Über die Realität von Nullstellen ganzer transzendenter Funktionen.

Von

Nikolaj Tschebotareff in Odessa.

I.

Wie bekannt, besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Realität (bzw. Positivität) von Nullstellen eines reellen Polynoms $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ $(a_n \neq 0)$ darin, daß die quadratische Form

$$\sum_{i,j}^{0,\ldots,n-1} s_{m+i+j} x_i x_j$$

positiv definit sein muß, wobei $-s_k$ die Koeffizienten der Entwicklung der logarithmischen Ableitung von $f(z)$ sind:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -s_1 - s_2 z - \ldots,$$

während m eine beliebige gerade (bzw. ungerade) Zahl ist. (Man nimmt gewöhnlich $m = 0$ und als s_k die Koeffizienten der Entwicklung von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ nach *fallenden* Potenzen von z; doch liegt dies keineswegs in der Natur der Frage).

Herr Grommer hat in seiner grundlegenden Arbeit[1]) diese Bedingung auf Nullstellen von ganzen transzendenten Funktionen erweitert. Er hat nämlich folgendes gezeigt:

A. Für jede reelle ganze transzendente Funktion vom Typus

$$(1) \qquad f(z) = e^{g(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{A_\nu} e^{g_\nu(z)},$$

[1]) J. Grommer, Über ganze transzendente Funktionen usw., J. f. M. **144** (1914), S. 114.

wo $g(z) = \gamma_0 + \dots + \gamma_m z^m$ $(\gamma_m \geqq 0)$, $g_\nu(z) = \gamma_{0,\nu} + \dots + \gamma_{m-1,\nu} z^{m-1}$, α_ν reell (bzw. positiv), A_ν ganz positiv, m gerade (bzw. ungerade) ist, sind die quadratischen Formen

$$(2) \qquad \sum_{\mu,\nu}^{0,\dots,p-1} s_{m+\mu+\nu} x_\mu x_\nu \qquad (p = 1, 2, \dots, \text{ad inf.})$$

positiv-definit, wobei $-s_k$ die Koeffizienten der Entwicklung

$$(3) \qquad \varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = -s_1 - s_2 z - \dots$$

sind.

B. Sind umgekehrt alle Formen (2) positiv-definit, so kann man behaupten, daß die reelle ganze transzendente Funktion $f(z)$ den Typus (1) hat und dabei α_ν reell bei geradem m und reell positiv bei ungeradem m sind.

Herr Grommer löst in dieser Arbeit auch eine allgemeinere Aufgabe. Er betrachtet reelle meromorphe Funktionen $\varphi(z)$ mit der Bedingung, daß die entsprechenden quadratischen Formen (2) positiv-definit sind. Dann kommt er zum folgenden Ergebnis:

C. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Formen (2) positiv-definit sind, besteht darin, daß die entsprechende reelle meromorphe Funktion folgende Mittag-Lefflersche Entwicklung zuläßt:

$$(4) \qquad \varphi(z) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{A_\nu}{z - \alpha_\nu} + A_\nu \beta_\nu + A_\nu \beta_\nu^2 z + \dots + A_\nu \beta_\nu^{m-1} z^{m-2} \right) + a_1 + a_2 z + \dots + a_m z^{m-1},$$

wo α_ν reell, $\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$, $a_m \geqq 0$, sign $A_\nu =$ sign α_ν^m. Ist dabei von vornherein bekannt, daß A_ν positiv sind (wie dies z. B. bei B. der Fall ist), so kann man bei ungeradem m behaupten, daß die α_ν auch alle positiv sind.

Herr Grommer gelangt zu diesen Ergebnissen mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung der Funktion (3). Dabei benutzt er weitgehende mengentheoretische Hilfsmittel.

Herr Kritikos[2]) kommt zu den Ergebnissen A. und B. auf viel elementarerem Wege, indem er nur Kettenbrüche und den Hadamardschen Satz über ganze transzendente Funktionen anwendet.

Im ersten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung[2a]) zeige ich den Zusammenhang der *Signatur* der quadratischen Form (2) mit der Anzahl der

---

[2]) N. Kritikos, Über ganze transzendente Funktionen usw., Math. Annalen **81**, S. 97.

[2a]) Vgl. auch meine frühere Arbeit: Über die Realität von Wurzeln ganzer transzendenter Gleichungen (russisch), Journ. des Forsch.-Inst. Odessa **1**, Nr. 1 (1923).

komplexen (bzw. negativen) Nullstellen von $f(z)$, die unter den p absolut kleinsten Nullstellen vorkommen. Nimmt man dann für jeden gewählten Index p einen genügend großen Index m, so gibt der genannte Zusammenhang das Kriterium für die Realität (bzw. Positivität) von Nullstellen, welches für *alle* reellen ganzen transzendenten Funktionen (d. h. auch unendlicher Ordnung) gültig ist. An der Spitze dieser Untersuchung steht die asymptotische Formel

$$s_m = \frac{A_1}{\alpha_1^m} + \frac{A_2}{\alpha_2^m} + \dots + \frac{A_k}{\alpha_k^m} + \frac{\varepsilon_{m,k}}{\alpha_k^m}, \tag{5}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ Nullstellen von $f(z)$ derart sind, daß die Ungleichungen

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \dots \leqq |\alpha_k| < |\alpha_l| \qquad (l > k)$$

gelten und $\varepsilon_{m,k}$ für genügend großes m beliebig klein wird. Diese ganz elementare Methode schließt sich eng an die Bernoulli-Graeffesche Methode zur Berechnung der Wurzeln an, die von Herrn Pólya[3]) auf transzendente Funktionen erweitert wurde. Diese Methode erlaubt, die Hurwitzsche Aufgabe auch für den Fall ganzer transzendenter Funktionen zu lösen, wie ich dies mit einigen Beschränkungen durchführe (Herr Grommer hat dies für den Fall ganzer transzendenter Funktionen von der Höhe Null getan).

Im zweiten Abschnitt beweise ich den verallgemeinerten Satz C., indem ich statt meromorpher alle reellen eindeutigen analytischen Funktionen $\varphi(z)$ betrachte, die durch die Mittag-Lefflersche verallgemeinerte Partialbruchentwicklung darstellbar sind. Hier benutze ich ein neues Kriterium für die Realität von Nullstellen, welches auch an und für sich bemerkenswert ist:

Damit die Nullstellen von $f(z)$ alle reell seien, ist notwendig und hinreichend, daß der Ausdruck

$$J\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) : J(z),$$

wo das Symbol $J(\dots)$ den imaginären Teil bezeichnet, sein Vorzeichen auf der ganzen Ebene behält.

Dieses Kriterium gilt für reelle Polynome und ganze transzendente Funktionen von der Höhe Null und Eins. Es ist mit der Positivität von Formen (2) für $m = 2$ äquivalent. Um dies zu beweisen, bediene ich mich eines modifizierten Borel-Lindelöfschen Summationsverfahrens[4,5]).

---

[3]) G. Pólya, Über das Graeffesche Verfahren, Zeitschr. f. M. u. Ph. **63**, S. 275.

[4]) É. Borel, Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901, p. 164–168.

[5]) E. Lindelöf, Sur l'application de la théorie des résidus etc., J. d. M. (5) **9** (1903), p. 213.

Diese Zusammenstellung beider Kriterien ist mit dem Carathéodory-Toeplitzschen Ideenkreis [6]) verwandt.

Ich spreche meinen Dank den Herren Krein, Ostrowski, Krawtchouk und Grandjot aus, die mir auf verschiedene Weise behilflich waren.

§ 1.

Es sei $f(z)$ eine beliebige *reelle* ganze transzendente Funktion

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \qquad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

(d. h. mit reellen Koeffizienten ihrer Maclaurinschen Entwicklung). (Ist $f(z)$ nicht reell, so brauchen wir nur an Stelle von $f(z)$ die Funktion $f(z)\cdot\bar{f}(z)$ zu betrachten, wobei $\bar{f}(z)$ die mit $f(z)$ konjugiert imaginäre Funktion ist.) Bezeichnen wir mit $-s_k$ die Koeffizienten der Maclaurinschen Entwicklung ihrer logarithmischen Ableitung:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -s_1 - s_2 z - s_3 z^2 - \dots, \tag{2}$$

so kann man die s_k mit Hilfe der Newtonschen rekurrenten Formeln erhalten:

$$\begin{aligned} a_1 s_1 + a_1 \quad &= 0, \\ a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{3}$$

Es seien ferner $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ alle verschiedenen Nullstellen der Funktion $f(z)$ von der Multiplizität bzw. $A_1, A_2, \dots$ nach der Größe ihrer absoluten Beträge geordnet:

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \dots. \tag{4}$$

Ist k eine Nummer, für welche $|\alpha_k| < |\alpha_{k+1}|$ gilt (solche Nummern wollen wir *Hauptnummern* nennen), so gilt folgende asymptotische Formel:

$$s_m = \frac{A_1}{\alpha_1^m} + \frac{A_2}{\alpha_2^m} + \dots + \frac{A_k}{\alpha_k^m} + \frac{\varepsilon_{m,k}}{\alpha_k^m}, \tag{5}$$

wobei $\varepsilon_{m,k}$ für genügend große Werte von m beliebig klein wird. Denn $\frac{f'(z)}{f(z)}$ hat α_ν $(i = 1, 2, \dots)$ als einfache Pole mit Residuen bzw. A_ν $(i = 1, 2, \dots)$ und bleibt in anderen Stellen regulär. Daher ist der Konvergenzradius der Funktion

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{A_1}{z-\alpha_1} - \frac{A_2}{z-\alpha_2} - \dots - \frac{A_k}{z-\alpha_k}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(-s_m + \frac{A_1}{\alpha_1^m} + \frac{A_2}{\alpha_2^m} + \dots + \frac{A_k}{\alpha_k^m}\right) z^{m-1}$$

[6]) G. Herglotz, Über Potenzreihen mit positivem reellen Teil im Einheitskreis. Ber. Lpz. **63** (1911), S. 501. Dort ist auch die vollständige Literatur angeführt.

gleich $|\alpha_{k+1}|$, d. h. größer als $|\alpha_k|$. Bezeichnen wir ihren Entwickelungskoeffizienten bei z^{m-1} mit $\frac{\varepsilon_{m,k}}{\alpha_k^m}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{m,k}}{\alpha_k^m} \alpha_k^m$, woraus folgt $\lim_{m \to \infty} \varepsilon_{m,k} = 0$, w. z. b. w.

