

Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik.

Von

Erich Bessel-Hagen in Göttingen.

Bei Gelegenheit eines Kolloquiums, das Herr Geheimrat F. Klein im Wintersemester 1920 über mathematische Fragen zu den Relativitätstheorien der Physiker abhielt, äußerte er den Wunsch, es möchten doch die vor etwa zwei Jahren von Fräulein Emmy Noether aufgestellten Sätze über invariante Variationsprobleme¹⁾ auf die Maxwellschen Gleichungen angewandt werden. Der Inhalt dieser Sätze ist kurz gesagt der, daß aus der Invarianz eines Variationsproblems gegenüber einer kontinuierlichen Transformationsgruppe eine Anzahl von Relationen folgt, die vermöge der Differentialgleichungen des Problems identisch erfüllt sind und im Falle *einer* unabhängigen Veränderlichen erste Integrale desselben darstellen. Im Falle einer endlichen Gruppe haben diese Beziehungen die Form der von den Physikern so genannten „Erhaltungssätze“.

Die Maxwellschen Gleichungen sind nun, wie allgemein bekannt, invariant gegenüber einer endlichen zehngliedrigen Gruppe, der sogenannten Lorentzgruppe, die aus den reellen „Bewegungen“ des vierdimensionalen x, y, z, t -Raumes besteht, wobei der Maßbestimmung der im Unendlichen gelegene Teil des Gebildes

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

zugrunde gelegt ist. Im Jahre 1909 entdeckte aber H. Bateman²⁾, daß die Maxwellschen Gleichungen gegenüber einer viel umfassenderen Gruppe

¹⁾ Göttinger Nachrichten 1918, S. 235 ff., im folgenden kurz zitiert mit E. Noether. Siehe auch Felix Klein, Ges. math. Abhandl. 1, S. 585. Berlin 1921.

²⁾ Proc. London Math. Soc. (2), 8, S. 228 ff. Im gleichen und im vorhergehenden Bande dieser Zeitschr. finden sich weitere Untersuchungen von Bateman und Cunningham über die Bedeutung unserer \mathcal{G}_{15} für die Physik. Siehe auch F. Klein, Ges. math. Abhandl. 1, S. 552.

von Transformationen invariant sind, nämlich der Gruppe aller derjenigen, welche die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0$$

ungeändert lassen und den Richtungssinn der vierdimensionalen Figuren nicht umkehren³⁾. Schreibt man x_1, x_2, x_3, x_4 statt x, y, z, ict , so stimmt diese Gruppe, abgesehen von der Realität der Parameter, mit der größten in der 15 gliedrigen Gruppe der Transformationen durch reziproke Radien, der sogenannten konformen Gruppe⁴⁾ im R_4 , enthaltenen Untergruppe überein. Da nun, wie schon J. L. Larmor⁵⁾ bemerkt hat, die Maxwell'schen Gleichungen aus einem Variationsproblem gewonnen werden können, und da auch dieses, wie weiter unten gezeigt wird, gegenüber der genannten \mathcal{G}_{15} invariant ist, müssen die E. Noetherschen Sätze uns fünfzehn linear unabhängige elektrodynamische Erhaltungssätze liefern. Diese wirklich aufzustellen, ist Zweck der vorliegenden Note.

Die ersten sieben von ihnen (vgl. Formeln 27 a_r, a_z und b_r) sind nichts anderes, als die wohlbekannten Sätze von der Erhaltung der Energie, des Impulses und des Drehimpulses⁶⁾; ich brauche daher auf ihre Deutung nicht näher einzugehen. Die drei folgenden (27 b_z) bilden eine genaue Analogie zu den zweiten Schwerpunktssätzen der klassischen Mechanik und wurden für die *elektrodynamischen* Erscheinungen meines Wissens zum ersten Male von A. Einstein⁷⁾ durch formale Integration aus den Maxwell'schen Gleichungen gewonnen. Einstein behauptete a. a. O. ihre Gültigkeit nur in erster Annäherung, weil ihm damals anscheinend die Anpassung der Dynamik an die Relativitätstheorie der Lorentzgruppe noch unbekannt war. Für die *Mechanik der Kontinua* im Sinne der Relativitätstheorie hat G. Herglotz⁸⁾ die entsprechenden Formeln aufgestellt (übrigens genau auf dem gleichen Wege, wie es hier geschieht) und auch ausdrücklich als Schwerpunktssätze gedeutet. Die fünf übrigen Formeln (27 c, d_r und d_z)

³⁾ Bateman nennt diese „spherical wave transformations“.

⁴⁾ Näheres über die konforme Gruppe zu finden in S. Lie und G. Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig 1896, 1, Kap. 10, §§ 1 und 2, S. 441 ff.

⁵⁾ *Aether and matter*, Cambridge 1900, § 50, S. 83 ff. Siehe auch F. Klein, *Seminarvorträge über die Entwicklung der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert*, Kap. X, B. II, § 4 (1917). (Eine Ausarbeitung dieser Vorträge ist in Abschriften bei zahlreichen mathematischen Universitätsinstituten vorhanden.)

⁶⁾ Siehe etwa M. v. Laue, *Die Relativitätstheorie* 1, 4. Aufl., Braunschweig 1921, § 15 b–e.

⁷⁾ *Ann. d. Phys.* (4), 20 (1906), S. 627 ff.

⁸⁾ *Ann. d. Phys.* (4), 36 (1911), S. 493 ff. Vgl. insbes. die Formeln 96' auf S. 513.

sind meines Wissens neu. Inwieweit sie den Zwecken der Physiker dienlich sein können, muß die Zukunft entscheiden.

§ 1.

Die E. Noetherschen Sätze.

Zuerst gebe ich die beiden E. Noetherschen Sätze an, und zwar in einer etwas allgemeineren Fassung als sie in der zitierten Note stehen. Ich verdanke diese einer mündlichen Mitteilung von Fräulein Emmy Noether selbst. Vorgelegt sei ein Integral

$$(1) \quad I_x = \int \dots \int f \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots \right) dx,$$

erstreckt über ein beliebiges reelles Gebiet der Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n . $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$ sind hierin Abkürzungen für μ reelle Funktionen der x_1, \dots, x_n und deren partielle Ableitungen⁹⁾, dx steht kurz für $dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Durch eine eindeutige und eindeutig umkehrbare Variablentransformation

$$(2) \quad \begin{cases} y_i = A_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) & [i = 1, 2, \dots, n], \\ v_\rho(y) = B_\rho \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) & [\rho = 1, 2, \dots, \mu] \end{cases}$$

und ihre Erweiterungen für die Transformation der Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \dots$ geht (1) über in

$$I_y = \int \dots \int \bar{f} \left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \dots \right) dy,$$

wo das Integral über das dem x -Gebiet in (1) entsprechende y -Gebiet zu erstrecken ist. Ist insbesondere die Funktion \bar{f} mit der Funktion f identisch, so heißt I invariant gegenüber der Transformation (2).

