Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.

Von

Paul Bernays in Göttingen und Moses Schönfinkel in Moskau.

§ 1.

Einleitende Übersicht: Fragestellungen und bisherige Ergebnisse.

Das zentrale Problem der mathematischen Logik, welches auch mit den Fragen der Axiomatik im engsten Zusammenhang steht, ist das *Entscheidungsproblem*. Es handelt sich dabei um folgendes.

Betrachtet werden logische Formeln, welche variable logische Funktionen, d. h. variable Prädikate und Relationen enthalten. Die Argumente dieser logischen Funktionen sind wiederum Variable, deren mögliche Werte von den Dingen eines gewissen „Individuenbereiches" gebildet werden. Die Variablen für Individuen schreiben wir als kleine, die für logische Funktionen als große lateinische Buchstaben. Aus den Funktionsvariablen und ihren Argumenten setzen sich die zu betrachtenden Formeln mit Hilfe der logischen Zeichen zusammen; es sind dies folgende Symbole:

$\&$	„und",	Zeichen der Konjunktion;
$\vee$	„oder",	„ „ Disjunktion;
$\rightarrow$	„wenn — so",	„ „ Implikation;
$\overline{}$	„nicht",	„ „ Negation;
(x)	„für alle x",	Allzeichen;
(Ex)	„es gibt ein x",	Seinszeichen.

Jede in einer Formel vorkommende Individuenvariable $x, y, \ldots$ ist auf ein gleichnamiges All- oder Seinszeichen bezogen.

Die logischen Zeichen werden nach der in der symbolischen Logik üblichen Weise inhaltlich gedeutet, und zwar soll auch, wie üblich, die Disjunktion nicht im Sinne des ausschließenden „Oder" (aut—aut), sondern im Sinne von „vel—vel" verstanden werden; ferner soll eine Implikation wie

$$P(x) \rightarrow Q(x)$$

gleichbedeutend sein mit

$$\overline{P(x)} \vee Q(x) \qquad („P(x) - \text{nicht, oder } Q(x)“).$$

Bezüglich der Schreibweise der Negation wollen wir festsetzen, daß statt $\overline{F(x)}$, $\overline{G(x,y,z)}$ kürzer $\overline{F}(x)$, $\overline{G}(x,y,z)$ geschrieben werden kann.

Vermöge der inhaltlichen Deutung stellen die Formeln Schemata von *Aussagen* dar, die noch zweierlei variable Elemente enthalten, nämlich erstens den Individuenbereich, auf den sich die kleinen Variablen beziehen, und zweitens die Prädikate und Relationen, welche für die großen Variablen eingesetzt werden können.

Es soll nun ein Verfahren gefunden werden, durch welches man von einer vorgelegten Formel stets entscheiden kann, ob sie für jeden Individuenbereich und für jede Wahl der logischen Funktionen eine richtige Aussage liefert.

Die logischen Funktionen werden hierbei lediglich in Hinsicht auf ihren Wertverlauf betrachtet, d. h. es kommt bei einer logischen Funktion für unsere Frage nur darauf an, daß jedem Wertsystem ihrer Argumente eindeutig einer der Werte „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet ist, gleichgültig, wie man zu dieser Zuordnung gelangt.

Wir wollen eine Formel, die bei jeder Einsetzung logischer Funktionen eine richtige Aussage ergibt, eine „allgemeingültige“ Formel nennen.

Die geforderte Entscheidung betrifft die Allgemeingültigkeit einer Formel für *jeden* Individuenbereich.

Ein Beispiel einer für jeden Individuenbereich allgemeingültigen Formel ist

$$(x)\left(F(x) \vee \overline{F}(x)\right).$$

Auf Grund der bekannten, die mathematische Logik beherrschenden *Dualität*, gemäß welcher *wahr* und *falsch*, *Konjunktion* und *Disjunktion*, *Allgemeinheit* und *Existenz* einander dual entsprechen, gibt es zu dem gestellten Problem der Entscheidung über *Allgemeingültigkeit* auch ein duales, nämlich die Frage der „*Erfüllbarkeit*“: es soll nach einem festen Verfahren von einer vorgelegten Formel entschieden werden, ob sie für gewisse Individuenbereiche bei passender Wahl der logischen Funktionen eine richtige Aussage liefert.

Die beiden Probleme sind sachlich gleichbedeutend. Nämlich die Frage der Allgemeingültigkeit ist für eine Formel $\mathfrak{A}$ (große deutsche Buchstaben sollen hier, wie in Hilberts neueren Abhandlungen, zur Mitteilung von Formeln und von Formel-Bestandteilen dienen) dann und nur dann zu bejahen, wenn die Frage der Erfüllbarkeit für $\overline{\mathfrak{A}}$ zu verneinen ist. Es genügt daher, die Methoden der Behandlung jeweils für eines der beiden Probleme zu entwickeln. Die Ergebnisse lässen sich dann auf das andere

Problem dualistisch übertragen, ganz so wie es in der projektiven Geometrie auf Grund der dort bestehenden Dualität geschieht.

Eine naturgemäße Erweiterung unserer Fragestellung ergibt sich aus der Rolle des Individuenbereiches. Nämlich statt bei einer vorgelegten Formel zu untersuchen, ob sie für *jeden* Individuenbereich allgemeingültig ist, kann man fragen: Wie muß der Individuenbereich beschaffen sein, damit die Formel allgemeingültig ist?

Entsprechend läßt sich das Problem der Erfüllbarkeit in der Weise erweitern, daß man mit Bezug auf eine vorgelegte Formel fragt: Wie muß der Individuenbereich beschaffen sein, damit die Formel erfüllbar (d. h. bei einer passend gewählten Einsetzung von logischen Funktionen richtig) ist?

Die fragliche Beschaffenheit des Individuenbereiches kann nur in einer *Anzahlbestimmung* bestehen. Denn wenn zwei Individuenbereiche gleich viele Dinge enthalten, wenn also jedem Ding a des einen Bereiches umkehrbar eindeutig ein Ding a' des andern entspricht, so gehört auch zu jeder bestimmten logischen Funktion (von irgendeiner Anzahl k von Argumenten), welche sich auf den ersten Individuenbereich bezieht, eine solche auf den zweiten Bereich bezügliche Funktion (von ebenfalls k Argumenten), die für ein Wertsystem

$$a'_1, \ldots, a'_k$$

von Dingen des zweiten Bereiches dann und nur dann wahr ist, wenn die erste Funktion für das entsprechende Wertsystem

$$a_1, \ldots, a_k$$

von Dingen des ersten Bereiches wahr ist; und ebenso umgekehrt. Es kann demnach zwischen den beiden Individuenbereichen in Hinsicht auf Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit logischer Formeln kein Unterschied stattfinden.

Überdies läßt sich von vornherein einsehen, daß die Bedingung für die Allgemeingültigkeit einer Formel nur eine *Höchstzahl*, diejenige für die Erfüllbarkeit nur eine *Mindestzahl* sein kann.

Es gilt nämlich der Satz: Ist eine Formel für irgendeinen Individuenbereich allgemeingültig, so ist sie es auch für jeden Bereich von *kleinerer* Individuenzahl, und ist eine Formel für einen Bereich erfüllbar, so ist es auch für jeden Bereich von *größerer* Individuenzahl.