Wir setzen in der Formel (5) $\alpha_i = \frac{1}{\beta_i}$:

$$s_m = A_1 \beta_1^m + A_2 \beta_2^m + \ldots + A_k \beta_k^m + \beta_k^m \cdot \varepsilon_{m,k} \tag{5'}$$

und betrachten die quadratische Form

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) = \sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,p-1} s_{m+\mu+\nu} x_\mu x_\nu \tag{6}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} A_k \beta_k^m (x_0 + \beta_k x_1 + \ldots + \beta_k^{p-1} x_{p-1})^2 + \beta_p^m \sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,p-1} \varepsilon_{m+\mu+\nu,p} x_\mu x_\nu,$$

wo p eine Hauptnummer ist.

Kommen in der Reihe $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ Paare konjugiert imaginärer Größen vor, so verfahren wir folgendermaßen. Es sei $\beta = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\overline{\beta} = \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ ein solches Paar. Dann nimmt das entsprechende Paar Glieder in der ersten Summe von (6) folgende Gestalt an:

$$A\beta^m (x_0 + \beta x_1 + \ldots + \beta^{p-1} x_{p-1})^2 + A\overline{\beta}^m (x_0 + \overline{\beta} x_1 + \ldots + \overline{\beta}^{p-1} x_{p-1})^2$$
$$= A\varrho^m (\cos m\varphi + i\sin m\varphi)(u + iv)^2 + A\varrho^m (\cos m\varphi - i\sin m\varphi)(u - iv)^2$$
$$= 2A\varrho^m \cos m\varphi\,(u^2 - v^2) - 4A\varrho^m \sin m\varphi\, u v,$$

wobei die neuen Bezeichnungen folgende Bedeutung haben:

$$y = x_0 + \beta x_1 + \ldots + \beta^{p-1} x_{p-1}, \qquad \overline{y} = x_0 + \overline{\beta} x_1 + \ldots + \overline{\beta}^{p-1} x_{p-1},$$
$$u = \frac{y + \overline{y}}{2}, \qquad v = \frac{y - \overline{y}}{2i}.$$

Nun wollen wir zwei Fälle unterscheiden:

$$\text{I.} \quad |\cos m\varphi| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |\operatorname{tg} m\varphi| \leqq 1, \qquad |\sec m\varphi| \leqq \sqrt{2};$$

$$\text{II.} \quad |\sin m\varphi| > \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |\operatorname{cotg} m\varphi| < 1, \qquad |\operatorname{cosec} m\varphi| < \sqrt{2}.$$

Man sieht leicht, daß immer einer dieser Fälle eintreten muß.

Im ersten Falle führen wir folgende Transformation aus:

$$2A\varrho^m \cdot \cos m\varphi \cdot (u^2 - v^2) - 4A\varrho^m \cdot \sin m\varphi\, u v$$
$$= 2A\varrho^m \cdot \cos m\varphi \cdot (u - \operatorname{tg} m\varphi \cdot v)^2 - 2A\varrho^m \cdot \sec m\varphi \cdot v^2.$$

Im zweiten Falle setzen wir: $u = w + t$, $v = w - t$; $uv = w^2 - t^2$, $u^2 - v^2 = 4wt$:

$$\begin{aligned} &2A\varrho^m \cos m\varphi(u^2 - v^2) - 4A\varrho^m \sin m\varphi\cdot u\cdot v \\ = &-4A\varrho^m \sin m\varphi(w^2 - t^2) + 8A\varrho^m \cos m\varphi\cdot w\cdot t \\ = &-4A\varrho^m \sin m\varphi(w - \operatorname{cotg} m\varphi\cdot t)^2 + 4A\varrho^m \operatorname{cosec} m\varphi\cdot t^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten also in beiden Fällen zwei unabhängige Quadrate mit entgegengesetzten Vorzeichen. Division ihrer Koeffizienten durch ϱ^m ergibt Größen, deren absoluter Betrag zwischen zwei von Null verschiedenen und von m unabhängigen Grenzen liegt.

Nun führen wir in der Formel (6) die Substitution

$$y_k = x_0 + \beta_k x_1 + \dots + \beta_k^{p-1} x_{p-1} \qquad (k = 1, 2, \dots, p)$$

aus, deren Koeffizienten von m unabhängig sind und deren Determinante von Null verschieden ist. Ferner gehen wir im Falle imaginärer Größen β entweder zu u, v oder zu w, t über. Die Koeffizienten dieser Substitution sind beschränkt und haben von m unabhängige Determinante. Dann nimmt die Form folgende Gestalt an:

$$(7) \qquad \begin{aligned} F = M_1 |\beta_1|^m\cdot z_1^2 \pm M_2 |\beta_2|^m z_2^m \pm \dots \\ \pm M_p |\beta_p|^m z_p^2 + |\beta_p|^m \sum_{\mu,\nu}^{0,\dots,p-1} \eta_{\mu+\nu}^{(m)}\cdot z_\mu z_\nu. \end{aligned}$$

Hier liegen M_k $(k = 1, 2, \dots, p)$ zwischen zwei positiven von m unabhängigen Grenzen; $\eta_{\mu+\nu}^{(m)}$ werden für genügend großes m beliebig klein. Wenn wir daher auf die Form die Gaußsche Methode der Zerlegung in Quadrate anwenden, so müssen die sich dadurch ergebenden Koeffizienten bei Quadraten keine Vorzeichenänderung erleiden, wenn nur m genügend groß gewählt ist. Die Anzahl negativer Vorzeichen in der ersten Summe von (7) ist aber gleich d bei geradem m und gleich $d + d'$ bei ungeradem m, wo d die Anzahl Paare konjugiert imaginärer und $d + d'$ die Anzahl negativer Größen in der Reihe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ bedeuten. Demnach hat die ganze Form (7) dieselbe Zahl negativer Glieder.

Führen wir die Bezeichnung

$$(8) \qquad D_m^p = \begin{vmatrix} s_m, & \dots, & s_{m+p-1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ s_{m+p-1}, & \dots, & s_{m+2p-2} \end{vmatrix}$$

ein, so wird die Kette von Hauptdiagonalminoren der Form (6) folgendermaßen dargestellt:

$$1, D_m^1, D_m^2, \dots, D_m^p.$$

Die Zusammenstellung mit dem bekannten Satz der Formentheorie ergibt den

Satz. *Sind unter den ersten p Nullstellen einer reellen ganzen transzendenten Funktion $f(z)$ d Paare konjugiert imaginär und d' negativ, und ist dabei $|\alpha_p| < |\alpha_{p+1}|$, so bildet die Kette*

$$1, D_m^1, D_m^2, \ldots, D_m^p \tag{9}$$

bei genügend großem m d Vorzeichenwechsel, wenn m gerade ist, und $d+d'$, wenn m ungerade ist[7]).

§ 2.

Bisher setzten wir voraus, daß m „genügend groß" ist. Ist aber die *Höhe* der ganzen transzendenten Funktion $f(z)$ endlich, so kann man beweisen, daß die Positivität (bzw. Realität) von allen Nullstellen der Funktion $f(z)$ die Positivität von allen Varianten D_m^p für jeden festgewählten (bzw. festgewählten geraden) Wert von m nach sich zieht, der nicht kleiner als die Höhe von $f(z)$ ist. Dies folgt aus der Tatsache, daß in diesem Falle die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \beta_k^m$ konvergieren und ihre Summen genau gleich s_m sind:

$$s_m = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \beta_k^m \quad \text{für} \quad m \geqq m_0. \tag{10}$$

Wenn wir demnach den Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ ganz beliebige Zahlenwerte zuschreiben, so kann die Form (6) in folgender Gestalt dargestellt werden:

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \beta_k^m (x_0 + \beta_k x_1 + \ldots + \beta_k^{p-1} x_{p-1})^2 \quad \text{für} \quad m \geqq m_0.$$

Diese Reihe muß entweder bei lauter positiven β_k oder bei lauter reellen β_k und geradem m konvergieren und hat dann immer einen positiven Wert. Also ist die Form (6) positiv-definit, w. z. b. w.

Man kann umgekehrt beweisen, daß die Positivität aller Varianten D_m^p bei einem festgewählten (bzw. festgewählten geraden) Wert von m_0 die Positivität (bzw. Realität) aller Nullstellen von $f(z)$ nach sich zieht. Um dies zu beweisen, nehmen wir das Gegenteil an, d. h. daß bei dieser Voraussetzung nicht alle Nullstellen positiv (bzw. reell) sind. Dann gibt es solche Werte m_1 und p, für welche alle (bzw. alle geraden) Werte $m \geqq m_1$ die Ungleichung $D_{m_1}^p < 0$ ergeben. (Wären etwa $D_{m_1}^p = D_{m_1}^{p+1} = \ldots = 0$, so mußte das erste nicht verschwindende Glied dieser Kette negativ sein;

[7]) Herr Krawtchouk hat mich aufmerksam gemacht, daß in manchen Fällen in der Kette (9) einige Vorzeichenwechsel verborgen sein können. Dies tritt nämlich ein, wenn im Innern dieser Kette mehrere Glieder verschwinden. Dann kann man in der Matrix $\|s_{\mu+\nu}\|$ ein anderes System von Hauptdiagonalminoren hervorheben, was stets zu dem gewünschten Resultat führt (siehe Frobenius, J. f. M. 114).

wären dagegen diese Varianten sämtlich gleich Null, so wäre $f(z)$ Polynom mit lauter reellen Nullstellen.) Wir können dabei stets einen solchen Wert von m wählen, daß die Differenz $m - m_0$ gerade wird: $m - m_0 = 2k$. Nun betrachten wir die Matrix

$$(11)\qquad \begin{matrix} s_{m_0}, & s_{m_0+1}, & \ldots, & s_{m_0+k+p-1} \\ s_{m_0+1}, & s_{m_0+2}, & \ldots, & s_{m_0+k+p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m_0+k+p-1}, & s_{m_0+k+p}, & \ldots, & s_{m+2p-2} \end{matrix} \qquad (m_0+2k+2p-2 = m+2p-2)$$

und die ihr entsprechende quadratische Form

$$(12)\qquad \sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,p-1} s_{m_0+\mu+\nu}\, x_\mu\, x_\nu .$$

Diese letztere kann nicht positiv-definit sein, da die Kette ihrer Hauptdiagonalminoren (von rechts unten nach links oben):

$$(13)\qquad 1,\ D^1_{m+2p-2},\ D^2_{m+2p-4},\ \ldots,\ D^p_m,\ \ldots,\ D^{p+k}_{m_0}$$

wenigstens einen Vorzeichenwechsel hat. Daraus folgt, daß auch die Kette von Hauptdiagonalminoren (von links oben nach rechts unten):

$$(14)\qquad 1,\ D^1_{m_0},\ D^2_{m_0},\ \ldots,\ D^{p+k}_{m_0}$$

Vorzeichenwechsel haben muß, d. h. wenigstens eine der Varianten (14) negativ sein muß. Dies widerspricht aber unserer Voraussetzung, w. z. b. w.