Wir betrachten jetzt eine kontinuierliche Gruppe von Transformationen (2) und nehmen an, daß die Parameter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\rho$ im Falle einer endlichen Gruppe \mathfrak{G}_ρ , bzw. die willkürlichen Funktionen $p^{(1)}(x), p^{(2)}(x), \dots, p^{(\rho)}(x)$ im Falle einer unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ so gewählt sind, daß der identischen Transformation die Werte $\varepsilon = 0$ bzw. die Funktionen $p(x) \equiv 0, \frac{\partial p(x)}{\partial x} \equiv 0, \dots$ entsprechen. Dann erhalten die Transformationsformeln (2) die Gestalt

$$(3) \quad \begin{cases} y_i = x_i + \Delta x_i + \dots & [i = 1, 2, \dots, n], \\ v_\rho(y) = u_\rho + \Delta u_\rho + \dots & [\rho = 1, 2, \dots, \mu], \end{cases}$$

und es ist erlaubt anzunehmen, daß die $\Delta x_i, \Delta u_\rho$ in den ε bzw. den p

⁹⁾ Über die Zulässigkeit komplexer Größen vgl. E. Noether, S. 237, Fußnote 3.

und ihren Ableitungen linear sind¹⁰⁾. Brechen wir die rechten Seiten in (3) mit diesen linearen Gliedern ab, so heißen die entstehenden Transformationen nach Lie bekanntlich infinitesimale. Die Invarianz des Integrals I gegenüber einer infinitesimalen Transformation bedeutet dementsprechend, daß sich \bar{f} von f nur um Glieder unterscheidet, die in den ε bzw. den p , $\frac{\partial p}{\partial x}$, ... mindestens von der zweiten Ordnung sind.

Unter einer Divergenz sei ein Ausdruck der Form verstanden

$$\text{Div } A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n},$$

wobei die A_i Funktionen der x , u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, ... sind. Die Differentiationen nach den x sind total zu nehmen, d. h. indem die u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, ... als Funktionen der x betrachtet werden.

Ich nenne jetzt I gegenüber einer infinitesimalen Transformation „invariant bis auf eine Divergenz“, wenn

$$(4) \quad \bar{f} = f + \text{Div } C + \text{höhere Glieder},$$

wo der Ausdruck C in den ε bzw. p , $\frac{\partial p}{\partial x}$, ... *linear* ist. Der Fall, daß C identisch Null ist, sei gelegentlich in dieser Redeweise mit einbegriffen¹¹⁾. In der Einführung dieses Begriffes liegt die am Eingang des Paragraphen erwähnte Verallgemeinerung gegenüber der ursprünglichen Veröffentlichung von Fräulein Emmy Noether.

Nunmehr können wir die E. Noetherschen Sätze aussprechen: *Ist das Integral I gegenüber den infinitesimalen Transformationen einer endlichen \mathcal{G}_c bis auf eine Divergenz invariant, so werden genau ρ linear unabhängige Verbindungen der Lagrangeschen Ausdrücke zu Divergenzen. Man setze nämlich*

$$(5) \quad \delta u_i = v_i(x) - u_i(x) = \Delta u_i - \sum_{\lambda} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\lambda}} \Delta x_{\lambda}$$

und definiere A_1, \dots, A_n durch die Identität

$$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f + \text{Div } A,$$

¹⁰⁾ Vgl. E. Noether, S. 244 unten und S. 246, Anfang von § 4.

¹¹⁾ Während die vollständige Invarianz gegenüber einer infinitesimalen Transformation T die vollständige Invarianz gegenüber der eingliedrigen Gruppe, die durch T erzeugt wird, ohne weiteres nach sich zieht, ist das entsprechende bei der Invarianz bis auf eine Divergenz im allgemeinen nicht der Fall. Deshalb mußte die Definition dieses Begriffes notwendigerweise an die infinitesimalen Transformationen geknüpft werden.

in welcher die ψ_i die Lagrangeschen Ausdrücke der Funktion f bedeuten, und weiter B_1, \dots, B_n durch die Gleichungen

$$(6) \quad B_i = C_i + A_i - f \Delta x_i.$$

Dann zerspalte man δu und B nach den einzelnen ε :

$$\delta u_i = \varepsilon_1 \delta^{(1)} u_i + \dots + \varepsilon_\rho \delta^{(\rho)} u_i,$$

$$B_i = \varepsilon_1 B_i^{(1)} + \dots + \varepsilon_\rho B_i^{(\rho)},$$

und die gesuchten Divergenzrelationen werden:

$$(7) \quad \sum \psi_i \delta^{(1)} u_i = \text{Div } B^{(1)}, \dots \quad \sum \psi_i \delta^{(\rho)} u_i = \text{Div } B^{(\rho)} \quad {}^{12)}.$$

Ist umgekehrt von den Lagrangeschen Ausdrücken bekannt, daß für geeignete Funktionen δu und geeignete B genau ρ linear unabhängige Relationen (7) bestehen, so kann man rückwärts¹³⁾ ρ linear unabhängige infinitesimale Transformationen herstellen, gegenüber denen I bis auf eine Divergenz invariant ist. Da die Zerspaltung von B in C und $A - f \Delta x$ auf mannigfache Weise möglich ist, lassen sich auch mannigfache Systeme von solchen infinitesimalen Transformationen angeben. Man überzeugt sich nun leicht von der Richtigkeit der Bemerkung, daß es dann und nur dann möglich ist, die genannte Zerfällung so vorzunehmen, daß die resultierenden Transformationen von den $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ... frei sind, wenn die Funktionen δu von den $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, ... frei sind und von den $\frac{\partial u}{\partial x}$ entweder gleichfalls frei sind oder in sehr spezieller Weise linear abhängen¹⁴⁾. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, läßt sich beweisen, daß die ρ infinitesimalen Transformationen, zu denen man gelangt, genau eine ρ -gliedrige Gruppe erzeugen.