Gemäß unserem Dualitätsprinzip genügt es, die eine der beiden Behauptungen zu beweisen; wir wählen die zweite. Es sei also eine Formel gegeben, die für einen gewissen Individuenbereich α erfüllbar ist. Wir wollen zeigen, daß die Formel für jeden Bereich β erfüllbar ist, welcher

α als Teilbereich enthält. Damit ist dann auch gezeigt, daß sie überhaupt für jeden Bereich erfüllbar ist, der mehr Individuen als α enthält, — da ja Bereiche von gleicher Individuenzahl sich hinsichtlich der Erfüllbarkeit von Formeln gleich verhalten.

Es seien

$$F, G, \ldots, S$$

die in der Formel vorkommenden Funktionszeichen. Nach Voraussetzung gibt es ein System bestimmter logischer Funktionen

$$F_0, G_0, \ldots, S_0,$$

welche sich auf den Bereich α beziehen und welche, für $F, G, \ldots, S$ eingesetzt, die betrachtete Formel zu einer richtigen machen. c sei ein Ding aus α, und γ sei die Gesamtheit, welche von c und ferner den nicht zu α gehörigen Dingen des Bereiches β gebildet wird. Wir ordnen nun jedem Ding von β ein Ding von α zu, indem wir jedem Ding der Gesamtheit γ das Ding c, und jedes nicht zu γ gehörige Ding von β sich selbst entsprechen lassen. Ferner ersetzen wir die logischen Funktionen $F_0, \ldots, S_0$ durch neue Funktionen

$$F_1, \ldots, S_1,$$

welche sich auf den Bereich β beziehen und deren Wahrheitswerte („wahr" oder „falsch") so bestimmt werden, daß sie für jedes (aus β entnommene) Wertsystem ihrer Argumente bezüglich mit den Wahrheitswerten der alten Funktionen für das System der zugeordneten Werte aus α übereinstimmen. Auf diese Weise erhalten wir eine auf den Bereich β bezügliche Aussage, welche auch durch Einsetzung aus der betrachteten Formel entsteht, und aus der Bildungsweise der Funktionen $F_1, \ldots, S_1$ geht hervor, daß diese Aussage wiederum richtig ist[1]).

Somit ist in der Tat die betrachtete Formel auch in dem Bereich β erfüllbar.

Bei dieser Überlegung haben wir von einer Möglichkeit abgesehen, nämlich der, daß der Individuenbereich *überhaupt kein Ding* enthält. Diesen trivialen Ausnahmefall, der eine Sonderstellung einnimmt, wollen wir bei unseren Betrachtungen *durchweg ausschließen*. Seine Behandlung erledigt sich durch die Bemerkung, daß für einen leeren Individuenbereich eine Formel mit voranstehendem Allzeichen stets allgemeingültig, eine solche mit voranstehendem Seinszeichen stets unerfüllbar ist.

---

[1]) In betreff dieses letzten Punktes der Argumentation sei auf § 2, S. 353—354 hingewiesen, wo für einen ganz entsprechenden Fall die Überlegung ausführlicher angegeben wird.

Um ein paar Beispiele für die Bedingungen der Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit anzuführen, so ist die Formel

$$(Ex)\,F(x) \rightarrow (x)\,F(x)$$

für diejenigen Bereiche allgemeingültig, welche nur ein Ding enthalten; die Formel

$$\{(Ex)\,(F(x)\ \&\ G(x))\ \&\ (Ex)\,(F(x)\ \&\ \overline{G}(x))\} \rightarrow (x)\,F(x)$$

ist allgemeingültig, sofern der Individuenbereich aus höchstens zwei Dingen besteht. Die Formel

$$(Ex)\,F(x)\ \&\ (Ex)\,\overline{F}(x)$$

ist erfüllbar für die Individuenbereiche, welche aus mindestens zwei Dingen bestehen, die Formel

$$(Ex)\,F(x)\ \&\ (Ex)\,(\overline{F}(x)\ \&\ G(x))\ \&\ (Ex)\,(\overline{F}(x)\ \&\ \overline{G}(x))$$

ist erfüllbar für die Individuenbereiche, die aus mindestens drei Dingen bestehen.

Wie man leicht sieht, läßt sich *jede endliche Höchstzahl* durch die *Allgemeingültigkeit*, *jede endliche Mindestzahl* durch die *Erfüllbarkeit* einer Formel charakterisieren, und zwar braucht man dabei nur Funktionszeichen mit *einem* Argument.

Auch der Unterschied zwischen *endlichen* und *unendlichen* Individuenbereichen läßt sich durch die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit gewisser Formeln zum Ausdruck bringen, wobei nun aber (nach einem noch zu erwähnenden Satz) das Auftreten von Funktionszeichen mit mindestens zwei Argumenten wesentlich ist:

So besteht z. B. die notwendige und hinreichende Bedingung für die Allgemeingültigkeit der Formel

$$\{(x)\,\overline{F}(x,x)\ \&\ (x)(y)(z)\big((F(x,y)\ \&\ F(y,z)) \rightarrow F(x,z)\big)\} \rightarrow (Ex)(y)\,\overline{F}(x,y)$$

in der Endlichkeit des Individuenbereiches, und demgemäß die Bedingung für die Erfüllbarkeit der Formel

$$(x)\,\overline{F}(x,x)\ \&\ (x)(y)(z)\big((F(x,y)\ \&\ F(y,z)) \rightarrow F(x,z)\big)\ \&\ (x)(Ey)\,\overline{F}(x,y)$$

in der Unendlichkeit des Individuenbereiches.

Der Unterschied zwischen abzählbaren und überabzählbaren Individuenbereichen kann dagegen, nach einem zuerst von Löwenheim[2]), später auf

[2]) Leopold Löwenheim, „Über Möglichkeiten im Relativkalkul", Math. Annalen 76. Leipzig 1915.

andere Weise von Skolem[3]) bewiesenen Satz[4]), *nicht* durch die Allgemeingültigkeit oder Erfüllbarkeit einer Formel ausgedrückt werden.

Um diesen Unterschied zur Darstellung zu bringen, muß man zu dem *erweiterten Formalismus der „zweiten Stufe"* aufsteigen. Dieser besteht darin, daß das Allzeichen und das Seinszeichen nicht nur in Verbindung mit den kleinen Variablen, sondern auch mit den großen Variablen angewandt werden, so daß man Allgemeinheit und Existenz nicht nur in bezug auf Individuen, sondern auch in bezug auf logische Funktionen formal ausdrücken kann.

Z. B. die Formel

$$(P)(EQ)(x)(\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x))$$

besagt: „Zu jedem Prädikat gibt es ein mit ihm unverträgliches Prädikat"; die Formel

$$(R)(ES)(x)(y)\Big((R(x,y) \rightarrow S(y,x)) \mathbin{\&} (S(x,y) \rightarrow R(y,x))\Big)$$

besagt: „Zu jeder zweigliedrigen Relation gibt es eine solche, die aus ihr durch Vertauschung der beiden Glieder entsteht."

