otimes O_{\mathbf{P}} \to R \otimes O_{\mathbf{P}}(1) \to 0$$

admet les propriétés d'une monade de Beilinson symétrique. c.q.f.d.

5 Le cas rang(β) ≤ 6

Soit R un réseau de quadriques de $\mathbf{P}^\vee$ ne contenant pas de quadrique de rang inférieur ou égal à 2. On associe à R un élément β appartenant à $\Lambda^2 N \cap (\Lambda^2 V \otimes \mathrm{sym}_2(R))$ où N est le noyau de l'application naturelle $R \otimes V \to V^\vee$. Soit $\tilde{N}$ l'image de β vue comme application linéaire alternée de $N^\vee$ dans N, le rang de $\tilde{N}$ est pair. On a vu que si $\tilde{N} = N$, R appartient à l'image de $\mathfrak{U}$. On étudie dans ce paragraphe le cas où $\tilde{N} \neq N$.

Considérons la sous variété Π de $\mathbf{P} \times \mathbb{P}(R^\vee)$ d'ideal J_Π tel que $J_\Pi(1, 1)$ soit le conoyau de la composée: Π

$$\tilde{N} \otimes O_{\mathbf{P} \times \mathbb{P}(R^\vee)} \to R \otimes (O_{\mathbf{P}}(1) \boxtimes O_{\mathbb{P}(R^\vee)}) \to O_{\mathbf{P} \times \mathbb{P}(R^\vee)}(1, 1)$$

(où $\boxtimes$ désigne le produit relatif aux projections sur $\mathbf{P}$ respectivement $\mathbb{P}(R^\vee)$). Π est une correspondance entre points de $\mathbb{P}$ et pinceaux de quadriques contenus dans R, qu'on va interpréter géométriquement. On sait que β induit un isomorphisme $\Lambda^2 V \to \mathrm{sym}_2(R)$. Soit (encore) $\mathbf{G}$ la grassmannienne des droites de $\mathbf{P}$, S la surface de Véronèse (i.e. ($\mathbb{P}(R)$ plongé par $O(2)$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{sym}_2(R))$ que β identifie à $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$) et Σ l'hypersurface cubique de $\mathbb{P}(\mathrm{sym}_2(R))$ formée des quadriques dégénérées. On sait qu'un modéle lisse de Σ est le fibré en plan $\mathrm{Proj}_{\mathbb{P}(R^\vee)}(\mathrm{sym}_2(\Omega(2))$ (une conique ayant un point singulier fixé est réunion de deux droites passant par ce point), les plans de Σ correspondant aux fibres sont appelés a-plans et les plans tangents à S des b-plans. De même, il est bien connu que G admet deux familles de plans; les α-plans paramétrisés par $\mathbf{P}$ et les β-plans paramétrisés par $\mathbf{P}^\vee$.

Lemme. *Un point $(x, \pi) \in \mathbf{P} \times \mathbb{P}(R^\vee)$ appartient à Π si et seulement si le α-plan correspondant à x est égal au a-plan de Σ correspondant à π.*

Preuve. Par définition dire que (x, π) est un point de Π revient à dire que (si $v \in V^\vee - \{0\}$ est un relèvement de x et $p \in R^\vee - \{0\}$ un relèvement de π) l'élément $v \otimes p$ de $R^\vee \otimes V^\vee$ est dans l'orthogonal de $\tilde{N}$ (i.e. le noyau de β vue comme forme alternée sur $R^\vee \otimes V^\vee$), ou encore que:

$$\langle v \otimes p \Lambda v' \otimes p', \beta \rangle = 0$$

quels que soient $(v', r') \in V^\vee \times R^\vee$. En identifiant $\mathrm{sym}_2(R)$ et $\Lambda^2 V$ par l'isomorphisme déduit de β, on voit que cela exprime l'égalité:

$$\langle v \Lambda v', pp' \rangle = 0$$

(le crochet étant la dualité ordinaire, le produit étant celui de $\mathrm{sym}_2(R^\vee)$). Quand v' varie, sa classe dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ décrit le α-plan de $\mathbf{G}$ défini par x, tandis que quand p' varie, pp' décrit les équations du a-plan défini par π. Ceci démontre le lemme.