Zum Zwecke der späteren Anwendung notiere ich noch den Ausdruck für die B_i im Falle, daß f nur von den ersten Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ abhängt:

$$(8) \quad B_i = C_i - \sum_k \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_k}{\partial x_i}} \Delta u_k + \sum_\lambda \Delta x_\lambda \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_k}{\partial x_i}} \frac{\partial u_k}{\partial x_\lambda} - \delta_{\lambda i} f \right)$$

$$\delta_{\lambda i} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \lambda \neq i, \\ 1, & \text{wenn } \lambda = i. \end{cases}$$

¹²⁾ Vgl. E. Noether, § 2, S. 242.

¹³⁾ Wie bei E. Noether, § 3, ausgeführt.

¹⁴⁾ Nämlich

$$\delta u_i = \alpha_i(x, u) + \sum_\lambda \beta_\lambda(x, u) \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda}.$$

Dann läßt sich erreichen:

$$\Delta x_i = -\beta_i(x, u), \quad \Delta u_i = \alpha_i(x, u), \quad C_i = \frac{A_i - B_i}{f} + \beta_i(x, u).$$

Der zweite Satz bezieht sich auf eine unendliche kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}_{\infty \varrho}$ und besagt, daß die Invarianz von I bis auf eine Divergenz gegenüber den infinitesimalen Transformationen der $\mathfrak{G}_{\infty \varrho}$ ϱ linear unabhängige Abhängigkeiten zwischen den ψ_i und ihren totalen Ableitungen nach den x zur Folge hat, und daß umgekehrt das Bestehen ϱ solcher linear unabhängiger Abhängigkeiten die Invarianz von I bis auf eine Divergenz gegenüber gewissen ϱ infinitesimalen Transformationen mit ϱ willkürlichen Funktionen nach sich zieht. Um die genannten Abhängigkeiten aufzustellen, schreibe man Gleichung (5) in entwickelter Form auf:

$$(9) \quad \delta u_i = \sum_{\lambda=1}^{\varrho} \left\{ a_i^{(\lambda)}(x, u, \dots) p^{(\lambda)}(x) + b_i^{(\lambda)}(x, u, \dots) \frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x} + \dots \right. \\ \left. + c_i^{(\lambda)}(x, u, \dots) \frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma} \right\}.$$

Dann lauten die Abhängigkeiten einfach:

$$(10) \quad \sum_i \left\{ (a_i^{(\lambda)} \psi_i) - \frac{\partial}{\partial x} (b_i^{(\lambda)} \psi_i) + \dots + (-1)^\nu \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} (c_i^{(\lambda)} \psi_i) \right\} = 0 \\ [\lambda = 1, 2, \dots, \varrho]^{15)}.$$

§ 2.

Anwendung auf das n -Körperproblem.

Ein erstes Beispiel für die bequeme Anwendbarkeit der E. Noetherschen Sätze bietet die Herleitung der bekannten zehn Integrale des n -Körperproblems. Obwohl der zugrunde liegende Gedanke wie auch die Ausführung im einzelnen nicht neu sein dürften¹⁶⁾, führe ich die kurze Rechnung vollständig durch um der formalen Analogie mit den nachher aufzustellenden elektrodynamischen Erhaltungssätzen willen. Die Differentialgleichungen des n -Körperproblems ergeben sich aus dem Variationsproblem

$$\delta \int \bar{L} dt = 0,$$

¹⁵⁾ E. Noether, § 2, S. 243.

¹⁶⁾ Auch mit Lieschen Methoden, jedoch ohne Ausnutzung des vorteilhaften Umstandes, daß die Differentialgleichungen aus einem Variationsproblem entspringen, behandelt diese Frage F. Engel, Gött. Nachr. 1916, S. 270 ff. — Der Vergleich dürfte den Vorzug des Variationsansatzes deutlich zum Ausdruck bringen. — Für die geschichtliche Entwicklung der Einsicht in die Bedeutung und den Zusammenhang der zehn Integrale der Bewegungsgleichungen vergleiche man die betreffenden Stellen in Jacobis Vorlesungen über Dynamik; ferner die interessante Note von J. R. Schütz in den Gött. Nachr. 1897, S. 110 ff., sowie die zusammenfassende Darstellung von F. Klein in „Die Entwicklung der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert“, Kap. 10, A § 2 und C § 4. 1917.

wo die Querstriche andeuten mögen, daß bei festen Grenzen zu variieren ist. Hierin hat die Lagrangesche Funktion L die folgende Bedeutung:

$$L = T - U,$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_{i1}^2 + \dot{x}_{i2}^2 + \dot{x}_{i3}^2),$$

$$U = - \sum \frac{\kappa m_i m_k}{r_{ik}}, \quad 1 \leq i < k \leq n,$$

$$r_{ik} = \sqrt{(x_{i1} - x_{k1})^2 + (x_{i2} - x_{k2})^2 + (x_{i3} - x_{k3})^2},$$

$$\kappa = \text{Gravitationskonstante,}$$

und die x_{ik} sind aus dem Variationsproblem als Funktionen von t zu bestimmen. Es handelt sich hier also um ein *einfaches* Integral, t tritt an die Stelle der vorhin mit x und die x_{ik} treten an die Stelle der vorhin mit u bezeichneten Größen.

Bekanntlich sind die Bewegungsgleichungen des n -Körperproblems gegenüber einer endlichen zehngliedrigen Gruppe, der sogenannten „Galilei-Newtongruppe“ invariant. An dem Variationsproblem zeigt sich diese Invarianz in der Weise, daß L gegenüber den infinitesimalen Transformationen der Gruppe zum Teil vollständig, zum Teil bis auf eine Divergenz invariant ist. Diese lauten nämlich:

$$(11) \quad \begin{array}{ll} \text{a)} & \Delta t = \tau, \quad \Delta x_{ik} = 0, \\ \text{b)} & \Delta t = 0, \quad \Delta x_{ik} = \alpha_k, \\ \text{c)} & \Delta t = 0, \quad \Delta x_{ik} = \sum_{e=1}^3 \beta_{ke} x_{ie} \quad \left(\begin{array}{l} \beta_{kk} = 0 \\ \beta_{ke} = -\beta_{ek} \end{array} \right), \\ \text{d)} & \Delta t = 0, \quad \Delta x_{ik} = \gamma_k t \quad [k = 1, 2, 3], \end{array}$$

und man sieht ohne Mühe, daß bei a), b), c) $\Delta L = 0$ ist, dagegen ist bei d)

$$\Delta L = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 m_i \gamma_k x_{ik} \right) = \frac{d}{dt} C = \text{Div } C.$$