In dieser Symbolik kann die Allgemeingültigkeit und ebenso die Erfüllbarkeit einer Formel der „ersten Stufe", d. h. einer Formel unseres bisherigen Formalismus, selbst durch eine Formel dargestellt werden. Z. B. die Allgemeingültigkeit der Formel

$$(x)(F(x) \vee \overline{F}(x))$$

stellt sich dar durch die Formel

$$(F)(x)(F(x) \vee \overline{F}(x)),$$

die Erfüllbarkeit der Formel

$$(x)(y)(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$$

durch die Formel

$$(ER)(x)(y)(R(x,y) \rightarrow R(y,x)).$$

Bei dieser Darstellung durch eine Formel der zweiten Stufe ist die Abhängigkeit von den variablen logischen Funktionen beseitigt. Es bleibt in der Formel nur noch der Individuenbereich unbestimmt.

Die beiden Fragen der Allgemeingültigkeit und der Erfüllbarkeit erscheinen nunmehr als Spezialfälle des viel allgemeineren Problems, von einer beliebigen Formel der zweiten Stufe zu entscheiden, ob sie richtig

---

[3]) Th. Skolem, „Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen". Videnskapsselskapets Skrifter. I. Mat. Naturv. Kl., 1920, Nr. 4. Kristiania.

[4]) Dieser Satz wird im folgenden genauer formuliert.

ist oder nicht, bzw. unter welchen Bedingungen für den Individuenbereich sie richtig ist. (Diese Bedingungen können wieder nur Anzahl-Bedingungen sein.)

Eine andere Erweiterung der Problemstellung besteht darin, daß in den zu untersuchenden Formeln neben den variablen logischen Funktionen die *Identitätsrelation* als bestimmte logische Funktion zugelassen wird.

Die ersten Untersuchungen auf dem Gebiete des Entscheidungsproblems sind von Schröder angestellt worden.

Zu systematischen Ergebnissen ist zuerst Löwenheim in seiner (vorhin zitierten) Abhandlung „Über Möglichkeiten im Relativkalkül" gelangt.

Hierin behandelt er erstens das Entscheidungsproblem für den Fall von Prädikatenformeln, d. h. von solchen Formeln, in denen ausschließlich Funktionen *eines* Arguments auftreten; und zwar löst er es vollständig, für Formeln der ersten Stufe, unter Einbeziehung der Identitätsrelation und andeutungsweise auch für Formeln der zweiten Stufe.

Ferner zeigt er, daß jedes Problem der Entscheidung über Allgemeingültigkeit oder Erfüllbarkeit sich auf ein solches zurückführen läßt, in welchem die zu betrachtende Formel nur Funktionen von *zwei* Argumenten enthält.

Drittens beweist er den Satz, daß eine Formel der ersten Stufe, die überhaupt für irgendeinen Individuenbereich erfüllbar ist, auch für einen abzählbaren Individuenbereich erfüllbar ist oder, in der hierzu dualen Ausdrucksweise: daß eine Formel der ersten Stufe allgemeingültig für jeden Individuenbereich ist, falls sie für jeden abzählbaren Individuenbereich allgemeingültig ist.

Für diesen Satz hat hernach Skolem (in der oben zitierten Abhandlung) einen etwas einfacheren Beweis gegeben.

Das Entscheidungsproblem für die Prädikatenformeln hat, unabhängig von Löwenheim, später Behmann behandelt und zur vollständigen Erledigung gebracht[5]).

Diese Untersuchung liefert insbesondere das Ergebnis, daß die Bedingung für die Individuenzahl nur in (unteren oder oberen) Abgrenzungen durch *endliche* Zahlen bestehen kann[6]), und zwar gilt dies auch für die Formeln der zweiten Stufe und unter Einbeziehung der Identitätsrelation, so daß also der Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Gesamtheiten nicht durch die Richtigkeit einer Prädikatenformel der zweiten Stufe, und erst recht nicht durch die Allgemeingültigkeit oder Erfüllbarkeit einer

---

[5]) Heinrich Behmann, „Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem". Math. Annalen 86, Heft 3/4 (1922); S. 163—229.

[6]) Der Fall eines unendlichen, durch eine endliche Zahl nach unten abgegrenzten Anzahlintervalles kommt hiernach auch in Betracht.

Prädikatenformel der ersten Stufe — selbst bei Hinzunahme der Identitätsrelation — zum Ausdruck gebracht werden kann.

Im folgenden soll nun für den allereinfachsten bisher noch nicht erledigten Fall das Entscheidungsproblem gelöst werden. Es handelt sich dabei lediglich um Formeln der ersten Stufe unter Ausschluß der Identitätsrelation.

Man gewinnt eine Klassifikation dieser Formeln auf Grund der Tatsache, daß — gemäß einem Satze des Logikkalkuls — jede logische Formel in eine solche „Normalform" umgeformt werden kann, bei der die Allzeichen und Seinszeichen alle *der ganzen Formel voranstehen* und die mit ihr in bezug auf Wahrheit und Falschheit vollkommen gleichwertig ist. Beispielsweise kann die vorhin erwähnte Formel

$$\{(x)\overline{F}(x,x) \mathbin{\&} (x)(y)(z)\big((F(x,y) \mathbin{\&} F(y,z)) \to F(x,z)\big)\} \to (Ex)(y)\overline{F}(x,y)$$

auf folgende Normalform gebracht werden:

$$(Ex)(Ey)(Ez)(u)\{F(x,x) \vee (F(x,y) \mathbin{\&} F(y,z) \mathbin{\&} \overline{F}(x,z)) \vee \overline{F}(x,u)\}.$$

Denken wir uns nun die zu betrachtenden Formeln auf eine solche Normalform gebracht, so sind die einfachsten Fälle von Formeln, die nicht Prädikatenformeln sind, diejenigen, in denen nur *zwei* Zeichen voranstehen. Auf diese Formeln beziehen sich die folgenden Betrachtungen. Von den vier möglichen Typen

$$(x)(y)\mathfrak{A}(x,y), \quad (Ex)(Ey)\mathfrak{A}(x,y), \quad (x)(Ey)\mathfrak{A}(x,y), \quad (Ex)(y)\mathfrak{A}(x,y)$$

erweisen sich die drei ersten für das Problem der Allgemeingültigkeit als trivial. Überhaupt läßt sich, wie gezeigt wird, die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit für alle die Formeln in trivialer Weise erledigen, in deren Normalform kein Seinszeichen vor einem Allzeichen steht.

Die Behandlung des vierten Typus wird auf diejenige einer Prädikatenformel zurückgeführt und ergibt eine explizite Übersicht über die möglichen Fälle von Allgemeingültigkeit.

Zur Vorbereitung wird die Entscheidung über Allgemeingültigkeit (bzw. Erfüllbarkeit) bei Prädikatenformeln (d. h. solchen der ersten Stufe, in denen auch die Identitätsrelation nicht auftritt) nach der direkten Methode, wie sie in der Abhandlung von Löwenheim kurz angegeben ist, ausführlich dargelegt, insbesondere im Hinblick auf die dabei resultierende Form der Anzahlbedingung für den Individuenbereich.