On en déduit que $\mathrm{rang}(\tilde{N}) = 6$, en effet la séquence de composée nulle:

$$R^\vee \otimes O_{\mathbf{P}}(-1) \longrightarrow \tilde{N}^\vee \otimes O_{\mathbf{P}} \xrightarrow{\simeq} N \otimes O_{\mathbf{P}} \longrightarrow R \otimes O_{\mathbf{P}}(1) \tag{1}$$

montre que si $\dim(N) < 6$, la projection de Π sur $\mathbf{P}$ est surjective (car le noyau de la flèche de droite n'est pas de torsion) ceci est exclu. Identifions les deux termes médians de la séquence (1). On trouve un complexe:

$$0 \to R^\vee \otimes O_{\mathbf{P}}(-1) \to \tilde{N} \otimes O_{\mathbf{P}} \to R \otimes O_{\mathbf{P}}(1) \tag{1'}$$

qui est de longueur 2, et, est exact hors de la projection de Π, il est donc exact d'après le lemme d'acyclicité puisque $\dim(\Pi) \leqq 1$.

Le conoyau de ce complexe est donc un $O_{\mathbf{P}}$-module arithmétiquement de Cohen Macaulay de dimension 1. En particulier $\dim(\Pi) = 1$.

Il en résulte que la surface de Véronèse S est contenue dans $\mathbf{G}$. En effet Π paramétrise une famille non constante de droites de $\mathbb{P}(R^\vee)$ qui recouvre $\mathbb{P}(R)$ i.e. les a-plans paramétrisés par Π coupent S en une famille de coniques qui recouvre S, or ces plans sont contenus dans $\mathbf{G}$.

Exprimons que S est contenue dans $\mathbf{G}$. Considérant α comme un élément de degré 2 de l'algèbre extérieure du $\mathrm{sym}(R^\vee)$-module $\mathrm{sym}(R^\vee)\otimes_{\mathbb{C}} V$; pour R n'appartenant pas à $\mathfrak{R}_1$ il est clair que la condition "S est contenue dans $\mathbf{G}$" s'écrit:

$$\alpha^2 = 0$$

(équation de $\mathbf{G}$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$), ce qui s'exprime par la nullité d'un élément $\alpha^2 \in \Lambda^4 V \otimes \mathrm{sym}_4(R^\vee)$ (car les coefficients de α appartiennent à $\mathrm{sym}_2(V)$. Ceci se globalise sur $\mathfrak{R}$, on dispose d'une section α du faisceau $\mathrm{sym}_2(\mathscr{R}^\vee)\otimes \Lambda^2 V \otimes O_{\mathfrak{R}}(5)$ dont le carré α^2 est une section du faisceau $\mathrm{sym}_4(\mathscr{R}^\vee)\otimes \Lambda^4 V \otimes O_{\mathfrak{R}}(10)$ de plus cette section est multiple de la section "discriminant" de $\mathrm{sym}_4(\mathscr{R})\otimes O_{\mathfrak{R}}(4)$ (le déterminant de $R\otimes V \to V^\vee$). Le quotient est une section non nulle de $O_{\mathfrak{R}}(6)$ définissant une hypersurface $\mathfrak{R}_2$ de $\mathfrak{R}$.

Définition. Les points de $\mathfrak{R}_2$ sont appelés *les réseaux de Lüroth.*

On a donc prouvé le théorème suivant:

Théorème. *L'image de l'immersion de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{R}$ est le complémentaire de l'hypersurface $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$.*

6 Réseaux de Lüroth et bord de $\mathbb{I}_3$

Soit $\mathbb{M}(0, 3, 0)$ le schéma de Maruyama paramétrisant les faisceaux sans torsion semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $(c_1; c_2; c_3) = (0; 3; 0)$, les composantes du complémentaire de $\mathbb{I}_3$ dans son adhérence dans $\mathbb{M}(0, 3, 0)$ constituent le bord de $\mathbb{I}_3$. Nous montrons ici qu'une de ces composantes est birationnelle à l'hypersurface $\mathfrak{R}_2$ de $\mathfrak{R}$. Le fait que $\mathfrak{R}_2$ soit irréductible, est un cas particulier de [B2, Proposition 4].