§ 3.

Die dargelegte Methode erlaubt uns, die Hurwitzsche Aufgabe für den Fall einer reellen ganzen transzendenten Funktion zu lösen, d. h. die Bedingungen aufzustellen dafür, daß ihre Nullstellen positive (oder negative) Realteile haben.

Wir betrachten hier nur den Fall, wenn verschiedene und nicht konjugiert imaginäre Nullstellen von $f(z)$ auch verschiedene absolute Beträge haben. Außerdem soll $f(z)$ keine rein imaginären Nullstellen haben.

Wir ziehen folgende Varianten in Betracht:

$$(15)\qquad \Delta^p_m = \begin{vmatrix} s_m, & s_{m+1}, & \ldots, & s_{m+p-1} \\ s_{m+2}, & s_{m+3}, & \ldots, & s_{m+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m+2p-2}, & s_{m+2p-1}, & \ldots, & s_{m+3p-3} \end{vmatrix}.$$

Wenn wir hier für $s_{m+\mu+\nu}$ ihre asymptotischen Ausdrücke (5′) einsetzen, sehen wir leicht, daß die Varianten $\Delta^p_m : D^p_m$ im Falle einer Hauptnummer p folgende Gestalt annehmen:

$$\frac{\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{p} A_k\beta_k^{m} + \beta_p^{m}\cdot\varepsilon_{m,p}, & \ldots, & \sum_{k=1}^{p} A_k\beta_k^{m+p-1} + \beta_p^{m+p-1}\cdot\varepsilon_{m+p-1,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{p} A_k\beta_k^{m+2p-2} + \beta_p^{m+2p-2}\cdot\varepsilon_{m+2p-2,p}, & \ldots, & \sum_{k=1}^{p} A_k\beta_k^{m+3p-3} + \beta_p^{m+3p-3}\cdot\varepsilon_{m+3p-3,p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{p} A_k\beta_k^{m} + \beta_p^{m}\cdot\varepsilon_{m,p}, & \ldots, & \sum_{k=1}^{p} A_k\beta_k^{m+p-1} + \beta_p^{m+p-1}\cdot\varepsilon_{m+p-1,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{p} A_k\beta_k^{m+p-1} + \beta_p^{m+p-1}\cdot\varepsilon_{m+p-1,p}, & \ldots, & \sum_{k=1}^{p} A_k\beta_k^{m+2p-2} + \beta_p^{m+2p-2}\cdot\varepsilon_{m+2p-2,p} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_p\cdot\beta_1^m\cdot\beta_2^m\cdot\ldots\cdot\beta_p^m \begin{vmatrix} 1, \beta_1^2, \ldots, \beta_1^{2p-2} \\ \cdots \\ 1, \beta_p^2, \ldots, \beta_p^{2p-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, \beta_1, \ldots, \beta_1^{p-1} \\ \cdots \\ 1, \beta_p, \ldots, \beta_p^{p-1} \end{vmatrix}}{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_p\cdot\beta_1^m\cdot\beta_2^m\cdot\ldots\cdot\beta_p^m \begin{vmatrix} 1, \beta_1, \ldots, \beta_1^{p-1} \\ \cdots \\ 1, \beta_p, \ldots, \beta_p^{p-1} \end{vmatrix}^2} + \eta_{m,p}$$

$$= \frac{\prod_{\lambda<\mu\leqq p} (\beta_\lambda^2 - \beta_\mu^2)}{\prod_{\lambda<\mu\leqq p} (\beta_\lambda - \beta_\mu)} + \eta_{m,p} = \prod_{\lambda<\mu\leqq p} (\beta_\lambda + \beta_\mu) + \eta_{m,p},$$

wobei $\eta_{m,p}$ mit wachsendem m beliebig klein wird.

Wir beachten, daß das Vorzeichen des Realteiles von β_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ mit dem Vorzeichen des Realteiles von $\alpha_\lambda = \frac{1}{\beta_\lambda}$ zusammenfällt. Das Vorzeichen aber von $\beta_\lambda + \bar{\beta}_\lambda$, wo $\bar{\beta}_\lambda$ mit β_λ konjugiert imaginär ist, stimmt mit dem Vorzeichen des Realteiles von β_λ überein.

Nun seien β_p und $\beta_{p-1} = \bar{\beta}_p$ konjugiert imaginäre Größen der Reihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$. Dann ist das Hauptglied der Variante $\frac{\Delta_m^p}{D_m^p} : \frac{\Delta_m^{p-2}}{D_m^{p-2}}$ gleich

$$\frac{\prod_{\lambda<\mu\leqq p} (\beta_\lambda + \beta_\mu)}{\prod_{\lambda<\mu\leqq p-2} (\beta_\lambda + \beta_\mu)} = (\beta_p + \beta_{p-1}) \cdot \prod_{\lambda\leqq p-2} (\beta_\lambda + \beta_p) \cdot \prod_{\lambda\leqq p-2} (\beta_\lambda + \beta_{p-1}).$$

Der Faktor $\prod_{\lambda\leqq p-2} (\beta_\lambda + \beta_p) \cdot \prod_{\lambda\leqq p-2} (\beta_\lambda + \beta_{p-1})$ ist, als Produkt konjugiert imaginärer Größen, positiv, woraus folgt

$$\text{(16)} \qquad \operatorname{sign} \frac{\Delta_m^p}{D_m^p} = \operatorname{sign} \mathfrak{R}(\beta_p) \cdot \operatorname{sign} \frac{\Delta_m^{p-2}}{D_m^{p-2}} \text{ bei genügend großem } m,$$

wo das Symbol $\mathfrak{R}(\ldots)$ den Realteil der eingeklammerten Größe bedeutet. Dieses Ergebnis kann auch so aufgefaßt werden:

Satz. *Kommen in der Reihe $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ unter den oben gemachten Voraussetzungen d Paare mit negativen Realteilen vor, so erleidet die Kette der den Hauptnummern aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ entsprechenden Varianten*

$$1, \frac{\Delta_m^1}{D_m^1}, \frac{\Delta_m^2}{D_m^2}, \ldots, \frac{\Delta_m^p}{D_m^p}$$

bei genügend großem m d Vorzeichenwechsel.

Ganz ebenso kann man beweisen, daß der Hauptteil der Varianten $\frac{\overset{(k)}{\Delta}{}_m^p}{D_m^p} : \frac{\overset{(k)}{\Delta}{}_m^{p-2}}{D_m^{p-2}}$ dasselbe Vorzeichen hat wie der Ausdruck

$$\frac{\beta_p^k - \bar{\beta}_p^k}{\beta_p - \bar{\beta}_p},$$

wo wir die Bezeichnung

$$(17) \qquad \overset{(k)}{\Delta}{}_m^p = \begin{vmatrix} s_m, & s_{m+1}, & \ldots, & s_{m+p-1} \\ s_{m+k}, & s_{m+k+1}, & \ldots, & s_{m+p+k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m+k(p-1)}, & s_{m+k(p-1)+1}, & \ldots, & s_{m+k(p-1)+p-1} \end{vmatrix}$$

eingeführt haben.

Führen wir noch die Bezeichnung $\beta_p = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ein, so nimmt dieser Ausdruck folgende Gestalt an:

$$\varrho^{k-1}\sin k\varphi : \sin\varphi.$$

Ist diese Größe positiv, so folgt der Winkel φ in einem der folgenden Intervalle: $\pm\left(\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}\right)$, $\pm\left(\frac{3\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}\right)$, $\pm\left(\frac{5\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}\right)$, $\ldots$.

II.

In dem folgenden Abschnitt beschäftige ich mich mit folgendem Problem:

Welche Typen umfassen reelle analytische Funktionen

$$(1) \qquad \varphi(z) = s_1 + s_2 z + s_3 z^2 + \ldots,$$

welche die Eigenschaft besitzen, daß alle quadratischen Formen

$$(2) \qquad F(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) = \sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,p-1} s_{m+\mu+\nu} x_\mu x_\nu$$

für einen festgewählten Wert von m und jeden Wert von p positiv-definit sind?

Dieses Problem hat Herr Grommer[8]) allgemein gelöst. Insbesondere

[8]) J. Grommer, loc. cit.

hat er gezeigt, daß, wenn $\varphi(z)$ eindeutig und meromorph ist, sie nur einfache reelle Pole α_ν besitzt, deren Vorzeichen mit den Vorzeichen der entsprechenden Residuen $(-A_\nu)$ durch die Relation

$$\operatorname{sign} \alpha_\nu^m = \operatorname{sign} A_\nu$$

verbunden sind; außerdem muß $\varphi(z)$ folgende Mittag-Lefflersche Darstellung zulassen:

$$(3) \qquad \varphi(z) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{A_\nu}{z-\alpha_\nu} + A_\nu \beta_\nu + A_\nu \beta_\nu^2 z + \ldots + A_\nu \beta_\nu^{m-1} z^{m-2}\right) + a_1 + a_2 z + \ldots + a_m z^{m-1},$$

wobei $a_m \geqq 0$ ist.