Die im folgenden mitgeteilten Überlegungen sind durch Vorlesungen von Hilbert über mathematische Logik angeregt worden und liegen schon um mehrere Jahre zurück. Die Durchführung des Entscheidungsverfahrens im Falle einer einzigen auftretenden Funktion $F(x, y)$ rührt von M. Schönfinkel her, der zuerst das Problem in Angriff nahm [7]), von P. Bernays die Ausdehnung der Methode auf mehrere logische Funktionen, sowie die Abfassung der vorliegenden Arbeit.

§ 2.

Das Entscheidungsproblem bei Beschränkung auf Funktionen eines Arguments.

Der methodische Leitgedanke der folgenden Betrachtungen besteht in der Zurückführung des Entscheidungsproblems auf das Entscheidungsverfahren im *Aussagenkalkul*. Im Aussagenkalkul haben wir es zu tun mit Formeln, welche aus den Aussagenvariablen $X, Y, Z, \ldots$ (als solche nehmen wir große lateinische Buchstaben, die, zum Unterschied von den Funktionsvariablen, kein Argument bei sich führen) mittels der Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Negation gebildet werden.

Die Entscheidung, ob eine solche Formel allgemeingültig ist, d. h. bei jeder Einsetzung von bestimmten Aussagen für die Variablen $X, Y, \ldots$ immer eine richtige Aussage liefert, kann direkt durch ein endliches Ausprobieren herbeigeführt werden; denn bei den einzusetzenden bestimmten Aussagen kommt es nur auf ihren Wahrheitswert an, und man braucht daher für die Aussagenvariablen nur die zwei Werte „wahr" und „falsch" in Betracht zu ziehen.

Ein besonders einfaches Kriterium für die Allgemeingültigkeit einer Aussagenformel erhält man an Hand der „konjunktiven Normalform". Unter einer konjunktiven Normalform versteht man eine Formel, welche in einer konjunktiven Zusammensetzung von solchen Disjunktionen besteht, die ihrerseits als Disjunktionsglieder nur Variable oder negierte Variable enthalten [8]).

Nach einem bekannten Satze des Aussagenkalkuls läßt sich jede Aussagenformel in eine ihr wahrheitsgleiche konjunktive Normalform überführen. Als *„wahrheitsgleich"* sollen zwei Aussagenformeln bezeichnet werden, wenn bei jeder bestimmten Einsetzung beide Formeln richtige oder beide falsche Aussagen ergeben.

---

[7]) Über sein Ergebnis hat Herr Schönfinkel in der Göttinger mathematischen Gesellschaft im Wintersemester 1922/23 referiert.

[8]) Hierin sollen die Fälle mit inbegriffen sein, wo die Formel nur aus einer einzigen Disjunktion besteht, aber auch, wo ein Konjunktionsglied nur aus einer Variablen bzw. einer negierten Variablen besteht. D. h. es sind „eingliedrige" Konjunktionen und Disjunktionen zugelassen.

Bei einer solchen Normalform besteht nun das notwendige und hinreichende Kriterium für die Allgemeingültigkeit darin, daß jede der Disjunktionen zwei entgegengesetzte Glieder enthält, d. h. zwei solche Glieder, deren eines die Negation des anderen ist. So ist z. B. die Formel

$$(X \vee Y \vee \overline{Y}) \,\&\, (\overline{X} \vee X \vee Z)$$

allgemeingültig, nicht aber

$$X \,\&\, (\overline{Z} \vee Z).$$

Das duale Gegenstück zu der konjunktiven Normalform ist die *disjunktive* Normalform, die sich von jener dadurch unterscheidet, daß Konjunktion und Disjunktion ihre Rollen vertauschen.

Wie die konjunktive Normalform das Kriterium der Allgemeingültigkeit, so liefert die disjunktive Normalform das Kriterium der Erfüllbarkeit. Dieses Kriterium besteht für eine disjunktive Normalform darin, daß in mindestens einer der (disjunktiv verbundenen) Konjunktionen keine zwei entgegengesetzten Glieder enthalten sind. —

Die Herstellung einer konjunktiven Normalform[9]) für eine gegebene Aussagenformel ist auf verschiedene Weisen möglich. Man kann daher diese Normalform noch weiteren Bedingungen unterwerfen. Insbesondere besagt ein Satz des Aussagenkalkuls, daß jede Aussagenformel, welche mit den Aussagenvariablen $X, Y, \ldots, U$ gebildet werden kann (es wird nicht verlangt, daß diese Variablen alle in der Formel vorkommen), wahrheitsgleich ist mit einer solchen speziellen konjunktiven Normalform, bei der jede der (konjunktiv verbundenen) Disjunktionen entweder mit der Disjunktion

$$X \vee Y \vee \ldots \vee U$$

übereinstimmt oder aus ihr durch Überstreichung einer oder mehrerer Variablen hervorgeht. Indem wir überdies noch verlangen, daß jede solche Disjunktion höchstens einmal als Glied auftritt, wird die Normalform eindeutig (abgesehen von der Reihenfolge der Konjunktionsglieder) festgelegt.

Diese besondere Art von konjunktiver Normalform, von der wir an einer späteren Stelle Gebrauch machen werden, wollen wir „*ausgezeichnete*" *konjunktive Normalform* nennen. Dabei ist zu bemerken, daß wir als ausgezeichnete konjunktive Normalform einer *allgemeingültigen* Formel die 0-gliedrige Konjunktion anzusehen haben, welche überhaupt kein Glied enthält.

Die dem Problem der Allgemeingültigkeit angemessene Bevorzugung der konjunktiven Normalform bringt es mit sich, daß wir bei den An-

---

[9]) Ganz entsprechendes gilt für die disjunktive Normalform.

wendungen des Aussagenkalkuls im folgenden stets *die Konjunktion formal als Summe, die Disjunktion als Produkt* zu behandeln haben, — umgekehrt wie es gewöhnlich im Logikkalkul geschieht. —

Betrachten wir nun den einfachsten Fall des anfangs formulierten Entscheidungsproblems, nämlich den, wo als logische Funktionen nur solche mit *einem Argument*, also Prädikate, vorkommen. Hier gelingt in der Tat ganz allgemein die Zurückführung auf das Entscheidungsverfahren des Aussagenkalkuls.

Zunächst erkennen wir die Möglichkeit dieser Zurückführung für den Fall eines Individuenbereiches mit einer *gegebenen endlichen Anzahl* n von Individuen.

Seien nämlich

$$a_1, \ldots, a_n$$

diese Individuen, so ist die Operation des vorgesetzten Allzeichens (x) gleichbedeutend mit einer Konjunktion, bei der nacheinander für x die Werte $a_1, \ldots, a_n$ zu setzen sind, und ebenso ist die Operation des vorgesetzten Seinszeichens (Ex) gleichbedeutend mit einer Disjunktion, wo wiederum für x die Werte $a_1, \ldots, a_n$ zu setzen sind.