Nunmehr ergeben die Formeln (5) und (8)

$$\delta x_{ik} = \Delta x_{ik} - \dot{x}_{ik} \Delta t,$$

$$B = C - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 m_i \dot{x}_{ik} \Delta x_{ik} + \Delta t (T + U),$$

und die E. Noetherschen Divergenzrelationen nehmen die Form an:

$$(12) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 \dot{x}_{ik} \psi_{ik} = \frac{d}{dt} (T + U), \\ \text{b)} \quad & \sum_{i=1}^n \psi_{iv} = - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_{ik} \quad [k = 1, 2, 3], \\ \text{c)} \quad & \sum_{i=1}^n (x_{i\mu} \psi_{iv} - x_{iv} \psi_{i\mu}) = - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (x_{i\mu} \dot{x}_{iv} - x_{iv} \dot{x}_{i\mu}) \\ & \quad \quad \quad [(\mu, \nu) = (2, 3), (3, 1), (1, 2)], \\ \text{d)} \quad & \sum_{i=1}^n t \psi_{ik} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n m_i x_{ik} - t \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_{ik} \right\} \quad [k = 1, 2, 3]. \end{aligned}$$

Soweit handelte es sich um rein *formale* Identitäten, die sich übrigens nachträglich leicht direkt verifizieren lassen, indem man

$$\psi_{ik} = \frac{\partial L}{\partial x_{ik}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ik}} \right) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^n \frac{x_{i\nu} m_i m_\nu}{r_{i\nu}^3} (x_{\nu k} - x_{ik}) - \frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_{ik})$$

einsetzt. Von der Forderung $\delta \int L dt = 0$ ist bisher keinerlei Gebrauch gemacht. Betrachten wir nun jedoch die *Differentialgleichungen* des n -Körperproblems, so haben wir die Lagrangeschen Ausdrücke ψ_i gleich Null zu setzen, und die Gleichungen (12), deren linke Seiten dann verschwinden, liefern uns die zehn bekannten ersten Integrale des Problems, nämlich (12a) den Energiesatz, b) die drei ersten Schwerpunktssätze (auch Impulssätze genannt), c) die drei Flächensätze, und d) die drei zweiten Schwerpunktssätze. Die Form, in der die letzteren erscheinen, weicht von der sonst üblichen etwas ab; um zu dieser zu gelangen, hat man nur zu beachten, daß nach (12b) $\sum_i m_i \dot{x}_{ik} = c_k$ ist, woraus dann folgt:

$$(13) \quad \sum_{i=1}^n m_i x_{ik} = c_k t + c'_k \quad [k = 1, 2, 3].$$

($c_k, c'_k = \text{Konstanten.}$)

Für uns ist aber gerade die Form (12d) von Bedeutung, erstens, weil sie zeigt, daß die zweiten Schwerpunktssätze sich völlig in die Reihe der übrigen Erhaltungssätze einordnen, zweitens, weil sie uns so den Schlüssel zur Deutung der analogen elektrodynamischen Relationen (28) geben.

§ 3.

Übersicht über die im folgenden gebrauchten Bezeichnungen.

Vor der Behandlung der elektrodynamischen Gleichungen schicke ich eine Übersicht über die im folgenden gebrauchten Bezeichnungen voraus.

Im allgemeinen halte ich mich an die von M. v. Laue in seinem Buche „Die Relativitätstheorie“ Bd. I gebrauchten, auch folge ich weiterhin v. Laue in der Symbolik für den drei- und vierdimensionalen Vektor- und Tensorkalkül, so häßlich diese auch ist, so daß der Leser alle ihm etwa unbekanntem Symbole dort nachschlagen kann. Das Maßsystem ist das Lorentzsche¹⁷⁾ in CGS-Einheiten. c bedeutet fortan, wie immer, die Lichtgeschwindigkeit.

Tabelle der Bezeichnungen¹⁸⁾

in vierdimensionaler Schreibweise	in dreidimensionaler Schreibweise
x_1, x_2, x_3, x_4	x, y, z, ict
	$r =$ Vektor vom Koordinatenanfangspunkt nach einem festen Raumpunkt, nicht nach beweglichem Teilchen.
Elektromagnetischer Sechsertensor:	
$f: f_{23}, f_{31}, f_{12}; f_{14}, f_{24}, f_{34}$ $f_{ik} = -f_{ki}$	$\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z; -i\mathfrak{E}_x, -i\mathfrak{E}_y, -i\mathfrak{E}_z$
Der dazu duale Sechsertensor:	
$f^*: f_{12}^* = f_{34}, f_{13}^* = f_{42}, f_{14}^* = f_{23}$ $f_{23}^* = f_{14}, f_{24}^* = f_{31}, f_{34}^* = f_{12}$	
Viererpotential: .	
$\varphi: \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	
Analogon zur Lagrangeschen Funktion:	
$\Lambda = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 f_{ik}^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < k \leq 4} f_{ik}^2$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2)$

¹⁷⁾ Siehe Encycl. d. math. Wissenschaften 5, Art. 13, 7d.

¹⁸⁾ Bei der Gegenüberstellung sind nicht alle Größen in beide Spalten aufgenommen, um nicht durch weitere Vermehrung an Buchstaben, die doch nicht benutzt werden, zu verwirren.