Hier erweitere ich dieses Resultat dadurch, daß ich alle eindeutigen und die Mittag-Lefflersche Darstellung zulassenden analytischen Funktionen betrachte. Es ergibt sich, daß man auf diese Weise keine weiteren Funktionen mit lauter positiv-definiten Formen (2) erhält.

Betrachtet man aber alle im Mittag-Lefflerschen Sterne definierten Funktionen, so kommt man zu neuen Funktionen vom erwähnten Typus. Herr Grommer (loc. cit.) hat gezeigt, daß die allgemeinste Funktion von diesem Typus durch das Integral

$$A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,\Phi(u)}{\frac{1}{z} - u} \qquad (A > 0)$$

darstellbar ist, wo u reell, $\Phi(u)$ eine reelle monoton wachsende Funktion $\leqq 1$ und das Integral im Stieltjesschen Sinne zu verstehen ist. Hier ist $m = 2$ genommen. Daß in dieser Klasse nicht nur eindeutige Funktionen vorkommen, zeigt das einfache Beispiel

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\frac{1}{z} - x} = \lg \frac{1+z}{1-z}.$$

Um zu meinem Ergebnis zu kommen, verfahre ich folgendermaßen. Ich betrachte alle möglichen Typen von reellen eindeutigen Funktionen, die nicht vom Typus (3) sind, und wähle jedesmal solche Werte von p und x_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, p-1)$, daß die entsprechende Form (2) einen negativen Wert annimmt.

Dabei benutze ich in den meisten Fällen ein Hilfskriterium, das in folgendem besteht.

Sind alle Formen (2) positiv-definit, so nimmt der Ausdruck

$$(4) \qquad \frac{J(F_m(z))}{J(z)}$$

im ganzen Stern, in welchem die Funktion $F_m(z) = s_{m-1} + s_m z + \dots$ definiert ist, nur nicht-negative Werte an. Hier bedeutet das Symbol $J(\dots)$ den komplexen Teil der eingeklammerten Funktion.

Dieser Satz ist auch umkehrbar, wenn wir nur diejenigen Funktionen $F_m(z)$ betrachten, deren imaginärer Teil, falls er positiv wird, größer als $\frac{y}{x^2+y^2}$ auf der oberen Halbebene werden kann.

Dieser Satz ist dem Carathéodory-Toeplitzschen[9]) Satz analog, der das Positivsein des Realteiles einer analytischen Funktion im Einheitskreise mit dem Positivsein einer gewissen Hermiteschen Form in Zusammenhang bringt. Ein wesentlicher Unterschied liegt darin, daß dort nur von den Werten im Innern des Konvergenzkreises die Rede ist.

§ 1.

Wir beweisen den schon in der Einleitung besprochenen

Satz 1. *Es sei eine unendliche Folge reeller Zahlen*

$$s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \dots \qquad \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|s_n|} \text{ nicht } = \infty\right)$$

gegeben. Sind alle quadratischen Formen

$$F(x_0, x_1, \dots, x_{\mu-1}) = \sum_{\mu,\nu}^{0,\dots,p-1} s_{m+\mu+\nu} x_\mu x_\nu \tag{5}$$

positiv-definit, so nimmt der Ausdruck

$$\frac{J(\varphi_m(z))}{J(z)}, \tag{6}$$

wo $\varphi_m(z)$ die im Mittag-Lefflerschen Stern durch das Element

$$\varphi_m(z) = s_m z + s_{m+1} z^2 + \dots \tag{7}$$

bestimmte analytische Funktion ist, nur nicht negative Werte an.

Beweis. Wir nehmen einen beliebigen Punkt $z = \varrho e^{i\varphi}$ im Innern des Sternes und bilden den Bereich A, welcher folgende Eigenschaften besitzt:

1. A liegt ganz innerhalb des Sternes;

2. A umfaßt den Nullpunkt und den Punkt z;

3. A ist von einer geschlossenen Jordanschen Kurve K begrenzt;

4. jeder aus dem Nullpunkt hervorgehende Strahl schneidet K nur einmal;

5. A ist symmetrisch in bezug auf die reelle Achse.

---

[9]) G. Herglotz, loc. cit.

Wir nehmen für x_μ folgende zwei Wertsysteme:

(8) $$\text{I)}\quad x_\mu = \frac{\varrho^\mu \cos\mu\varphi}{\mu^{\mu\sigma}} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

(9) $$\text{II)}\quad x_\mu = \frac{\varrho^\mu \sin\mu\varphi}{\mu^{\mu\sigma}} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo σ eine beliebige reelle positive Größe ist, und stellen die Koeffizienten s_{m+n} in folgender Form dar:

(10) $$s_{m+n} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\varphi_m(x)}{x^{2+n}}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei das Integral längs K genommen ist. Sind alle Formen (5) positiv-definit, so gilt insbesondere:

(11) $$F\left(1, \frac{\varrho\cos\varphi}{1^\sigma}, \frac{\varrho^2\cos 2\varphi}{2^{2\sigma}}, \ldots, \frac{\varrho^{p-1}\cos(p-1)\varphi}{(p-1)^{(p-1)\sigma}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\varphi_m(x)}{x^2}\sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,p-1} \frac{\varrho^\mu\cos\mu\varphi}{x^\mu\mu^{\mu\sigma}}\cdot\frac{\varrho^\nu\cos\nu\varphi}{x^\nu\nu^{\nu\sigma}}\cdot dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\varphi_m(x)}{x^2}\left(\sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{\varrho^\mu\cos\mu\varphi}{x^\mu\mu^{\mu\sigma}}\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\varphi_m(x)}{x^2}\cdot X^2\cdot dx \geqq 0;$$

(12) $$F\left(0, \frac{\varrho\sin\varphi}{1^\sigma}, \frac{\varrho^2\sin 2\varphi}{2^{2\sigma}}, \ldots, \frac{\varrho^{p-1}\sin(p-1)\varphi}{(p-1)^{(p-1)\sigma}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\varphi_m(x)}{x^2}\left(\sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{\varrho^\mu\sin\mu\varphi}{x^\mu\mu^{\mu\sigma}}\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\varphi_m(x)}{x^2}\cdot Y^2\cdot dx \geqq 0;$$

hier führen wir folgende Bezeichnungen ein:

(13) $$X = \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{\varrho^\mu\cos\mu\varphi}{x^\mu\mu^{\mu\sigma}}, \qquad Y = \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{\varrho^\mu\sin\mu\varphi}{x^\mu\mu^{\mu\sigma}}.$$

Mit den Bezeichnungen $z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\bar{z} = \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ folgt aus (13):

(14) $$Z = X + iY = \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{z^\mu}{x^\mu\mu^{\mu\sigma}}, \qquad \bar{Z} = X - iY = \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{\bar{z}^\mu}{x^\mu\mu^{\mu\sigma}}.$$

Wir wissen aber[10]), daß man entweder im Falle $|z| < |x|$ oder im Falle $\arg z \not\equiv \arg x \pmod{2\pi}$ solche Werte von p und σ finden kann, daß die Werte Z und $\bar{Z}$ sich beliebig wenig von den Größen

[10]) Lindelöf, Calcul des résidus, p. 122. Paris 1905.

$$\frac{1}{1-\frac{z}{x}} = \frac{x}{x-z} \quad \text{und bzw.} \quad \frac{1}{1-\frac{\bar z}{x}} = \frac{x}{x-\bar z}$$

unterscheiden, und daß die Wahl von p und σ für alle Punkte x des Randes K gültig ist, sobald der kleinste Abstand von z (und $\bar z$) bis K nicht kleiner als eine festgewählte Größe ε ist. Da aber

$$X = \frac{z+\bar z}{2}, \qquad Y = \frac{z-\bar z}{2i},$$

so schließen wir durch Grenzübergang, daß

$$(15) \qquad \frac{1}{8\pi i} \cdot \oint \frac{\varphi_m(x)}{x^2} \left(\frac{x}{x-z} + \frac{x}{x-\bar z}\right)^2 dx \geqq 0,$$

$$(16) \qquad -\frac{1}{8\pi i} \cdot \oint \frac{\varphi_m(x)}{x^2} \left(\frac{x}{x-z} - \frac{x}{x-\bar z}\right)^2 dx \geqq 0.$$

Die Addition dieser Formeln gibt uns:

$$(17) \quad \frac{1}{8\pi i} \oint \frac{\varphi_m(x)}{x^2} \cdot \frac{4x^2 \cdot dx}{(x-z)(x-\bar z)} = \frac{1}{2\pi i (z-\bar z)} \oint \varphi_m(x) \left(\frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-\bar z}\right) dx$$
$$= \frac{\varphi_m(z) - \varphi_m(\bar z)}{z-\bar z} = \frac{J(\varphi_m(z))}{J(z)} \geqq 0,$$

w. z. b. w.

Bemerkung 1. Ist die Funktion $\varphi_m(z)$ mehrdeutig, so kann man die Ungleichung (17) für größere Bereiche nachweisen. Wir müssen dann, als „Summationsfaktor" die Funktion $\frac{1}{n^{n\sigma}}$ mit komplexem σ nehmen $\left(x_\mu = R\left(\frac{\varrho^\mu e^{i\mu\varphi}}{\mu^{\mu\sigma}}\right) \text{ und } x_\mu = J\left(\frac{\varrho^\mu e^{i\mu\varphi}}{\mu^{\mu\sigma}}\right)\right)$. So wird der Zweig der Funktion $\varphi_m(z)$ in einem krummlinigen Stern definiert, der mit Hilfe von gewissen logarithmischen Spiralen gebildet ist (Lindelöf, J. de Math., (4) **9** (1903), S. 220). Überhaupt können wir die Gültigkeit der Ungleichung (17) für den ganzen Bereich nachweisen, für den die Darstellung

$$\varphi_m(z) = \lim_{\sigma \to 0} \sum_\mu s_{m+\mu}\, \varphi(z, \mu, \sigma)$$

möglich ist.