Ist nun P eine der vorkommenden Funktionsvariablen mit einem Argument, so erhält man bei jeder Einsetzung eines bestimmten Prädikates an Stelle von P für

$$P(a_1), \ldots, P(a_n)$$

bestimmte Aussagen mit bestimmten Wahrheitswerten. Umgekehrt wird auch durch jede Verteilung der Werte „wahr“ und „falsch“ auf die Symbole

$$P(a_1), \ldots, P(a_n)$$

der Wertverlauf eines Prädikates definiert. Demgemäß erhalten wir an Stelle jeder Funktionsvariablen n voneinander unabhängig variable Wahrheitswerte. Die Allgemeingültigkeit der vorgelegten Formel für eine gegebene Anzahl n von Individuen ist somit gleichbedeutend mit der Allgemeingültigkeit einer Aussagenformel, und für diese können wir die Frage der Allgemeingültigkeit entscheiden.

Hiermit ist freilich unsere Aufgabe nicht gelöst. Denn erstens wollen wir uns nicht auf endliche Individuenbereiche beschränken, und zweitens können wir ja auch nicht für *jede* endliche Individuenzahl die entsprechende Aussagenformel auf ihre Richtigkeit prüfen.

Nun läßt sich aber folgender Satz beweisen: Ist k die Anzahl der in einer Formel von der betrachteten Art vorkommenden Prädikatenvariablen, so ist die Formel allgemeingültig für jeden Individuenbereich, falls sie für einen Bereich von 2^k Individuen allgemeingültig ist.

Für den Beweis ist es vorteilhafter, die hierzu *duale Form* des Satzes zu wählen: Enthält eine Formel von der betrachteten Art k Prädikatenvariablen und ist sie überhaupt für irgendeinen Individuenbereich erfüllbar, so ist sie auch für einen Bereich von 2^k Individuen erfüllbar.

Dies ist folgendermaßen einzusehen.

Seien

$$F, G, \ldots, P$$

die in der Formel vorkommenden k Prädikatenvariablen, und seien

$$F_0, G_0, \ldots, P_0$$

gewisse auf einen Individuenbereich bezügliche bestimmte Prädikate, für welche die Formel eine richtige Aussage $\mathfrak{A}$ ergibt. Dann teilen wir die Dinge des Individuenbereiches in Klassen ein, indem wir zwei Dinge a, b zur selben Klasse rechnen, wenn die Aussagen $F_0(a)$ und $F_0(b)$ wahrheitsgleich (d. h. beide wahr oder beide falsch) sind, und ebenso

$$G_0(a) \text{ mit } G_0(b), \ldots, P_0(a) \text{ mit } P_0(b)$$

wahrheitsgleich ist.

Auf diese Weise erhalten wir höchstens 2^k Klassen, da es ja für ein Ding a höchstens 2^k Möglichkeiten der Verteilung von Wahrheit und Falschheit auf die Aussagen

$$F_0(a), G_0(a), \ldots, P_0(a)$$

gibt.

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die verschiedenen Klassen, die wir so erhalten. Diese bilden einen Individuenbereich von n Dingen, wobei

$$n \leqq 2^k$$

ist. Wir definieren nun Prädikate

$$F_1, G_1, \ldots, P_1,$$

welche sich auf diesen neuen Individuenbereich beziehen, indem wir festsetzen, daß F_1 auf die Klasse α_p $(p = 1, \ldots, n)$ dann und nur dann zutrifft, wenn F_0 auf die zu α_p gehörigen Dinge (des anfänglichen Individuenbereichs) zutrifft, daß ebenso G_1 auf α_p dann und nur dann zutrifft, wenn G_0 auf die zu α_p gehörigen Dinge zutrifft usw.

Gemäß dieser Definition geht jede mit den Prädikaten $F_0, \ldots, P_0$ und den logischen Zeichen gebildete, auf den anfänglichen Individuenbereich bezügliche Aussage, wo als Argumente der Prädikate entweder Variable oder bestimmte Dinge des anfänglichen Individuenbereiches stehen, in eine ihr wahrheitsgleiche Aussage über, wenn man darin F_0 durch F_1, G_0 durch $G_1, \ldots, P_0$ durch P_1 ersetzt, ferner statt des anfänglichen den neuen Individuenbereich der n Klassen zugrunde legt und für jedes evtl. als Argument auftretende Ding (des anfänglichen Bereiches) diejenige Klasse setzt, zu welcher das Ding gehört.

Diese Behauptung ist trivial für den Fall, daß die betreffende Aussage kein Allzeichen und kein Seinszeichen enthält. Um sie allgemein zu beweisen, machen wir Gebrauch von der bereits in der Einleitung erwähnten Tatsache, daß jede Formel, in der Variable auftreten, auf eine solche Normalform gebracht werden kann, daß die All- und Seinszeichen sämtlich voranstehen. Wir beschränken uns also auf Aussagen von dieser Normalform.

Der Satz gelte schon, wenn die Anzahl der All- und Seinszeichen in der Aussage kleiner als m ist. Nun betrachten wir eine Aussage mit m voranstehenden Zeichen ($m > 0$). Diese hat dann (bei passender Benennung der Variablen) entweder die Form

$$(x)\mathfrak{B}(x)$$

oder die Form

$$(Ex)\mathfrak{B}(x),$$

wobei in $\mathfrak{B}(x)$ nur noch $(m-1)$ All- und Seinszeichen voranstehen. Durch die Ausführung der verlangten Änderungen erhält man die Aussage

$$(x)\tilde{\mathfrak{B}}(x) \text{ bzw. } (Ex)\tilde{\mathfrak{B}}(x).$$

Während die vorherige Aussage sich auf den ursprünglichen Individuenbereich bezieht, bezieht sich die geänderte Aussage auf den neuen Individuenbereich. Es ist zu zeigen, daß diese mit jener wahrheitsgleich ist. Dies erkennt man so: Sei a ein Ding des ursprünglichen Individuenbereiches und α die Klasse, zu der a gehört. Dann ist $\mathfrak{B}(a)$ eine Aussage mit $(m-1)$ voranstehenden All- und Seinszeichen, welche durch Ausführung der verlangten Änderungen in $\tilde{\mathfrak{B}}(\alpha)$ übergeht; nach unserer Annahme ist daher $\mathfrak{B}(a)$ mit $\tilde{\mathfrak{B}}(\alpha)$ wahrheitsgleich. Wenn daher $\mathfrak{B}(x)$ für alle Dinge des ursprünglichen Individuenbereiches zutrifft, so trifft $\tilde{\mathfrak{B}}(x)$ für alle Dinge des neuen Individuenbereiches zu, und umgekehrt; ferner, wenn es ein Ding x im ursprünglichen Individuenbereich gibt, für welches $\mathfrak{B}(x)$ zutrifft, so gibt es auch im neuen Individuenbereich ein Ding x, für welches $\tilde{\mathfrak{B}}(x)$ zutrifft, und umgekehrt.

Somit ist die Behauptung durch den Schluß von n auf $n+1$ bewiesen. Insbesondere folgt nun hieraus, daß die richtige Aussage $\mathfrak{A}$, die wir durch eine spezielle Einsetzung aus unserer Ausgangsformel erhalten, bei der Ersetzung von $F_0, G_0, \ldots, P_0$ durch $F_1, G_1, \ldots, P_1$ wieder in eine richtige Aussage übergeht, bei der die Variablen sich auf den Individuenbereich der Klassen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beziehen, deren Anzahl $\leqq 2^k$ ist. Das heißt: die Ausgangsformel ist, wenn sie überhaupt erfüllbar ist, auch in einem

Bereich von höchstens 2^k Individuen, und folglich auch in einem Bereiche von genau 2^k Individuen, erfüllbar.