in vierdimensionaler Schreibweise	in dreidimensionaler Schreibweise
Elektromagnetischer Energie-Impulstensor:	$\begin{pmatrix} p_{exx} & p_{exy} & p_{exz} & \frac{i}{c} \mathfrak{S}_{ex} \\ p_{eyx} & p_{eyy} & p_{eyz} & \frac{i}{c} \mathfrak{S}_{ey} \\ p_{ezx} & p_{ezy} & p_{ezz} & \frac{i}{c} \mathfrak{S}_{ez} \\ \frac{i}{c} \mathfrak{S}_{ex} & \frac{i}{c} \mathfrak{S}_{ey} & \frac{i}{c} \mathfrak{S}_{ez} & -W_e \end{pmatrix}$
$S_{ik} = S_{ki} = \sum_{\lambda=1}^4 f_{i\lambda} f_{\lambda k} + \delta_{ik} A$	$p_e =$ Dichte der Maxwell'schen Spannungen
$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \neq k \\ 1, & \text{wenn } i = k \end{cases}$	$\mathfrak{S}_e = c [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] =$ Poynting'scher Vektor der elektromagnetischen Energieströmung
Dichte des Viererstromes:	$W_e = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) =$ Dichte der elektromagnetischen Feldenergie.
P_1, P_2, P_3, P_4	$g_e = \frac{\mathfrak{S}_e}{c^2} =$ Dichte des elektromagnetischen Impulses des Feldes
Dichte der elektrischen Viererkraft:	$\frac{\rho q_x}{c}, \frac{\rho q_y}{c}, \frac{\rho q_z}{c}, i\rho$
F_1, F_2, F_3, F_4	$\rho =$ räumliche Dichte der elektrischen Ladung
$F_i = \sum_k f_{ik} P_k$	$q =$ Geschwindigkeitsvektor der elektrischen Ladungen bzw. ihrer materiellen Träger.
Mechanischer Energie-Impulstensor:	Dichte der vom Felde auf die Ladungen ausgeübten Kraft:
$R_{ik} = R_{ki}$	$\mathfrak{F} = \rho \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [q, \mathfrak{H}] \right)$
	Dichte der Leistung dieser Kraft:
	$(\mathfrak{F}q) = \rho (\mathfrak{E}q)$
	$\left(\begin{array}{c c} [g_m, q] & ic g_m \\ \hline \frac{i}{c} \mathfrak{S}_m & -W_m \end{array} \right)$

in vierdimensionaler Schreibweise	in dreidimensionaler Schreibweise
<p>Gesamter Energie-Impulstensor:</p> $T_{ik} = T_{ki} = R_{ik} + S_{ik}$	$g_m =$ Dichte des mechanischen Impulses
	$= \frac{k_0 q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$
	$k_0 =$ Massendichte
	$W_m =$ Dichte der kinetischen Energie der bewegten Materie
	$= \frac{k_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$
	$\mathfrak{S}_m = q W_m =$ Dichte der durch die Bewegung der Materie vermittelten Energieströmung
	$\left(\begin{array}{c c} \mathbf{p} & ic\mathbf{g} \\ \hline \frac{i}{c}\mathfrak{S} & -W \end{array} \right)$
	$\mathbf{p} = \mathbf{p}_e + [[g_m, q]] =$ gesamter Spannungstensor
	$\mathbf{g} = \mathbf{g}_e + \mathbf{g}_m =$ gesamte Impulsdichte
	$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_e + \mathfrak{S}_m =$ gesamte Energieströmung
	$W = W_e + W_m =$ gesamte Energiedichte.

§ 4.

Die Invarianz der Maxwell'schen Gleichungen gegen die konforme Gruppe.

Von den beiden Systemen der Maxwell'schen Gleichungen für den freien Äther

$$(14) \quad \text{I. } \text{Div } f^* = 0 \quad \text{II. } \text{Div } f = 0$$

wird das erste identisch befriedigt durch den Ansatz

$$(15) \quad f = \text{Rot } \varphi.$$

Führt man diesen in II. ein, so werden die linken Seiten von II. genau die Lagrangeschen Ausdrücke ψ_i des Variationsproblems

$$\delta \int \int \int \int A dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0,$$

bei dem x_1, x_2, x_3, x_4 als unabhängige Variable und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ als gesuchte Funktionen dieser zu betrachten sind und die Variation bei festem Rande und festen Randwerten der φ vorzunehmen ist, woran die Horizontalstriche erinnern sollen. Das hier auftretende Integral bleibt nun ungeändert, wenn man die x_1, \dots, x_4 einer beliebigen Transformation der 15 gliedrigen konformen Gruppe des R_4 unterwirft und gleichzeitig die Komponenten des Viererpotentials $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ kontragredient zu den Differentialen dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 umformt. Da wir es nur mit rein formalen Operationen zu tun haben, brauchen wir uns um die (vom Standpunkt des Physikers notwendigen) Realitätseinschränkungen der Parameter der Gruppe nicht zu kümmern. Die genannte Invarianz erkennt man leicht, wenn man unter Beachtung des Umstandes, daß sich die Größen $f_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ kontragredient zu den Größen $dx_i dx_k$ umsetzen, den Ausdruck ausrechnet, der durch beliebige lineare Transformation der dx aus dem Ausdruck

$$\left(\sum_{i,k} f_{ik}^2 \right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

entsteht. Man findet so, daß er dann und nur dann in den neuen Variablen die gleiche Form

$$\left(\sum_{i,k} \bar{f}_{ik}^2 \right) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 d\bar{x}_4$$

erhält wie in den alten, wenn die Transformation die Gleichung $\sum_i dx_i^2 = 0$ in die entsprechende $\sum_i d\bar{x}_i^2 = 0$ überführt. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet aber genau die konforme Gruppe.

Neben dieser endlichen kontinuierlichen Gruppe läßt das Variationsproblem offensichtlich noch eine unendliche Gruppe zu, welche die ersten Ableitungen einer willkürlichen Funktion enthält:

$$\bar{x}_i = x_i, \quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad [i = 1, 2, 3, 4],$$

da (vgl. 15) die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet.

§ 5.

Aufstellung der formalen Identitäten.

Auf Grund der E. Noetherschen Sätze müssen jetzt 15 linear unabhängige lineare Verbindungen der Lagrangeschen Ausdrücke

$$(16) \quad \psi_i = \sum_k \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right)$$

identisch zu Divergenzen werden, und außerdem muß zwischen den ψ_i und ihren ersten partiellen Ableitungen eine Abhängigkeit identisch erfüllt sein.