Bemerkung 2. Ist $f(z)$ ein reelles Polynom, so ist die Ungleichung

$$J\left(-\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq 0$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Wurzeln von $f(z)$ alle reell sind. Dies folgt aus folgender Formel:

$$(18) \qquad \frac{J\left(-\frac{f'(z)}{f(z)}\right)}{J(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(1-\frac{\gamma_i}{y}\right)}{(x-\beta_i)^2 + (y-\gamma_i)^2},$$

wo $\alpha_i = \beta_i + i\gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Wurzeln von $f(z)$ sind. Sind $\gamma_i = 0$, so ist der Ausdruck (18) positiv. Ist dagegen etwa $\gamma_1 \neq 0$, so setzen wir $x = \beta_1$, $y = \gamma_1 + \varepsilon$. Dann wird das erste Glied der Summe (18) gleich

$$\frac{1}{\varepsilon(\gamma_1 + \varepsilon)}.$$

Nehmen wir $|\varepsilon|$ hinreichend klein und $\operatorname{sign}\varepsilon = -\operatorname{sign}\gamma_1$, so wird dieses Glied negativ und absolut beliebig groß, während die Werte von anderen Gliedern der Summe (18) unter einer Grenze bleiben. Dieses Kriterium gilt auch für mehrfache Wurzeln und für transzendente Funktionen endlicher Höhe. Man kann aus ihm durch Transformation Kriterien dafür herleiten, daß sich alle Wurzeln auf irgendeiner Kurve befinden. (Dies gilt nicht allgemein.)

Dieses Kriterium kann man auch so darstellen:

$$\frac{\partial}{\partial y}(|f(z)|^2) : y \geqq 0,$$

was besagt, daß $|f(z)|$ *als Funktion von* y *nur ein* Extremum, nämlich das Minimum auf der reellen Achse besitzen muß.

Um den Satz 1 umzukehren, wollen wir über $\varphi_m(z)$ eine beschränkende Voraussetzung machen.

Voraussetzung. Wir betrachten den *Körper* $\mathfrak{K}(\varphi_m(z))$, d. h. die Gesamtheit aller Funktionen, die aus $\varphi_m(z)$ und allen reellen Polynomen mittels der vier elementaren Operationen gebildet sind. Wir nehmen an, daß es in $\mathfrak{K}(\varphi_m(z))$ keine in $z = 0$ reguläre Funktion $\psi(z)$ gibt, deren imaginärer Teil negative Werte annimmt, die aber in ihrem ganzen Definitionsbereich die Ungleichung

$$J(\psi(z)) \geqq -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

befriedigt.

Die Voraussetzung ist für den Körper aller reellen Funktionen erfüllt, die die Mittag-Lefflersche Darstellung zulassen, wie ich dies später zeigen will. Ich glaube sogar nicht, daß überhaupt Funktionen vom Typus $\psi(z)$ existieren.

Satz 2. *Gilt für eine reelle Funktion* $\varphi_m(z)$ *die Ungleichung*

$$J(\varphi_m(z)) : J(z) \geqq 0$$

im ganzen Definitionsbereich von $\varphi_m(z)$ *und ist* $\varphi_m(z)$ *in* $z = 0$ *regulär, so sind alle Formen*

$$\sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,p-1} s_{m+\mu+\nu}\, x_\mu x_\nu$$

positiv-definit.

Beweis. Wir betrachten folgende Darstellung von $\varphi_m(z)$:

$$\varphi_m(z) = s_{m-1} + s_m z + s_{m+1} z^2 + \ldots = s_{m-1} + \frac{s_m}{\frac{1}{z} + a_1 - \psi_1(z)}.$$

Es ist $s_m > 0$. Denn $J(\varphi_m(z)) : J(z) = s_m + \chi(x, y)$, wobei $\chi(x, y)$ bei genügend kleinen x, y beliebig klein wird. Wäre $s_m = 0$, so würde

$$J(\varphi_m(z)) : J(z) = s_{m+k-1}\, \varrho^{k-1} \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi} + \chi_1(x, y) \quad (k > 1)$$

bei $\operatorname{sign} \sin k\varphi = -\operatorname{sign} s_{m+k-1}$, $\sin\varphi > 0$ und genügend kleinem ϱ negativ sein. Also ist für $y > 0$:

$$J\left(-\frac{s_m}{\varphi_m(z) - s_{m-1}}\right) = J\left(-\frac{1}{z} - a_1 + \psi_1(z)\right) = J(\psi_1(z)) + \frac{y}{x^2 + y^2} \geqq 0.$$

Unsere Voraussetzung erlaubt uns, zu behaupten, daß:

$$J(\psi_1(z)) \geqq 0 \quad \text{für} \quad y \geqq 0.$$

Führen wir diesen Prozeß für $\psi_1(z)$ aus und fahren wir so fort, so kommen wir schließlich zu folgender (wenn auch formeller) Kettenbruchdarstellung von $\varphi_m(z)$:

$$\varphi_m(z) = \cfrac{s_m}{\cfrac{1}{z} + a_1 - \cfrac{k_1}{\cfrac{1}{z} + a_2 - \cfrac{k_2}{\cfrac{1}{z} + a_3 - \ldots,}}}$$

wobei alle k_p $(p = 1, 2, \ldots)$ positiv sind. Es ist aber bekannt (vgl. Grommer, loc. cit., S. 123), daß man k_p so ausdrücken kann:

$$k_p = \frac{D_m^{p+1} \cdot D_m^{p-1}}{(D_m^p)^2} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo wir die Bezeichnungen

$$D_m^p = \begin{vmatrix} s_m, & s_{m+1}, & \ldots, & s_{m+p-1} \\ s_{m+1}, & s_{m+2}, & \ldots, & s_{m+p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m+p-1}, & s_{m+p}, & \ldots, & s_{m+2p-2} \end{vmatrix}, \qquad D_m = 1 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

einführen. Daraus folgt, daß alle D_m^p positiv sein müssen, d. h. daß alle Formen (2) positiv-definit sind, w. z. b. w.

§ 2.

Ich will nun zwei Hilfssätze beweisen.

Hilfssatz 1. Für jede reelle ganze transzendente Funktion $f(z)$, die nicht eine lineare Funktion ist, nimmt der Ausdruck $J(f(z)) : J(z)$ beliebig große Werte beider Vorzeichen an.

Beweis. Wir nehmen an, daß etwa:

$$J(f(z)):J(z) \leqq A.$$

Für $J(z) = y \geqq 0$ haben wir also:

$$J(f(z)) \leqq A y \qquad (y \geqq 0).$$

Dann wird die reelle ganze transzendente Funktion $g(z) = f(z) - Az$ folgender Ungleichung unterworfen:

$$J(g(z)) \leqq 0 \quad \text{für} \quad y \geqq 0.$$

$g(z)$ kann nirgends außerhalb der reellen Achse verschwinden, da aus $J(g(\alpha + \beta i)) = 0$ $(\beta > 0)$ folgen würde: $J(g(\alpha + \beta i + \varepsilon)) > 0$. Auf der reellen Achse kann $g(z)$ nicht mehr als einmal verschwinden, da sonst auch die Ableitung $g'(z)$ auf der reellen Achse verschwände: $g'(\gamma) = 0$, woraus folgen würde:

$$g(z) = g(\gamma) + (z-\gamma)^k \frac{g^{(k)}(\gamma)}{k!} + \dots \qquad (g^{(k)}(\gamma) \neq 0,\ k > 1).$$

Nehmen wir $z - \gamma\varrho e^{i\varphi}$, $\operatorname{sign}(\sin k\varphi) = \operatorname{sign}(g^{(k)}(\gamma))$, $\sin\varphi > 0$, ϱ genügend klein, so wird:

$$J(g(z)) = \varrho^k \sin k\varphi \frac{g^{(k)}(\gamma)}{k!} + (\varrho^{k+1}) > 0 \quad \text{für} \quad y > 0.$$

Somit läßt $g(z)$ eine der folgenden Darstellungen zu:

$$g(z) = (z-\alpha)\, e^{h(z)} \quad \text{oder} \quad g(z) = e^{h(z)}$$
$$(\alpha \text{ reell},\ h(z) = u + iv - \text{ganze Funktion},\ v(0,0) = 0).$$

Nehmen wir $z - \alpha = \varrho e^{i\varphi}$, so folgt:

$$J(g(z)) = \varrho e^u \sin(\varphi + v) \quad \text{bzw.} \quad J(g(z)) = e^u \sin v.$$

Unsere Forderung lautet

$$\frac{\sin(\varphi+v)}{\sin\varphi} \leqq 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sin v}{\sin\varphi} \leqq 0.$$

Da aber $\varphi + v$ (bzw. v) eine stetige Funktion von ϱ ist, so muß sie auf jedem Strahle ($\varphi =$ konst.) nicht die Grenzen $-\pi$ und 0 (für $0 < \varphi < \pi$) oder 0 und $+\pi$ (für $-\pi < \varphi < 0$) überschreiten. Somit gilt auf der ganzen Ebene:

$$-2\pi < v + 2\pi,$$

d. h. $v = 0$, $u =$ konst., $g(z) = (z-\alpha)\, e^{u_0}$ oder bzw. $g(z) = e^{u_0}$, w. z. b. w.

Diesen Satz hat zum erstenmal Herr Krein bewiesen; Herr Grandjot hat einen anderen Beweis gegeben. Der vorliegende Beweis ist elementarer als die beiden vorigen Beweise.

Hilfssatz 2. Für jede reelle ganze transzendente Funktion $f(z)$, die nicht eine lineare Funktion ist, nimmt der Ausdruck $J(f(z))$ auf der oberen Halbebene beliebig große Werte beider Vorzeichen an.