Somit ist im Gebiete der logischen Funktionen eines Arguments das Problem der Allgemeingültigkeit sowie das der Erfüllbarkeit durch ein bestimmtes Entscheidungsverfahren gelöst. Zugleich ergibt sich bezüglich der Anzahl-Bedingungen für den Individuenbereich ein einfaches Resultat: Eine beschränkende Anzahl-Bedingung für die Allgemeingültigkeit einer Formel mit k Prädikaten-Variablen kann nur lauten: „der Individuenbereich besteht aus höchstens r Dingen“, wobei $1 \leqq r < 2^k$; eine beschränkende Anzahl-Bedingung für die Erfüllbarkeit kann nur lauten: „der Individuenbereich besteht aus mindestens r Dingen“, wobei $1 < r \leqq 2^k$.

§ 3.

Das Problem der Allgemeingültigkeit bei Formeln mit zwei voranstehenden Zeichen. Vorfragen. Triviale Fälle.

Wenden wir uns nun zu dem allgemeinen Fall, daß auch Funktionen mit *mehreren Argumenten* auftreten. Wir können von vornherein annehmen, daß die zu betrachtenden Formeln die Normalform haben, bei der die All- und Seinszeichen voranstehen.

Wenn nur ein einziges solches Zeichen voransteht, so haben wir noch kein neues Problem; denn dann kommt ja nur eine einzige Variable vor, und ein Funktionszeichen mit mehreren übereinstimmenden Argumenten, wie

$$F(x, x), \qquad G(x, x, x),$$

ist ja in Hinsicht auf die möglichen Werte bei bestimmten Einsetzungen gar nicht verschieden von einem Funktionszeichen mit einem einzigen Argument. Die einfachste Möglichkeit eines wesentlichen Auftretens von Relationen (Funktionen mehrerer Argumente) ist also bei zwei voranstehenden Zeichen gegeben.

Dieser *Fall zweier voranstehender Zeichen* soll nunmehr behandelt werden.

Es sind folgende Typen möglich:

$$(x)(y)\,\mathfrak{A}(x,y), \quad (Ex)(Ey)\,\mathfrak{A}(x,y), \quad (x)(Ey)\,\mathfrak{A}(x,y), \quad (Ex)(y)\,\mathfrak{A}(x,y).$$

Wir wollen uns zunächst klarmachen, daß es keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, wenn wir annehmen, daß die in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Funktionszeichen lauter solche mit *zwei Argumenten* sind.

Die Vermeidung von Funktionen mit nur einem Argument geschieht einfach dadurch, daß wir z. B. statt $F(x)$ schreiben $F(x, x)$, indem wir also den Wertverlauf eines Prädikates als Teil des Wertverlaufes einer Relation auffassen, was sachlich keinen Unterschied macht.

Etwas mühsamer ist es, das Auftreten von Funktionen mit mehr als zwei Argumenten auszuschalten[10]). Die Methode, nach der man hierbei verfährt, läßt sich an dem Fall der Funktionen mit drei Argumenten schon hinreichend deutlich darlegen.

Sei G ein Funktionszeichen mit drei Argumenten, welches in $\mathfrak{A}(x, y)$ vorkommt. Da in den Argumentstellen nur die Variablen x und y stehen, so zerlegt sich der in Betracht kommende Wertverlauf von G in denjenigen

$$\text{von } G(x, x, y), \quad \text{von } G(x, y, x) \quad \text{und} \quad \text{von } G(y, x, x).$$

Dies sind drei Funktionen zweier Argumente, welche lediglich der Bedingung unterliegen, daß sie beim Einsetzen von x für y alle drei dieselbe Funktion von x liefern. Somit können wir für $G(x, x, y)$ eine ganz beliebige Funktion zweier Argumente $G(x, y)$ nehmen. Die beiden andern Funktionen von x und y müssen bei der Ersetzung von y durch x in je eine mit $G(x, x)$ wahrheitsgleiche Funktion von x übergehen; sonst aber sind sie auch ganz beliebig.

Nun erhält man eine Funktion dieser Art auf folgende Weise: Ist $F(x, y)$ eine beliebige Funktion, so ist

$$(F(x, y) \mathbin{\&} F(y, x)) \vee (\overline{F}(x, y) \mathbin{\&} \overline{F}(y, x))$$

für ein Individuenpaar x, y dann und nur dann richtig, wenn $F(x, y)$ mit $F(y, x)$ wahrheitsgleich ist. Schreiben wir für diesen Ausdruck zur Abkürzung $\mathfrak{C}(x, y)$, so ist $\mathfrak{C}(x, x)$ stets richtig, wie auch die Funktion $F(x, y)$ gewählt wird.

Ferner können wir eine spezielle Funktion $F_0(x, y)$ so wählen, daß für zwei verschiedene Individuen x, y die Aussagen

$$F_0(x, y) \quad \text{und} \quad F_0(y, x)$$

in der Beziehung des ausschließenden „oder" („aut — aut") stehen, so daß $\mathfrak{C}(x, y)$ beim Einsetzen von F_0 für F falsch wird, außer wenn x dasselbe Individuum ist wie y.

Bilden wir nun den Ausdruck

$$(\overline{\mathfrak{C}}(x, y) \vee G(x, y)) \mathbin{\&} (\mathfrak{C}(x, y) \vee H(x, y))$$

[10]) Man könnte denken, daß hierzu der in der Einleitung erwähnte Satz von Löwenheim anzuwenden wäre, wonach jedes Problem der Allgemeingültigkeit (bzw. der Erfüllbarkeit) sich auf ein solches zurückführen läßt, bei dem nur Relationen mit *zwei Argumenten* auftreten. Diese Reduktion können wir jedoch hier nicht verwerten, weil durch sie die Zahl der in der logischen Formel voranstehenden Zeichen vermehrt wird, — während für unsern Zweck ein Verfahren erfordert wird, das den Typus der Formel ungeändert läßt.

— worin F und H als willkürliche Funktionen auftreten, während $G(x, y)$ die eben betrachtete Funktion ist —, so geht dieser beim Einsetzen von x für y über in

$$(\overline{\mathfrak{C}}(x, x) \vee G(x, x)) \,\&\, (\mathfrak{C}(x, x) \vee H(x, x)),$$

was mit $G(x, x)$ wahrheitsgleich ist, da $\mathfrak{C}(x, x)$ immer richtig ist. Im übrigen aber ist sein Wertverlauf ganz beliebig; denn setzen wir für F die Funktion F_0 ein, so wird für jedes Paar von verschiedenen Individuen x, y die Aussage $\mathfrak{C}(x, y)$ falsch, mithin wird

$$(\overline{\mathfrak{C}}(x, y) \vee G(x, y)) \,\&\, (\mathfrak{C}(x, y) \vee H(x, y))$$

wahrheitsgleich mit $H(x, y)$; und $H(x, y)$ ist ja ganz willkürlich.