6.1. Décrivons les réseaux de Lüroth généraux.

Proposition. *Il existe un ouvert non vide de $\mathfrak{R}_2$ tel que tout élément R de cet ouvert ait la propriété suivante:*

> *"Il existe une base (T_0, T_1, T_2) de $R^\vee$ et une base $(X_0, X_1, X_2, X_3))$ de V et un élément non nul $(a_0, \ldots, a_8)$ de $\mathbb{C}^9$ tel que l'élément général de R admette: $(\sum_{k=0}^{k=2} a_{i+j+k} T_k)_{i,j=0,1,2,3}$ comme matrice dans le dual de V".*

De plus l'élément $(a_0, \ldots, a_8)$ de $\mathbb{C}^9$ $(= \mathrm{sym}_8(\mathbb{C}^2))$ est déterminé à l'action près de $\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^9$.

Remarque. Cet énoncé est essentiellement dans [Tr], on en esquisse ici une autre démonstration.

Preuve. Montrons d'abord que le réseau $(\sum_{k=0}^{k=2} a_{i+j+k} T_k)_{i,j=0,1,2,3}$ est de Lüroth. On note $S_n = \mathrm{sym}_n(\mathbb{C}^2)$ la représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ de dimension $(n+1)$. On identifie S_3 à V, S_2 à R et chaque S_n à son dual, les réseaux considérés appartiennent au facteur (unique) S_8 de:

$$R^\vee \otimes \mathrm{sym}_2(V^\vee) = S_2 \otimes (S_2 \oplus S_6) = S_0 \oplus S_2 \oplus S_4 \oplus S_6 \oplus S_8 \,.$$

Dans ce qui suit, on utilise librement la formule de Clebsch-Gordan; tous les signes $\oplus$ sont relatifs aux décompositions SL_2-linéaires.

Soit γ la cubique gauche de $\mathbf{P}$ image de $\mathbf{P}^1$, par le plongement de Véronèse. Nous allons montrer que la première flèche:

$$R \otimes \Omega_{\mathbf{P}}^2(2) \to V^\vee \otimes \Omega_{\mathbf{P}}(1)$$

de la monade de Ein n'est pas localement scindée aux points de γ. L'image réciproque sur $\mathbf{P}^1$ de l'application:

$$\Omega_{\mathbf{P}}^2(2) \to \Lambda^2 V \otimes O_{\mathbf{P}}$$

est le morphisme:

$$S_2 \otimes O_{\mathbf{P}^1}(-2) \to \Lambda^2 S_3 \otimes O_{\mathbf{P}^1}$$

déduit d'une application SL_2-linéaire:

$$S_2 \to \Lambda^2 S_3 \otimes S_2 \ .$$

De même l'image réciproque sur $\mathbf{P}^1$ de l'application:

$$\Omega_{\mathbf{P}}^1(1) \hookrightarrow V \otimes O_{\mathbf{P}}$$

est le morphisme de l'application:

$$S_2 \otimes O_{\mathbf{P}^1}(-1) \hookrightarrow S_3 \ .$$

Déduite de l'application SL_2-linéaire (unique):

$$S_2 \hookrightarrow S_3 \otimes S_1 \ .$$

La restriction à $\mathbf{P}^1$ de la flèche de gauche de la monade de Ein s'identifie à une application $O_{\mathbf{P}^1}$-linéaire:

$$[S_2 \otimes O_{\mathbf{P}^1}(-2)] \otimes S_2 \to [S_2 \otimes O_{\mathbf{P}^1}(-1))] \otimes S_3$$

et sera donc décrite par un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S_2 \otimes S_2, S_2 \otimes S_1 \otimes S_3)$. De plus, celles qui se déduisent d'un élément de la suite de S_8 doivent provenir d'un facteur du SL_2-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S_2 \otimes S_4, S_2 \otimes S_1 \otimes S_3)$ isomorphe à S_8, elles s'annulent donc toutes sur le facteur S_0 de $S_2 \otimes S_2$ puisque $S_2 \otimes S_2 \otimes S_3$ n'admet pas de facteur isomorphe à S_8. Ceci prouve l'assertion.