Beweis. Der Hilfssatz 1. besagt, daß $J(f(z))$ auf der oberen Halbebene irgendwelche positive (und auch negative) Werte annimmt. Wir bezeichnen $J(f(z)$ mit $H(\varrho,\varphi)$, wobei $z=\varrho e^{i\varphi}$ ist, $H(\varrho,\varphi)$ ist eine harmonische Funktion, die auf der reellen Achse verschwindet. Es sei C der Halbkreis vom Radius r, auf dessen Rande $H(\varrho,\varphi)$ den Wert $m>0$ annehme. Wir nehmen einen mit C konzentrischen Halbkreis K vom Radius $R>r$ und betrachten eine harmonische Hilfsfunktion $U(\varrho,\varphi)$, die auf K den Wert Eins hat und auf der reellen Achse verschwindet. Es ist:

$$(19)\qquad U(\varrho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(R^2-\varrho^2)\,d\psi}{R^2-2R\cos\varrho(\varphi-\psi)+\varrho^2}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{(R^2-\varrho^2)\,d\psi}{R^2-2R\varrho\cos(\varphi-\psi)+\varrho^2}.\ ^{11)}$$

Es gilt auf C folgende Ungleichung:

$$U(r,\varphi)\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(R^2-r^2)\,d\psi}{(R-r)^2}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(R^2-r^2)\,d\psi}{(R+r)^2}=\frac{2Rr}{R^2-r^2}.$$

Ist nun M das Maximum von $H(\varrho,\varphi)$ auf K, so nimmt die Funktion $MU(\varrho,\varphi)-H(\varrho,\varphi)$ auf K und auf der reellen Achse nicht-negative Werte ein. Deshalb muß sie auf C nicht-negativ sein, woraus folgt:

$$M\cdot\frac{2Rr}{R^2-r^2}-m\geqq 0.$$

oder:

$$M\geqq\frac{m(R^2-r^2)}{Rr}.$$

Somit sehen wir, daß M bei genügend großem R beliebig groß wird, w. z. b. w.

§ 3.

Nun sind wir imstande, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3. *Es sei $\varphi(z)$ eine reelle analytische in $z=0$ reguläre Funktion, die durch ihre Maclaurinsche Entwickelung definiert ist:*

$$(20)\qquad \varphi(z)=s_1+s_2z+s_3z^2+\dots,$$

---

11) Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie 1, S. 640, 3. Satz. Leipzig 1912.

und seien alle quadratischen Formen

$$\sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,p-1} s_{m+\mu+\nu}\, x_\mu\, x_\nu \qquad (m \text{ fixiert},\ p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{21}$$

positiv-definit. Hat $\varphi(z)$ *im durch ihren (auch krummlinigen) Stern definierten Bereich isolierte singuläre Stellen, so müssen sie einfache reelle Pole sein. Ist* α_ν *einer dieser Pole und* $-A_\nu$ *das entsprechende Residuum, so muß sein:*

$$\operatorname{sign} A_\nu = \operatorname{sign} \alpha_\nu^m. \tag{22}$$

Läßt $\varphi(z)$ die Mittag-Lefflersche Entwicklung zu, so muß dieselbe die Form haben:

$$\varphi(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \psi_\mu\left(\frac{1}{z-\bar{\alpha}_\mu}\right) + \psi_0(z), \tag{23}$$

wo

$$\psi_0(z) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{A_\nu}{z-\alpha_\nu} + A_\nu\beta_\nu + A_\nu\beta_\nu^2 z + \ldots + A_\nu\beta_\nu^{m-1} z_\nu^{m-2}\right)$$
$$+ a_1 + a_2 z + \ldots + a_m z^{m-1}$$

ist, wobei $\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$, $\operatorname{sign} A_\nu = \operatorname{sign} \alpha_\nu^m$, $a_m \leqq 0$, während

$$\psi_\mu(\xi) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{A_{\mu,\nu}}{\xi-\alpha_{\mu,\nu}} + A_{\mu,\nu}\beta_{\mu,\nu}\right) - a_{\mu,1} - a_{\mu,2}\,\xi \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

sind, wobei $\beta_{\mu,\nu} = \frac{1}{\alpha_{\mu,\nu}}$, $A_{\mu,\nu} > 0$, $a_{\mu,2} \geqq 0$.

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptungen des Satzes seien nicht erfüllt. Dann sind folgende Fälle möglich:

A. Wenn die Voraussetzungen des ersten Teiles erfüllt sind:

1. Fall. $\varphi(z)$ hat eine imaginäre isolierte singuläre Stelle.

2. Fall. $\varphi(z)$ hat eine reelle isolierte singuläre Stelle.

3. Fall. $\varphi(z)$ hat einen reellen mehrfachen Pol.

B. Wenn die Voraussetzungen des zweiten Teiles erfüllt sind:

4. Fall. Der *Konvergenzexponent* der einen Funktion $\psi_\mu(\xi)$ $(\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ ist unendlich oder größer als m.

5. Fall. Die Entwicklung von $\psi_\mu(\xi)$ enthält eine ganze transzendente Funktion.

6. Fall. Die Entwicklung von $\psi_\mu(\xi)$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ und bzw. von $\psi_0(z)$ enthält ein Polynom vom Grade > 1 oder bzw. $> m-1$.

7. Fall. Die Entwicklung von $\psi_\mu(\xi)$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ und bzw. von $\psi_0(z)$ enthält ein Polynom mit *positivem* Koeffizienten bei z oder bzw. mit *negativem* Koeffizienten bei z^{m-1}.

Unser Satz wird bewiesen, wenn wir zeigen, daß in jedem dieser Fälle eine der Formen (21) nicht positiv-definit ist. Statt dessen beweisen wir in den meisten Fällen, daß der Ausdruck $J(\varphi_m(z)):J(z)$, wo $\varphi_m(z) = s_m z + s_{m+1} z^2 + \ldots$, negative Werte annimmt. Dies genügt, wegen der Sätze 1. und 2., um zu behaupten, daß nicht alle Formen (21) positiv-definit sind.

A. Es gelten die Voraussetzungen des ersten Teiles des Satzes.

1. Fall. Es sei α eine komplexe isolierte singuläre Stelle von $\varphi(z)$, und daher auch von $\varphi_m(z)$. Wir können $\varphi_m(z)$ so darstellen:

$$\varphi_m(z) = \chi(\xi) + \psi(z), \tag{24}$$

wo $\chi(\xi)$ eine ganze transzendente Funktion (oder Polynom) von $\xi = \frac{1}{z-\alpha}$ ist, während $\psi(z)$ sich im Innern eines Kreises K um α mit dem Radius ϱ regulär verhält. Es sei $\alpha = \beta + i\gamma$, wo $\gamma \neq 0$ ist. Dann ist:

$$J(\varphi_m(z)):J(z) = \frac{1}{y}\left[J(\chi(\xi)) + J(\psi(z))\right]. \tag{25}$$

Nehmen wir $|z-\alpha| < \varrho$, $|\xi| > \frac{1}{\varrho}$. Man kann wegen des Weierstraßschen Satzes ξ im Bereiche $|\xi| > \frac{1}{\varrho}$ so wählen, daß $J(\chi(\xi))$ einen beliebig großen absoluten Wert annimmt, und daß $\operatorname{sign} J(\chi(\xi)) = -\operatorname{sign}\gamma$. Da man dabei $|z-\alpha|$ so klein wählen kann, daß $\operatorname{sign} y = \operatorname{sign}\gamma$ gilt, und $J(\psi(z))$ für $|z-\alpha| < \varrho$ endlich bleibt, so muß der Ausdruck (25) negative Werte annehmen, w. z. b. w.

2. Fall. α ist reell. Dann ist $\chi(\xi)$ eine reelle ganze transzendente Funktion. Man kann wegen des Hilfssatzes 2. z so wählen, daß $y > 0$, $\chi(\xi) < 0$ und $|\chi(\xi)|$ beliebig groß wird. Der Ausdruck muß demnach einen negativen Wert annehmen, w. z. b. w.

3. Fall. α ist reeller n-facher Pol $(n > 1)$ von $\varphi(z)$ (und auch von $\varphi_m(z)$). $\chi(\xi)$ ist ein reelles Polynom n-ten Grades:

$$\chi(\xi) = a_0 + a_1\xi + \ldots + a_n\xi^n.$$

Wir nehmen $\xi = \varrho e^{i\varphi}$. Dann ist:

$$J(\chi(\xi)) = \varrho^n\left(a_n \sin n\varphi + \frac{a_{n-1}}{\varrho}\sin(n-1)\varphi + \ldots + \frac{a_1}{\varrho^{n-1}}\sin\varphi\right).$$

Man nehme ϱ so groß, daß die Größen $\frac{a_{n-1}}{\varrho}, \frac{a_{n-2}}{\varrho^2}, \ldots, \frac{a_1}{\varrho^{n-1}}$ beliebig klein werden, und wähle φ so, daß $\sin\varphi > 0$, $a_n \sin n\varphi < 0$ wird. Dann wird der Wert von $\chi(\xi)$ negativ und absolut beliebig groß. Da $\psi(z)$ endlich bleibt, so folgt, daß $J(\varphi_m(z)):J(z) < 0$ ist, w. z. b. w.

Ist $n = 1$, d. h. ist α einfacher Pol, so gilt:

$$J(\varphi_m(z)) : J(z) = -\frac{a_1}{(x-\alpha)^2 + y^2} + \frac{1}{y} J(\psi(z)).$$

Damit $J(\varphi_m(z)) : J(z) \geqq 0$ sei, muß $a_1 < 0$ sein.

B. Wir nehmen an, die Voraussetzungen des zweiten Teiles des Satzes seien erfüllt, d. h. $\varphi(z)$ läßt die Mittag-Lefflersche Entwicklung zu. Dann zeigen uns die früheren Überlegungen, daß die Unstetigkeitsstellen von $\varphi(z)$ lauter reelle einfache Pole sein müssen. Die Mittag-Lefflersche Entwicklung ist andererseits nur dann möglich, wenn die Menge dieser Pole abzählbar ist. Es seien $\bar{\alpha}_0 = \infty, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots$ ihre Häufungspunkte. Dann kann $\varphi(z)$ so dargestellt werden:

$$\varphi(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \psi_\mu\left(\frac{1}{z - \bar{\alpha}_\mu}\right) + \psi_0(z), \tag{26}$$

wobei

$$\psi_\mu(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{A_{\mu,\nu}}{\xi - \alpha_\nu} + g_{\mu,\nu}(\xi)\right) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{27}$$

$$\psi_0(z) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{A_\nu}{z - \alpha_\nu} + g_\nu(z)\right) + g(z), \tag{27a}$$

während $g_{\mu,\nu}(\xi)$ Polynome sind.