Ein System von 15 linear unabhängigen infinitesimalen Transformationen unserer \mathfrak{G}_{15} ist das folgende¹⁹⁾:

$$(17) \quad \begin{array}{l} \text{a) } \Delta x_k = \alpha_k, \\ \text{b) } \Delta x_k = \sum_{\varrho} \beta_{k\varrho} x_{\varrho} \\ \text{c) } \Delta x_k = \gamma x_k, \\ \text{d) } \Delta x_k = 2x_k \sum_{\varrho} \varepsilon_{\varrho} x_{\varrho} - \varepsilon_k \sum_{\varrho} x_{\varrho}^2 \quad [k = 1, 2, 3, 4]. \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \beta_{kk} = 0 \\ \beta_{k\varrho} = -\beta_{\varrho k} \end{array} \right),$$

Von diesen Transformationen entspricht die auf $k=4$ bezügliche von a) der Transformation (11a) der Galilei-Newtongruppe, die drei andern (17a) den räumlichen Translationen (11b); die zu den Parametern $\beta_{23}, \beta_{31}, \beta_{12}$ gehörigen „räumlichen Rotationen“ von (17b) entsprechen den Rotationen (11c) der Galilei-Newtongruppe, die drei übrigen zu $\beta_{14}, \beta_{24}, \beta_{34}$ gehörigen „zeitlichen Rotationen“ entsprechen der Einführung einer anders gerichteten t -Achse bei festgehaltenem x, y, z -Raum in der Galilei-Newtongruppe (11d). Die Formeln (17c) und d) entspringen der Zusammensetzung je zweier Transformationen durch reziproke Radien. Die zu den dx kontragradiente Transformation der φ ist einfach gegeben durch die Formel

$$(18) \quad \Delta \varphi_k = - \sum_{\lambda} \frac{\partial \Delta x_{\lambda}}{\partial x_k} \varphi_{\lambda} \quad [k = 1, 2, 3, 4]$$

und die infinitesimale Transformation der unendlichen kontinuierlichen Gruppe durch

$$\Delta x_k = 0 \quad \Delta \varphi_k = \frac{\partial p}{\partial x_k}.$$

¹⁹⁾ Siehe z. B. S. Lie und F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen 3, Leipzig 1893, S. 281.

Betrachten wir zunächst die der letzten entsprechende Abhängigkeit. Nach (5) wird

$$\delta \varphi_i = \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

somit ergibt der Vergleich mit (9) und (10)

$$(19) \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_i = 0.$$

Um die Divergenzrelationen aufzustellen, bilden wir nach (8)

$$B_i = - \sum_k f_{ik} \Delta \varphi_k + \sum_\lambda \Delta x_\lambda \left\{ \sum_k f_{ik} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_\lambda} - \delta_{\lambda i} A \right\},$$

was auf Grund der Definition des elektromagnetischen Energie-Impulstensors S_{ik} übergeht in

$$(20) \quad B_i = - \sum_k f_{ik} \Delta \varphi_k + \sum_\lambda \Delta x_\lambda \left\{ -S_{\lambda i} + \sum_k f_{ik} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_\lambda} \right\}.$$

Würden wir jetzt für Δx , $\Delta \varphi$ die Ausdrücke aus den Formeln (17) und (18) einsetzen, so würden wir zu Divergenzrelationen gelangen, die sehr lang und unübersichtlich gebaut sind²⁰⁾ und vor allem an dem wesentlichen Mangel leiden, daß in ihnen die Viererpotentialkomponenten φ , die doch hier nur mathematische Hilfsgrößen sind und keine selbständige reale physikalische Bedeutung haben, explizite und nicht nur in den physikalisch allein sinnvollen Verbindungen f_{ik} auftreten. Diesem Mangel läßt sich jedoch durch einen Kunstgriff abhelfen. Aus der unendlichen kontinuierlichen Gruppe lassen sich doch auf mannigfache Weisen endliche Gruppen aussondern, indem die Funktion p nicht völlig willkürlich, sondern nur von endlich viel Parametern abhängig genommen wird. Indem wir nun zu der Transformation (18) für ein in geeigneter Weise spezialisiertes p den Ausdruck $\frac{\partial p}{\partial x_k}$ hinzufügen, gewinnen wir gerade solche infinitesimale Transformationen, die zu Divergenzrelationen führen, in denen die φ nur noch in den Kombinationen f_{ik} auftreten. Wie wir das p zu spezialisieren haben, wird sich im Verlauf der Rechnung zeigen.

²⁰⁾ Nur als Beispiel gebe ich die aus (17d) fließenden Formeln

$$\begin{aligned} & \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ 2 f_{ik} \sum_r x_r \varphi_r - 2 x_i x_k A + \sum_r f_{ir} \left[2 (x_k \varphi_r - x_r \varphi_k) + 2 x_k \sum_s x_s \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_s} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_k} \sum_s x_s^2 \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(A \sum_s x_s^2 \right) = - \sum_i \psi_i \left\{ 2 (x_k \varphi_i - x_i \varphi_k) + 2 x_k \sum_s x_s \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \right. \\ & \left. - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \sum_s x_s^2 \right\} - 2 \psi_k \sum_r x_r \varphi_r \end{aligned} \quad [k = 1, 2, 3, 4].$$

Setzen wir demgemäß in (20) für $\Delta\varphi_k$ den Ausdruck

$$(21) \quad - \sum_{\lambda} \frac{\partial \Delta x_{\lambda}}{\partial x_k} \varphi_{\lambda} + \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

ein, so gewinnen wir

$$\begin{aligned} B_i &= \sum_k f_{ik} \left\{ \sum_{\lambda} \frac{\partial \Delta x_{\lambda}}{\partial x_k} \varphi_{\lambda} - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \sum_{\lambda} \Delta x_{\lambda} \frac{\partial \varphi_{\lambda}}{\partial x_k} \right\} - \sum_{\lambda} S_{\lambda i} \Delta x_{\lambda} \\ &= \sum_k f_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{\lambda} \varphi_{\lambda} \Delta x_{\lambda} - p \right) - \sum_{\lambda} S_{\lambda i} \Delta x_{\lambda}, \end{aligned}$$

und nun erkennt man, daß die richtige Spezialisierung von p

$$p = \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda} \Delta x_{\lambda}$$

ist. Nach (5) und (21) wird jetzt

$$\delta \varphi_i = \sum_{\lambda} f_{i\lambda} \Delta x_{\lambda},$$

so daß die Divergenzrelationen die Gestalt annehmen

$$(22) \quad \sum_i \sum_{\lambda} \psi_i f_{i\lambda} \Delta x_{\lambda} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{\lambda} S_{\lambda i} \Delta x_{\lambda} \right).$$

Setzen wir jetzt die Ausdrücke (17) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (23) \quad a) \quad & \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} S_{\lambda i} = \sum_i \psi_i f_{i\lambda} \quad [\lambda = 1, 2, 3, 4], \\ b) \quad & \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_{\mu} S_{\nu i} - x_{\nu} S_{\mu i}) = \sum_i \psi_i (x_{\mu} f_{i\nu} - x_{\nu} f_{i\mu}) \\ & \quad [(\mu, \nu) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)], \\ c) \quad & \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{\varrho} x_{\varrho} S_{\varrho i} \right) = \sum_i \psi_i \left(\sum_{\varrho} x_{\varrho} f_{i\varrho} \right), \\ d) \quad & \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ 2x_{\lambda} \sum_{\varrho} x_{\varrho} S_{\varrho i} - S_{\lambda i} \sum_{\varrho} x_{\varrho}^2 \right\} \\ & = \sum_i \psi_i \left\{ 2x_{\lambda} \sum_{\varrho} x_{\varrho} f_{i\varrho} - f_{i\lambda} \sum_{\varrho} x_{\varrho}^2 \right\} \quad [\lambda = 1, 2, 3, 4]. \end{aligned}$$

§ 6.