Comme $\mathfrak{R}_2$ est irréductible, il suffit pour prouver la proposition de vérifier que la famille des réseaux qui satisfont cette hypothèse est de dimension 20. Cela résulte du fait que $\mathrm{PGL}(V)$ est de dimension 15 et que le quotient de $\mathbf{P}(S_8)$ par l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est de dimension 5 ($20 = 15 + 5$). c.q.f.d.

6.2. Soit maintenant un réseau de Lüroth général décrit comme dans l'énoncé de la proposition précédente, on va lui associer un $O_{\mathbf{P}}$-module E, sans torsion de rang 2.

On applique le lemme du serpent au diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{N} \otimes O_{\mathbf{P}} \arrow[r] \arrow[d] & N \otimes O_{\mathbf{P}} \arrow[r] \arrow[d] & (N/\tilde{N}) \otimes O_{\mathbf{P}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \otimes O_{\mathbf{P}}(1) \arrow[r] & R \otimes O_{\mathbf{P}}(1) \arrow[r] & 0 \, . &
\end{tikzcd}$$

D'où une suite exacte:

$$0 \to R \otimes O_{\mathbf{P}}(-1) \to \mathscr{E} \to (N/\tilde{N}) \otimes O_{\mathbf{P}} \to \mathscr{F} \to 0$$

où $\mathscr{E}$ est le module (localement libre de rang 5) noyau de la flèche médiane et $\mathscr{F}$ est le conoyau de la flèche de gauche. Posons $E = \mathscr{E}/R \otimes O_{\mathbf{P}}(-1)$ c'est un $O_{\mathbf{P}}$-module sans torsion, de rang 2, de bidual $(N/\tilde{N}) \otimes O_{\mathbf{P}}$. E est la cohomologie médiane du complexe:

$$0 \to R^\vee \otimes O_{\mathbf{P}}(-1) \to N \otimes O_{\mathbf{P}} \to R \otimes O_{\mathbf{P}}(1)$$

dont la flèche de gauche n'est pas localement scindée. Le module de cohomologie $\bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} H^1(E(i))$ est le conoyau de l'application linéaire du sym(V)-module gradué:

$$N \otimes \operatorname{sym}(V) \to (R \otimes \operatorname{sym}(V))[1]$$

déduite de la fléche de droite de cette monade (i.e. comme d'habitude le sous module de $(\operatorname{sym}(V^\vee))[1]$ engendré par R). E est donc aussi la cohomologie de la monade de Ein (à décalage près):

$$R \otimes \Omega^2_{\mathbf{P}}(2) \to V^\vee \otimes \Omega_{\mathbf{P}}(1) \to O_{\mathbf{P}}\,.$$

On a vu (preuve de la proposition précédente) que la flèche de gauche de cette monade est non localement scindée aux points de la cubique gauche γ, il'en résulte que γ est contenue dans le support de $\mathscr{F}$. Compte-tenu de la suite exacte (voir par. 5):

$$0 \to R^\vee \otimes O_{\mathbf{P}}(-1) \to \tilde{N} \otimes O_{\mathbf{P}} \to R \otimes O_{\mathbf{P}}(1) \to \mathscr{F} \to 0$$

on en déduit que $\mathscr{F}$ s'identifie au O_γ-module inversible $\omega_\gamma^\vee(1)$ de degré 5 sur $\mathbf{P}^1$ (paramétrisant) γ (cela se voit en calculant le polynôme de Hilbert de $\mathscr{F}(n)$, la suite exacte ci-dessus est le complexe d'E.N. résolvant $\omega_\gamma^\vee(1)$).