Es können also in der Tat bei der Untersuchung der Allgemeingültigkeit einer Formel mit zwei voranstehenden Zeichen die Funktionszeichen mit drei Argumenten ausgeschaltet werden. Und nach demselben Verfahren gelingt es auch für die Funktionszeichen mit noch mehr Argumenten.

Wir brauchen somit bei der Untersuchung der vier Formeltypen

$$(x)(y)\,\mathfrak{A}(x,y), \quad (Ex)(Ey)\,\mathfrak{A}(x,y), \quad (x)(Ey)\,\mathfrak{A}(x,y), \quad (Ex)(y)\,\mathfrak{A}(x,y)$$

nur den Fall in Betracht zu ziehen, daß in $\mathfrak{A}(x, y)$ ausschließlich Funktionszeichen mit *zwei* Argumenten vorkommen.

Es seien $F, G, \ldots, S$ diese Funktionszeichen; ihre Anzahl sei n. Der Ausdruck $\mathfrak{A}(x, y)$ setzt sich nach Art einer Aussagen-Verknüpfung zusammen aus den $4n$ „*Komponenten*"

$$\begin{array}{llll} F(x, x), & F(y, y), & F(x, y), & F(y, x), \\ G(x, x), & G(y, y), & G(x, y), & G(y, x), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S(x, x), & S(y, y), & S(x, y), & S(y, x), \end{array}$$

die allerdings nicht sämtlich vorzukommen brauchen.

Wir sind nun zunächst einmal in der Lage, die Frage der Allgemeingültigkeit für die drei ersten Formeltypen direkt durch Zurückführung auf das Entscheidungsverfahren des Aussagenkalkuls zu erledigen.

Die Allgemeingültigkeit von

$$(x)(y)\,\mathfrak{A}(x, y)$$

besagt, daß bei beliebiger Wahl von Funktionen

$$F, G, \ldots, S$$

die Aussage $\mathfrak{A}(x, y)$ für jedes Individuenpaar x, y richtig wird.

Sind aber x, y zwei verschiedene Individuen, so können wegen der Willkürlichkeit der Funktionen $F, G, \ldots, S$ die Werte „wahr" und „falsch" ganz beliebig auf die $4n$ Komponenten verteilt werden. Ersetzen wir daher in $\mathfrak{A}(x, y)$ die Komponenten durch $4n$ unabhängige Aussagenvariablen, so muß, damit $(x)(y)\mathfrak{A}(x, y)$ allgemeingültig ist, die entstehende Aussagenformel ebenfalls allgemeingültig sein. Andererseits ist diese Bedingung auch hinreichend; denn jeder spezielle Wert von $\mathfrak{A}(x, y)$ geht ja aus jener Aussagenformel durch eine Einsetzung hervor.

Somit ist die Allgemeingültigkeit von $(x)(y)\mathfrak{A}(x, y)$ gleichbedeutend mit derjenigen der Aussagenformel, die man aus $\mathfrak{A}(x, y)$ erhält, indem man die Komponenten durch unabhängige Aussagenvariablen ersetzt.

Betrachten wir nun gemeinsam die beiden Formeltypen

$$(Ex)(Ey)\mathfrak{A}(x, y) \quad \text{und} \quad (x)(Ey)\mathfrak{A}(x, y).$$

Die erste der beiden Formeln stellt (bei jeder Einsetzung spezieller Funktionen für $F, \ldots, S$) eine schwächere Aussage dar als die zweite und diese wiederum eine schwächere Aussage als $(x)\mathfrak{A}(x, x)$. Finden wir daher eine Bedingung, welche für die Allgemeingültigkeit der ersten Formel notwendig, für die der dritten hinreichend ist, so ist diese für alle drei Formeln notwendig und hinreichend.

Eine solche Bedingung können wir aber leicht angeben. Damit nämlich die Formel

$$(Ex)(Ey)\mathfrak{A}(x, y)$$

allgemeingültig ist, muß sie insbesondere für alle diejenigen Funktionen

$$F, G, \ldots, S$$

richtige Aussagen liefern, deren Werte unabhängig sind von der Wahl der Individuen x, y. (Z. B. stellt

$$R(x, y) \vee \overline{R}(x, y)$$

eine immer richtige,

$$R(x, y) \mathbin{\&} \overline{R}(x, y)$$

eine immer falsche Relation dar, wenn für $R(x, y)$ irgendeine Relation gesetzt wird.)

Beim Einsetzen solcher Funktionen für $F, G, \ldots, S$ kann für jede einzelne der (von den Argumentwerten unabhängige) Wahrheitswert beliebig gewählt werden. Somit müssen wir eine allgemeingültige Aussagenformel erhalten, wenn wir in $\mathfrak{A}(x, y)$ je vier Komponenten, die zu demselben Funktionszeichen gehören, durch eine und dieselbe Aussagenvariable ersetzen, so daß an Stelle der $4n$ Komponenten nun n unabhängige Aussagenvariablen treten.

Ist andrerseits diese Bedingung erfüllt, so wird für jedes Individuum x und für jede Wahl von Funktionen

$$F, G, \ldots, S$$

die Aussage $\mathfrak{A}(x, x)$ richtig sein, d. h. die Formel

$$(x)\,\mathfrak{A}(x, x)$$

ist dann allgemeingültig.

Das gemeinsame Kriterium für die Allgemeingültigkeit einer Formel

$$(Ex)\,(Ey)\,\mathfrak{A}(x, y)$$

und der entsprechenden Formel

$$(x)(Ey)\,\mathfrak{A}(x, y)$$

besteht also in der Allgemeingültigkeit derjenigen Aussagenformel, die man aus $\mathfrak{A}(x, y)$ erhält, indem man die zu demselben Funktionszeichen gehörigen Komponenten jeweils durch eine und dieselbe Aussagenvariable ersetzt.

Was die *Anzahlbedingungen* für den Individuenbereich betrifft, so ergibt sich aus unserer Betrachtung sofort, daß eine Formel

$$(x)(y)\,\mathfrak{A}(x, y)$$

für jeden Individuenbereich allgemeingültig ist, falls sie für einen solchen mit *mindestens zwei* Individuen allgemeingültig ist, und daß bei den Formeln

$$(Ex)\,(Ey)\,\mathfrak{A}(x, y) \quad \text{und} \quad (x)(Ey)\,\mathfrak{A}(x, y)$$

die Anzahl der Individuen überhaupt nichts für die Allgemeingültigkeit ausmacht.

Das Entscheidungsverfahren für die Formeln

$$(x)(y)\,\mathfrak{A}(x, y), \quad (Ex)(Ey)\,\mathfrak{A}(x, y), \quad (x)(Ey)\,\mathfrak{A}(x, y)$$

läßt sich in entsprechender Weise auf alle die Formeln mit *mehreren voranstehenden Zeichen* ausdehnen, bei welchen jedes vorkommende Allzeichen jedem vorkommenden Seinszeichen vorausgeht.