Einführung der physikalischen Ansätze.

Bis zu diesem Punkte handelte es sich wiederum nur um rein formale Identitäten, die sich durch Einsetzen von (16) und der aus der Tabelle auf Seite 266—268 folgenden Werte der S_{ik} als Funktionen der φ verifizieren

lassen. Erst jetzt setzt der physikalische Ansatz ein, indem für den freien Äther die Lagrangeschen Ausdrücke ψ_i gemäß (14 II) gleich Null gesetzt werden und für mit ponderabler Materie erfüllte Gebiete gleich den bezüglichen Komponenten des Viererstromes P_i ²¹⁾. Solcherweise folgen aus den Identitäten (19) und (23) nunmehr physikalische Sätze, die mit dem Namen „Erhaltungssätze“ benannt zu werden pflegen. Um aber den physikalischen Inhalt in aller Vollständigkeit herauszubringen, dürfen wir uns bei Anwesenheit ponderabler Materie nicht auf die durch den Ansatz $\psi_i = P_i$ gelieferten Erscheinungen im elektromagnetischen Feld allein beschränken, sondern müssen die Wechselwirkung von Feld und ponderablen Massen berücksichtigen, die durch den Ausdruck für die Viererkraft

$$F_k = \sum_i f_{ki} P_i$$

geliefert wird. Diese Kraft- bzw. Leistungsdichte steht ihrerseits auf Grund der relativistischen Dynamik mit der Impuls- und der Energiedichte der durch sie bewegten Massen in der Beziehung

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{\partial g_m}{\partial t} + \operatorname{div} [[g_m, q]], \\ (\mathfrak{F} q) &= \frac{\partial W_m}{\partial t} + \operatorname{div} q W_m, \end{aligned}$$

oder vierdimensional geschrieben

$$F_k = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} R_{ki}.$$

Hiernach nehmen die Erhaltungssätze die Form an

$$\begin{aligned} (24) \quad a) \quad & \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T_{\lambda i} = 0 && [\lambda = 1, 2, 3, 4], \\ b) \quad & \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_\mu T_{\nu i} - x_\nu T_{\mu i}) = 0 && [(\mu, \nu) = (1, 2), \dots (3, 4)], \\ c) \quad & \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_e x_e T_{ei} \right) = \sum_i R_{ii}, \\ d) \quad & \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ 2x_\lambda \sum_e x_e T_{ei} - T_{\lambda i} \sum_e x_e^2 \right\} = 2x_\lambda \sum_i R_{ii} && [\lambda = 1, 2, 3, 4], \end{aligned}$$

wobei $S_{\lambda i} + R_{\lambda i} = T_{\lambda i}$ geschrieben und von der Symmetrie $R_{ik} = R_{ki}$ Gebrauch gemacht worden ist.

²¹⁾ Ich beschränke mich der Einfachheit halber auf die Grundgleichungen der Elektronentheorie, d. h. auf den Grenzfall $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ der Gleichungen für ponderable Materie.

§ 7.

Die physikalische Deutung der Ergebnisse.

Um die physikalische Bedeutung der Sätze (24) zu ermitteln, spalten wir sie notgedrungen in ihre räumlichen und zeitlichen Bestandteile, obwohl die schöne Symmetrie der Formeln dadurch auf das Grausamste zerstört wird. Die Umschreibung in die dreidimensionale Vektoranalysis liefert, wenn noch K zur Abkürzung für die Summe ΣR_{ii} geschrieben wird,

$$(25) \quad a_r)^{22)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g} + \operatorname{div} \mathbf{p} = 0,$$

$$a_z) \quad \frac{\partial}{\partial t} W + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0,$$

$$b_r) \quad \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{r}, \mathbf{g}] + \operatorname{div} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = 0 \quad {}^{23)},$$

$$b_z) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mathbf{r} \frac{W}{c^2} - t \mathbf{g} \right\} + \operatorname{div} \left\{ \left[[\mathbf{r}, \frac{\mathfrak{S}}{c^2}] \right] - t \mathbf{p} \right\} = 0,$$

$$c) \quad \frac{\partial}{\partial t} \{ (\mathbf{r} \mathbf{g}) - W t \} + \operatorname{div} \{ [\mathbf{r}, \mathbf{p}] - \mathfrak{S} t \} = K,$$

$$d_r) \quad \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{r} (\mathbf{r} \mathbf{g}) + [\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{g}]] - 2 \mathbf{r} t W + c^2 t^2 \mathbf{g} \} \\ + \operatorname{div} \{ [[[\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{p}]]] + [\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]] - 2 t [[[\mathbf{r}, \mathfrak{S}]] + c^2 t^2 \mathbf{p}] \} = 2 \mathbf{r} K,$$

$$d_z) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 2 t (\mathbf{r} \mathbf{g}) - \frac{W}{c^2} (\mathbf{r}^2 + c^2 t^2) \right\} \\ + \operatorname{div} \{ 2 t [\mathbf{r}, \mathbf{p}] - \mathbf{g} (\mathbf{r}^2 + c^2 t^2) \} = 2 t K.$$

Zu diesen Gleichungen tritt noch die aus (19) folgende sogenannte Kontinuitätsgleichung der Elektrizität hinzu

$$(26) \quad \operatorname{div} (\varrho \mathbf{q}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

Die Gleichungen (25) formt man häufig aus der Differential- in eine Integralform um, indem man sie über ein dreidimensionales Raumstück

²²⁾ Der Index r entspricht den räumlichen, der Index z den zeitlichen Komponenten.