Nun sind wir imstande, unsere *Voraussetzung* über das Vorzeichen von $J(\varphi(z))$ für den Fall der die Mittag-Lefflersche Entwicklung zulassenden Funktionen zu beweisen. Wir können offenbar die Punkte $\bar{\alpha}_\nu$ so wählen, daß unter ihnen kein Element der zweiten derivierten Menge der Menge (α_ν) vorkommt. Dann kann man $\varphi(z)$ stets folgendermaßen darstellen:

$$\varphi(z) = \psi_\mu(\xi) + \chi(z),$$

wo $\psi_\mu(\xi)$ eine der Funktionen (27) ist, während $\chi(z)$ in $z = \bar{\alpha}_\mu$ regulär bleibt. Man muß dabei nicht vergessen, daß $\varphi(z)$ nur einfache reelle Pole haben darf, da sonst $J(\varphi(z))$ beliebig große Werte beider Vorzeichen annimmt, wie wir dies bei Untersuchung der Fälle 1, 2, 3 gesehen haben.

Wir setzen voraus, $J(\varphi(z))$ nehme auf der oberen Halbebene positive Werte an. Dann muß dies für den einen ihrer Bestandteile, etwa für $\psi_\mu(\xi)$ $(\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, der Fall sein. Wir nehmen an, es sei $J(\psi_\mu(\xi_0)) > 0$, $J(z_0) > 0$, $J(\xi_0) < 0$. Wir verfahren so, wie beim Beweis des Hilfssatzes 2., doch umkreisen wir die Pole von $\psi_\mu(\xi)$, die sich nur im Unendlichen häufen, mit hinreichend kleinen Halbkreisen. Nimmt $J(\psi_\mu(\xi))$ auf einem dieser Halbkreise positive Werte an, so ist alles bewiesen. Denn dann wächst $J\left(\frac{A_{\mu,\nu}}{\xi-\alpha_\nu}\right) = -\frac{A_{\mu,\nu}v}{(u-\alpha_\nu)^2+v^2}$ $(\xi = u+vi)$ bei abnehmendem $|\xi - \alpha_\nu|$ ins Unendliche, während die übrigbleibenden Glieder endlich bleiben. Daher nehmen wir an, seine Werte auf diesen Halbkreisen seien negativ $(A_{\mu,\nu} < 0)$ und $J\left(\frac{A_{\mu,\nu}}{\xi-\alpha_\nu}\right) : v$ hinreichend groß. Da aber die Hilfsfunktion $U(u, v)$ auf diesen Halbkreisen nur positive Werte annimmt[12]), so bleibt die Funktion $M \cdot U - J(\psi_\mu(\xi))$ auf dem ganzen Rande nicht negativ. Danach können wir alle Überlegungen des Beweises des Hilfssatzes 2. anwenden.

4. Fall. Wir bemerken, daß der Übergang von $\varphi(z) = s_1 + s_2 z + \dots$ zu $\varphi_m(z) = s_{m-1} + s_m z + \dots$ jedes Residuum bei α_ν um $\frac{1}{\alpha_\nu^{m-2}}$ vergrößert. Häufen sich die Pole um einen endlichen Punkt $\bar{\alpha}$, so sind die Summen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\alpha_\nu^2}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\alpha_\nu^m}$ gleichzeitig konvergent oder divergent; häufen sich dagegen die Pole im Unendlichen, so nimmt dabei der Konvergenzexponent exponent um $(m-2)$ ab. Dies erlaubt uns, den Fall zu betrachten, daß in der Entwicklung

$$\varphi_m(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \psi'_\mu(\xi_\mu) + \psi'_0(z) \tag{28}$$

der Konvergenzexponent einer der Funktionen $\psi'_\mu(\xi_\mu)$ $(\mu = 0, 1, 2, \dots)$ größer als 2 ist. Es sei $\psi'_\lambda(\xi_\lambda)$ eine solche Funktion. Wir führen in (28) die Transformation $\xi_\lambda = \frac{1}{z - \bar{\alpha}_\lambda}$ aus:

$$\varphi_m\left(\bar{\alpha}_\lambda + \frac{1}{\xi_\lambda}\right) = \psi'_\lambda(\xi_\lambda) + \chi(\xi_\lambda), \tag{29}$$

wo $\chi(\xi_\lambda)$ im Unendlichen regulär bleibt. Es genügt, zu beweisen, daß der Ausdruck $J\left(\varphi_m\left(\bar{\alpha}_\lambda + \frac{1}{\xi_\lambda}\right)\right) : J(\xi_\lambda) = -[(x-\bar{\alpha}_\lambda)^2 + y^2] \cdot J(\varphi_m(z)) : J(z)$ positive Werte annimmt. Dazu wählen wir eine positive Größe M fest und nehmen einen solchen Radius R, daß bei $|\xi_\lambda| > R$ die Ungleichung gilt:

$$\left|\frac{J(\chi(\xi_\lambda))}{J(\xi_\lambda)}\right| < M.$$

Es sei ferner A der maximale Wert von $|J(\psi'_\lambda(\xi_\lambda)) : J(\xi_\lambda)|$ in $|\xi_\lambda| \leq R$ (wir setzen noch voraus, daß $\psi'_\lambda(\xi_\lambda)$ in $|\xi_\lambda| \leq R$ keinen Pol hat). Wenn wir beweisen, daß $J(\psi'_\lambda(\xi_\lambda) - S \cdot \xi_\lambda) : J(\xi_\lambda)$, wo $S = M + A$ ist, positive Werte annimmt, so ist mithin alles bewiesen. Denn aus

---

[12]) Wir nehmen an, daß der Halbkreis k nicht Pole auf seinem Rande enthält.

$$J(\psi_\lambda'(\xi_\lambda) - S\cdot\xi_\lambda) : J(\xi_\lambda) > 0 \quad \text{folgt} \quad J(\psi_\lambda'(\xi)) : J(\xi) > M + A,$$

woraus man schließt, daß

$$|\xi| > R, \quad J(\chi(\xi)) : J(\xi) < M, \quad J(\psi_\lambda'(\xi) + \chi(\xi)) : J(\xi) > A > 0$$

ist, w. z. b. w.

Es sei $\psi_\lambda'(\xi) = -t_1 - t_2\xi - \ldots$. Es ist nun zu beweisen, daß $J(-\psi_\lambda'(\xi) + S\xi) : J(\xi)$ negative Werte annimmt. Dazu genügt, wegen des Satzes 2., zu beweisen, daß nicht alle Formen

$$(30) \qquad F(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) = Sx_0^2 + \sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,p-1} t_{2+\mu+\nu} x_\mu x_\nu \qquad (p = 2, 3, \ldots)$$

positiv-definit sind.

Ordnen wir die Pole α_ν von $\psi'(\xi)$ nach wachsenden absoluten Beträgen:

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq |\alpha_3| \leqq \ldots$$

und setzen $\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$, so gilt folgende asymptotische Formel (vgl. I, § 1, (5)):

$$(31) \qquad t_n = a_1\beta_1^n + a_2\beta_2^n + \ldots + a_k\beta_k^n + \beta_k^n \cdot \varepsilon_{n,k},$$

wobei $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{n,k} = 0$ und $|\beta_{k+1}| < |\beta_k|$ ist.

Alle a_k sind positiv, da sonst die Formen $\sum\limits_{\mu,\nu}^{0,p-1} t_{n+\mu+\nu} x_\mu x_\nu$ bei genügend großem n nicht positiv-definit wären. Wir nehmen eine gerade Zahl h so groß, daß in (31) für $n \geqq 2 + h$ die Ungleichung $|\varepsilon_{n,k}| < \varepsilon_h$ zutrifft, wo ε_h eine genügend kleine Größe ist; ferner setzen wir $p = qh$ und $x_\mu = 0$, wenn $\mu \not\equiv 0 \pmod h$, $x_{\nu h} = y_\nu$. Dann kann man die Form (30) so darstellen:

$$(32) \quad \Big(S + t_2 - \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu\beta_\nu^2\Big) y_0^2 + \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu\beta_\nu^2 (y_0 + y_1\beta_\nu^h + \ldots + y_{q-1}\beta_\nu^{h(q-1)})^2$$
$$+ \sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,q-1}{}' \beta_k^{2+(\mu+\nu)h} \varepsilon_{2+(\mu+\nu)h,k}\, y_\mu y_\nu.$$

(Der Strich bedeutet, daß die Kombination $\mu = 0$, $\nu = 0$ ausgeschlossen ist.)

Nun nehmen wir für y_ν die den Gleichungen

$$(33) \qquad \begin{array}{l} y_0 + y_1\beta_1^h \ + \ldots + y_{q-1}\beta_1^{h(p-1)} = 0, \\ y_0 + y_1\beta_1^h \ + \ldots + y_{q-1}\beta_2^{h(p-1)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0 + y_1\beta_{q-1}^h + \ldots + y_{q-1}\beta_{q-1}^{h(p-1)} = 0 \end{array}$$

genügenden Werte und dabei $y_0 = 1$. Dann hat das Polynom

$$(34) \qquad Y(t) = 1 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_{q-1} t^{q-1}$$

die Größen $\beta_1^h, \beta_2^h, \ldots, \beta_{q-1}^h$ zu Wurzeln und ist daher so darstellbar:

$$(35)\qquad Y(t)=\left(1-\frac{t}{\beta_1^h}\right)\left(1-\frac{t}{\beta_2^h}\right)\cdots\left(1-\frac{t}{\beta_{q-1}^h}\right).$$

Da aber $|\beta_\nu|<|\beta_\mu|$ $(\mu=1,2,\ldots,p-1;\ \nu=p,p+1,\ldots,k)$ und h gerade ist, so gilt:

$$Y(\beta_\nu^h)<1 \qquad (\nu=p,p+1,\ldots,k).$$

Der Ausdruck (32) nimmt daher folgenden Wert an:

$$(36)\quad \left(S+t_2-\sum_{\nu=1}^{k}a_\nu\beta_\nu^2\right)+\sum_{\nu=q}^{k}a_\nu\beta_\nu^2\,Y(\beta_\nu^h)+\sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,q-1}{}' \beta_k^{2+(\mu+\nu)h}\varepsilon_{2+(\mu+\nu)h,k}\,y_\mu y_\nu$$
$$<S+t_2-\sum_{\nu=1}^{q-1}a_\nu\beta_\nu^2+\sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,q-1}{}' \beta_k^{2+(\mu+\nu)h}\varepsilon_{2+(\mu+\nu)h,k}\,y_\mu y_\nu.$$