Le module E apparait maintenant comme le noyau d'une application $O_{\mathbf{P}}$-linéaire surjective:

$$\delta\colon (N/\tilde{N}) \otimes O_{\mathbf{P}} \to \mathscr{F}$$

qui nous reste à décrire en terme de la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_8)$ définissant R. Si on paramétre γ par $\mathbf{P}^1$, comme dans la proposition précédante, on voit que la donnée de δ équivaut à la donnée d'une droite de $\mathbf{P}(S_5)$. On a une correspondance entre la grassmannienne des droites de $\mathbf{P}(S_5)$, qu'on note $\mathfrak{Gr}$ et l'espace projectif $\mathbf{P}(S_8)$ qui associe à un couple général d'éléments de S_5, le noyau de l'application linéaire:

$$S_8 \xrightarrow{(t_a,\, t_a)} S_3 \oplus S_3$$

où l'application $S_8 \xrightarrow{t_a} S_3$ désigne (imprudemment) la transposée, par rapport aux formes bilinéaires SL_2-invariantes sur les espaces en présence, de la multiplication par a de S_3 dans S_8.

Lemme. *La correspondance en δ et $(a_0, a_1, \ldots, a_8)$ est la correspondance birationnelle décrite ci-dessus.*

Preuve. Rappelons que la réciproque de la correspondance $\mathfrak{Gr} \to \mathbf{P}(S_8)$ associe à un élément général a de S_8 le noyau de l'application linéaire:

$$\begin{aligned} S_5 &\longrightarrow S_3 \\ b &\longrightarrow i_b(a) \end{aligned}$$

où i_b est le "produit intérieur" (application SL_2-invariante: $S_m \otimes S_n \to S_{m-n} m \geqq n$).

Soit $\Gamma \subset \mathbf{P}^{\vee}$ l'ensemble des plans H non stables pour E, i.e. tels que $H^0(E|_H) = 0$, il se décrit au moyen de R (supposé général) et plus précisément c'est le lieu de dégénérescence de la matrice

$$\left(\sum_{i=0}^{i=3} a_{i+j+k} X_i\right)_{k=0,1,2,\ j=0,1,2,3}.$$

Autrement dit Γ est le lieu des diviseurs de degré 3 de $\mathbf{P}^1$, dont au moins un multiple de degré 5 annule par produit intérieur le diviseur de degré 8 donné. D'autre part la suite exacte:

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow O_{\mathbf{P}}^2 \xrightarrow{\delta} \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

donne, pour tout plan H d'équation h, la suite exacte:

$$0 \longrightarrow H^0(E|_H) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \longrightarrow H^0(\mathscr{F}/h\mathscr{F}(-1)) .$$

On a donc $H^0(E|_H) \neq 0$ si et seulement si il existe un diviseur de degré 5 du pinceau défini par δ qui est multiple du diviseur H. c.q.f.d.

Références

[B1] Barth, W.: Some properties of rank 2 vector bundles on $\mathbf{P}_n$. Math. Ann. **226**, 125–150 (1977)

[B2] Barth, W.: Moduli of vector bundles on the projective plane. Invent. Math. **42**, 63–91 (1977)

[B] Bateman, H.: The quartic curves and its inscribed configurations. Am. J. Math. **36**, 357–389 (1914)

[E-S] Ellingstrud, G., Strømme, S.A.: Stable rank 2 vector bundles on $\mathbf{P}^3$ with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$. Math. Ann. **255**, 123–135 (1981)

[H] Hartshorne, R.: Stable vector bundle of rank 2 on $\mathbf{P}_3$. Math. Ann. **238**, 229–280 (1978)

[O-S-S] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H.: Vector bundles on complex projective spaces. (Prog. Math., vol. 3) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1980

[S-S] Shiffman, B., Sommese, A.: Vanishing theorems on complex manifolds. (Prog. Math., vol. 56) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1985

[Tr] Trautmann, G.: Poncelet curves and associated theta characteristics. Expos. Math. **6**, 29–64 (1988)

[T] Tyurin, A.: On superposition of mathematical Instanton. In: Artin, M., Tate, J. (eds.) Arithmetic and geometry. (Prog. Math., vol. 36, pp. 433–450) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1983