²³⁾ Da v. Laue das Zeichen $[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ schon für den Vektor mit der x -Komponente $x p_{xx} + y p_{xy} + z p_{xz}$ verbraucht hat, habe ich mir erlaubt, hier das Zeichen $[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ für den Tensor

$$\begin{pmatrix} y p_{zx} - z p_{yx} & y p_{zy} - z p_{yy} & y p_{zz} - z p_{yz} \\ z p_{xx} - x p_{zx} & z p_{xy} - x p_{zy} & z p_{xz} - x p_{zz} \\ x p_{yx} - y p_{xx} & x p_{yy} - y p_{xy} & x p_{yz} - y p_{xz} \end{pmatrix}$$

zu benutzen. Übrigens gilt $[\mathbf{r}, \operatorname{div} \mathbf{p}] = \operatorname{div} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$.

integriert, wobei die Integrale über die Divergenzglieder zu Oberflächenintegralen werden. Wir wollen annehmen, daß wir ein abgeschlossenes im Endlichen gelegenes System von Massen und Ladungen vor uns haben, und daß die Komponenten des Energie-Impulstensors nach außen so rasch abnehmen, daß wir für ein hinreichend großes, Massen und Ladungen in seinem Innern enthaltendes Integrationsgebiet B die Oberflächenintegrale gegenüber den Raumintegralen vernachlässigen dürfen. Dann ergeben die Formeln (25 a_r), a_z) und b_r) die Erhaltung des Impulses, der Energie und des Drehimpulses unseres gesamten Systems:

$$(27) \quad \begin{aligned} a_r) \quad & \int \int \int_B \mathbf{g} \, d\tau = \mathfrak{G} = \text{konstanter Vektor,} \\ a_z) \quad & \int \int \int_B W \, d\tau = E = \text{Konstante,} \\ b_r) \quad & \int \int \int_B [\mathbf{r}, \mathbf{g}] \, d\tau = \mathfrak{L} = \text{konstanter Vektor.} \end{aligned}$$

Formel (25 b_z) dagegen nimmt zunächst die Gestalt

$$(28) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \int \int_B \mathbf{r} \frac{W}{c^2} \, d\tau - t \int \int \int_B \mathbf{g} \, d\tau \right\} = 0$$

an, deren ganz deutliche Analogie zum zweiten Schwerpunktssatz (12 d) bei dem n -Körperproblem wir sogleich erkennen werden. Vom Standpunkte der Relativitätstheorie aus hat man ja Masse und Energie als identisch zu betrachten, und zwar ist eine Masse m als Energie von der Größe $m c^2$ anzusehen. Umgekehrt wird es gestattet sein, jede Energie mit der Dichte W einer Massendichte von der Größe $\frac{W}{c^2} = k$ äquivalent zu setzen. Hierdurch erhält auch das elektromagnetische Feld im freien Äther einen „Schwerpunkt“, und

$$\int \int \int_B \mathbf{r} \frac{W}{c^2} \, d\tau = \int \int \int_B \mathbf{r} k \, d\tau$$

ist der mit der Gesamtmasse $\frac{E}{c^2}$ multiplizierte Radiusvektor vom Koordinatenanfangspunkt zu dem gemeinsamen Schwerpunkt von elektromagnetischem Feld und ponderabler Materie, entspricht also völlig der in (12 d) stehenden Größe $\sum_i m_i x_{ik}$, während die mit t multiplizierten Glieder in (28) und (12 d) beidemal den Gesamtimpuls des Systems bedeuten. Aus Formel (28) in Verbindung mit (27 a_r) folgt dann

$$(27 b_z) \quad \int \int \int_B \mathbf{r} \frac{W}{c^2} \, d\tau = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{G} t \quad (\mathfrak{C}_1 = \text{konstanter Vektor})$$

wieder in völliger Analogie zu (13), d. h.

Der gemeinsame Schwerpunkt des elektromagnetischen Feldes und der ponderablen Materie bewegt sich geradlinig gleichförmig.

Die fünf übrigen Sätze haben wegen des Auftretens der Größe K nicht mehr die Form reiner Erhaltungssätze ($\frac{\partial}{\partial t}$ von Raumintegral = Oberflächenintegral), wenn bewegte Körper im Integrationsgebiet vorhanden sind; daher läßt sich die Integration nach der Zeit nicht explizite durchführen. Trotzdem kommt den Sätzen natürlich ein wohlbestimmter physikalischer Sinn zu. Um aber die Auffassung zu erleichtern, wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß wir es nur mit den Erscheinungen im freien Äther zu tun haben, und daß keine ponderablen Massen durch das Feld bewegt werden. Dann wird $K = 0$ und wir haben wieder reine Erhaltungssätze, die wir in der Form schreiben können:

$$(27) \times c) \quad \iiint_B (\mathbf{r} g_e) d\tau = C_1 + E_e t,$$

$$d_r) \quad \iiint_B \{ \mathbf{r} (\mathbf{r} g_e) + [\mathbf{r}, [\mathbf{r}, g_e]] \} d\tau = \mathfrak{C}_2 + 2c^2 \mathfrak{C}_1 t + c^2 \mathfrak{G}_e t^2,$$

$$d_z) \quad \iiint_B \mathbf{r} \frac{W_e}{c^2} d\tau = C_2 + 2C_1 t + E_e t^2$$

$$C_1, C_2 = \text{Konstanten}, \quad \mathfrak{C}_2 = \text{konstanter Vektor.}$$

Am leichtesten verständlich von diesen Gleichungen ist d_z). Nach der Beziehung $\frac{W_e}{c^2} =$ „Massendichte“ des elektromagnetischen Feldes bedeutet die linke Seite von d_z) die halbe Summe der Hauptträgheitsmomente der „elektromagnetischen Masse“ des Feldes in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt, so daß wir sagen können:

Die Summe der elektromagnetischen Hauptträgheitsmomente des Feldes in bezug auf einen beliebigen festen Punkt ist eine quadratische Funktion der Zeit, und der Koeffizient des Zeitquadrates ist die doppelte Gesamtenergie des Feldes.

Die Gleichungen (27 c) und d_r) scheinen mir dagegen kein unmittelbares Analogon in der Mechanik zu haben. So wird man wohl die links stehenden Integranden als neue Größen in die Physik einführen müssen. Die Dimension von $(\mathbf{r} g_e)$ ist die der Dichte einer Wirkungsgröße und die von $\{ \mathbf{r} (\mathbf{r} g_e) + [\mathbf{r}, [\mathbf{r}, g_e]] \}$ die des Momentes einer Wirkungsichte.

Ich möchte nicht schließen, ohne meine Dankbarkeit gegen Fräulein Emmy Noether und Herrn Prof. Paul Hertz für ihr wohlwollendes Interesse, mit dem sie mich bei der Durchführung unterstützten, zum Ausdruck zu bringen.