Die Werte y_μ genügen folgenden Ungleichungen:

$$(37)\qquad \begin{aligned} |y_1| &=\sum_{\nu=1}^{q-1}\frac{1}{\beta_\nu^h}<\binom{q-1}{1}\cdot\frac{1}{\beta_{q-1}^h},\\ |y_2| &=\sum_{\mu,\nu}^{1,\ldots,q-1}\frac{1}{\beta_\mu^h}\frac{1}{\beta_\nu^h}<\binom{q-1}{2}\cdot\frac{1}{\beta_{q-1}^{2h}},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ |y_{q-1}| &=\frac{1}{\beta_1^h\beta_2^h\cdots\beta_{q-1}^h}<\frac{1}{\beta_{q-1}^{(q-1)h}}, \end{aligned}$$

und darum kann die letzte Summe von (36) folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$(38)\quad \left|\sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,q-1}\beta_k^{2+(\mu+\nu)h}\cdot\varepsilon_{m+(\mu+\nu)h,k}\,y_\mu y_\nu\right|<\varepsilon_h\beta_k^2\sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,q-1}\binom{q-1}{\mu}\binom{q-1}{\nu}\left(\frac{\beta_k}{\beta_{q-1}}\right)^{h\mu}\cdot\left(\frac{\beta_k}{\beta_{q-1}}\right)^{h\nu}$$
$$=\varepsilon_h\beta_k^2\left[1+\left(\frac{\beta_k}{\beta_{q-1}}\right)^h\right]^{2(q-1)}<\varepsilon_h\beta_k^2\,2^{2(q-1)}.$$

Der Faktor ε_h kann für große Werte von h beliebig klein werden, während die übrigen Faktoren nicht von h abhängen. Die Summe (38) kann also beliebig klein werden.

Die übrigbleibenden Glieder $S+t_2-\sum\limits_{\nu=1}^{q-1}a_\nu\beta_\nu^2$ können für große Werte von q negativ und absolut beliebig groß werden, da $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\beta_\nu^2$, unserer Voraussetzung gemäß, divergiert. Daraus folgt, daß die Form (30) nicht positiv-definit ist, w. z. b. w.[13])

[13]) Im Falle $\lambda=0$ beweist man ebenso, daß der Ausdruck $J(\psi_0'(z)):J(z)$ negative Werte annehmen kann.

5. **Fall.** Die obigen Überlegungen zeigen, daß man in $\psi(z)$ bei den Gliedern $\frac{A}{\xi-\alpha}$ bzw. $\frac{A}{z-\alpha}$ Konvergenzpolynome $g_{\mu,\nu}(\xi)$ von nicht höherem als vom 0-ten bzw. $(m-2)$-ten Grade nehmen kann. Wir betrachten nun den Fall, daß in der Formel (27a) $g(z)$ eine ganze transzendente Funktion ist. Dasselbe gilt für die Funktion $\varphi_{m+2}(z) = s_{m+1} + s_{m+2}z + \dots$, die somit in folgender Gestalt darstellbar ist:

$$\varphi_{m+2}(z) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu \beta_\nu^m}{z-\alpha_\nu} + \bar{g}(z) + \chi(z),$$

wobei $\bar{g}(z)$ eine reelle ganze transzendente Funktion ist, während $\chi(z)$ im Unendlichen regulär bleibt.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\psi(z) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu \beta_\nu^m}{z-\alpha_\nu} + \bar{g}(z), \qquad \bar{g}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu, \qquad z = \varrho^{i\varphi}.$$

Dann gilt für $J(z) = \varrho \sin\varphi > 0$:

$$(39) \qquad \frac{1}{R}\int_0^R \frac{J(\psi(\varrho e^{i\varphi}))}{J(\varrho e^{i\varphi})} \cdot d\varrho$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{R}\int_0^R \frac{A_\nu \beta_\nu^m \, d\varrho}{(\varrho\cos\varphi - \alpha_\nu)^2 + \varrho^2 \sin^2\varphi} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{R}\int_0^R \varrho^{\nu-1} \frac{\sin\nu\varphi}{\sin\varphi}\, d\varrho$$

$$= \frac{1}{R\sin\varphi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu \beta_\nu^m}{\alpha_\nu} \int_{-\operatorname{ctg}\varphi}^{\frac{R-\alpha_\nu\cos\varphi}{\alpha_\nu\sin\varphi}} \frac{du}{u^2+1} + \frac{1}{R\sin\varphi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \cdot R^\nu \sin\nu\varphi$$

$$< \frac{1}{R\sin\varphi}\left[\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu| \cdot |\beta_\nu|^{m+1} + J(h(Re^{i\varphi}))\right] = \frac{J(\pi M R e^{i\varphi} + h(Re^{i\varphi}))}{J(Re^{i\varphi})},$$

wobei $h(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \cdot z^\nu$, $M = \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu \beta_\nu^{m+1}|$ ist. Dieser Ausdruck kann wegen des Hilfssatzes 1. negative absolut beliebig große Werte annehmen. Da aber

$$\frac{1}{R}\int_0^R \frac{J(\psi(\varrho e^{i\varphi}))}{J(\varrho e^{i\varphi}} \, d\varrho > \left[\frac{J(\psi(\varrho e^{i\varphi}))}{J(\varrho e^{i\varphi})}\right]_{\min},$$

so gilt dasselbe für den Ausdruck

$$\frac{J(\psi(\varrho e^{i\varphi}))}{J(\varrho e^{i\varphi})} = \frac{J(\psi(z))}{J(z)}.$$

Dies kann nur für hinreichend große Werte von $|z|$ eintreten, für welche $\chi(z)$, sowie auch $\frac{J(\chi(z))}{J(z)}$, beschränkt bleibt. Also gibt es Werte von z, für welche gilt:

$$J(\psi(z)+\chi(z)) : J(z) = J(\varphi_{m+2}(z)) : J(z) < 0.$$

Daraus folgt, daß nicht alle Formen $\sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,p-1} s_{m+2+\mu+\nu} x_\mu x_\nu$ positiv-definit sind. Wir haben aber gesehen, daß dann auch nicht alle Formen $\sum_{\mu,\nu}^{0,\ldots,p-1} s_{m+\mu+\nu} x_\mu x_\nu$ positiv-definit sind, w. z. b. w. (vgl. I, § 2).

6. Fall. $g(z)$ ist ein Polynom vom Grade $> m-1$. Das entsprechende Polynom $\bar{g}(z)$ von $\varphi_m(z)$ ist dann vom Grade $p > 1$. Dann gilt:

$$\frac{J(\psi_m(z))}{J(z)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu \beta_\nu^{m-2}}{(\varrho\cos\varphi - \alpha_\nu)^2 + \varrho^2 \sin^2\varphi} + \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \varrho^{\nu-1} \frac{\sin\nu\varphi}{\sin\varphi} + \frac{J(\chi(z))}{J(z)}.$$

Man kann stets φ so wählen, daß gilt: $\sin\varphi \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sign}\sin p\varphi = -\operatorname{sign} c_p$. Dann gilt:

$$\frac{J(\psi(z))}{J(z)} < 2\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^m + \varrho^{p-1}\left(a_p \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi} + \ldots + \frac{a_1}{\varrho^{p-1}}\right) + \frac{J(\chi(z))}{J(z)}.$$

Es ist klar (vgl. den 3. Fall), daß das zweite Glied bei genügend großem ϱ negativ und absolut beliebig groß wird, während die übrigen Glieder beschränkt bleiben, w. z. b. w.

7. Fall. $p=1$, $a_1 < 0$. Dann ist:

$$J(\varphi_m(z)) : J(z) = a_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu \beta_\nu^m}{(\varrho\beta_\nu - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} + \frac{J(\chi(z))}{J(z)}.$$

Das erste Glied ist negativ, das dritte Glied wird beliebig klein, wenn wir $J(z)$ genügend groß nehmen. Um das zweite Glied abzuschätzen, verfahren wir folgendermaßen. Wir nehmen $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ferner wählen wir eine beliebig große Zahl M und nehmen den Index n so groß, daß die Summe

$$2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^m < \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^m : M^2$$

wird. Setzen wir $\varrho = \frac{M+\cos\varphi}{|\beta_n|}$, so ist $|\varrho\beta_\nu - \cos\varphi| \geqq M$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Das zweite Glied zerfällt in zwei Teile:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu \beta_\nu^m}{(\varrho\beta_\nu - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu \beta_\nu^m}{(\varrho\beta_\nu - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{A_\nu \beta_\nu^m}{(\varrho\beta_\nu - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}.$$

Der erste Teil ist kleiner als

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \beta_\nu^m}{M^2} < \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^m}{M^2}.$$

Der zweite Teil ist kleiner als

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^m = 2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^m < \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^m}{M^2}.$$

Somit ist das zweite Glied kleiner als

$$\frac{2\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^m}{M^2},$$

woraus folgt, daß es mit wachsendem M nach Null strebt, w. z. b. w.

Man beachte, daß a_1 der Koeffizient bei z^{m-1} in $g(z)$ ist. Somit ist der Satz 3. in allen seinen Teilen bewiesen.

Ist von vornherein bekannt, daß alle $A_\nu > 0$ sind (wie dies z. B. für logarithmische Derivierte von ganzen transzendenten Funktionen der Fall ist), so schließen wir, daß bei ungeradem m alle Pole α_ν positiv sind.

Ist $m = 1$ oder $m = 2$, so ist leicht zu sehen, daß die Nullstellen von $f(z)$ sämtlich reell sind und daß sie und die Pole sich gegenseitig trennen. In der Tat, in diesem Falle gilt: $J(f(z) : J(z) \geqq 0$, woraus folgt:

$$J\left(-\frac{1}{f(z)}\right) : J(z) \geqq 0,$$

was uns erlaubt, alle früheren Überlegungen auf $-\frac{1}{f(z)}$ anzuwenden. Die Positivität der Residuen in beiden Funktionen zeigt, daß sich ihre Nullstellen und Pole gegenseitig trennen.

(Eingegangen am 17. 12. 1926.)

Zusatz bei der Korrektur. Während des Druckes dieser Arbeit erschienen in C. R. drei Arbeiten von Herrn Krawtchouk, der unabhängig von mir den größeren Teil meiner Ergebnisse erhalten hat.