Betrachten wir z. B. Formeln vom Typus

$$(x)(y)(z)(Eu)(Ev)\,\mathfrak{A}(x, y, z, u, v).$$

Damit eine solche Formel allgemeingültig ist für einen Individuenbereich, der mindestens drei Dinge

$$a,\ b,\ c$$

enthält, muß sie insbesondere für alle solche Funktionen richtige Aussagen liefern, deren Werte ungeändert bleiben, wenn jeder (evtl.) von a, b, c verschiedene Argumentwert durch a ersetzt wird. Also muß die 9-gliedrige Disjunktion

$$\mathfrak{A}(a, b, c, a, a) \vee \mathfrak{A}(a, b, c, a, b) \vee \mathfrak{A}(a, b, c, a, c) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(a, b, c, c, c)$$

für alle jene Funktionen eine richtige Aussage darstellen, d. h. sie muß als Aussagenverknüpfung, gebildet aus den verschiedenen Komponenten, welche sich durch die möglichen Verteilungen der Werte a, b, c auf die Argumentstellen der vorkommenden Funktionszeichen ergeben, allgemeingültig sein in dem Sinne, daß jene Komponenten durch unabhängige Aussagenvariablen zu ersetzen sind.

Diese Bedingung ist aber offenbar auch hinreichend für die Allgemeingültigkeit der Ausgangsformel, und zwar bei einem beliebigen Individuenbereich.

Mit diesem Kriterium erhalten wir zugleich folgende Resultate: Eine Formel

$$(x)(y)(z)(Eu)(Ev)\mathfrak{A}(x, y, z, u, v)$$

ist dann und nur dann allgemeingültig für jeden Individuenbereich, wenn sie für einen Bereich von mindestens drei Individuen allgemeingültig ist; ihre Allgemeingültigkeit fällt zusammen mit derjenigen der Formel

$$(x)(y)(z)\{\mathfrak{A}(x, y, z, x, x) \vee \mathfrak{A}(x, y, z, x, y) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(x, y, z, z, z)\}. \quad —$$

Von den vier möglichen Formeltypen mit zwei voranstehenden Zeichen haben sich die drei ersten in Hinsicht auf unser Problem als trivial erwiesen. Es bleibt jetzt der vierte Formeltypus zu behandeln.

Hier sei noch darauf hingewiesen, daß bei der Frage der *Erfüllbarkeit* der nicht triviale von den vier Typen der zu dem vierten *duale,* also

$$(x)(Ey)\mathfrak{A}(x, y)$$

ist.

§ 4.

Die Behandlung der Formeln $(Ex)(y)\mathfrak{A}(x, y)$.

Wir haben nunmehr den Hauptfall unseres Problems zu betrachten: Vorgelegt ist eine Formel vom Typus

$$(Ex)(y)\mathfrak{A}(x, y),$$

wobei $\mathfrak{A}(x, y)$ aus den $4\,n$ Komponenten

$$\begin{matrix} F(x,x), & F(y,y), & F(x,y), & F(y,x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S(x,x), & S(y,y), & S(x,y), & S(y,x) \end{matrix}$$

in der Form einer Aussagenverknüpfung zusammengesetzt ist. Es handelt sich darum, zu entscheiden, ob diese Formel allgemeingültig ist, bzw. für welche Individuenbereiche sie allgemeingültig ist.

Wir diskutieren zunächst die Bedingungen der Allgemeingültigkeit für einen Individuenbereich mit einer festen endlichen Anzahl m von Individuen. Seien

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

diese Individuen; dann muß die Disjunktion

$$\mathfrak{A}(a_1, a_2) \vee \mathfrak{A}(a_2, a_3) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(a_{m-1}, a_m) \vee \mathfrak{A}(a_m, a_1)$$

für jede Wahl der Funktionen

$$F, G, \ldots, S$$

richtig sein. Denn es soll ja

$$(Ex)(y)\,\mathfrak{A}(x, y)$$

immer richtig sein, d. h. wie auch die Funktionen $F, \ldots, S$ gewählt werden, so soll es ein Individuum geben, welches, in $\mathfrak{A}(x, y)$ für x eingesetzt, bei beliebigem y die Formel $\mathfrak{A}(x, y)$ zu einer richtigen Aussage macht. Daher muß in der obigen Disjunktion jedenfalls ein Glied und mithin auch die Disjunktion selbst eine richtige Aussage sein.

Nun gilt ferner, wie wir im § 1 zeigten, daß eine Formel, die für einen Bereich von m Individuen allgemeingültig ist, auch für jeden kleineren Individuenbereich, insbesondere also auch für jeden Teilbereich diese Eigenschaft besitzt. Demnach muß jede Disjunktion von der Form

$$\mathfrak{A}(b_1, b_2) \vee \mathfrak{A}(b_2, b_3) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(b_r, b_1),$$

worin $r \leqq m$ ist und $b_1, \ldots, b_r$ irgendwelche r verschiedenen unter den Individuen $a_1, \ldots, a_m$ bedeuten, bei beliebiger Wahl der Funktionen $F, G, \ldots, S$ eine richtige Aussage ergeben.

Wir wollen eine solche Disjunktion eine r-gliedrige *„zyklische Disjunktion"* nennen, und die Bedingung, daß diese Disjunktion für beliebige Funktionen $F, G, \ldots, S$ eine richtige Aussage darstellt, werde kurz als die *„Bedingung B_r"* bezeichnet[11]).

Die Erfüllung der Bedingungen

$$B_1, B_2, \ldots, B_m$$

erweist sich somit als notwendig für die Allgemeingültigkeit der Formel $(Ex)(y)\,\mathfrak{A}(x, y)$ bei einem m-zahligen Individuenbereich. Sie ist aber zugleich auch *hinreichend* für diese Allgemeingültigkeit. Denn ersetzt man in der Formel $(Ex)(y)\,\mathfrak{A}(x, y)$ die Operation (Ex) durch eine Disjunktion, (y) durch eine Konjunktion, erstreckt über die Individuen $a_1, \ldots, a_m$, und stellt durch distributives Ausmultiplizieren eine konjunktive Normalform her, so sind die Glieder der entstehenden Konjunktion von der Form

$$\mathfrak{A}(a_1, c_1) \vee \mathfrak{A}(a_2, c_2) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(a_m, c_m),$$

wobei mit c_α je eines der Individuen

$$a_1, \ldots, a_m$$

[11]) Die Bedingung B_r hängt offenbar nicht von der Wahl der Individuen $b_1, \ldots, b_r$ ab.

bezeichnet ist, ohne daß jedoch

$$c_1, \ldots, c_m$$

alle voneinander verschieden zu sein brauchen.

Jede solche Disjunktion enthält aber, wie man leicht sieht[12]), als Teil-Disjunktion eine zyklische Disjunktion von höchstens m Gliedern. Sind daher die Bedingungen $B_1, \ldots, B_m$ erfüllt, so muß jede der Disjunktionen

$$\mathfrak{A}(a_1, c_1) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(a_m, c_m)$$

bei beliebiger Wahl der Funktionen $F, \ldots, S$ eine richtige Aussage darstellen, und dasselbe muß daher von der ganzen konjunktiven Normalform gelten, welche wir als die Entwicklung von

$$(E x)(y)\,\mathfrak{A}(x, y)$$

für den Bereich der Individuen $a_1, \ldots, a_m$ erhalten haben.

Es sind also in der Tat die Bedingungen $B_1, \ldots, B_m$ notwendig und hinreichend für die Allgemeingültigkeit unserer betrachteten Formel bei einem m-zahligen Individuenbereich.

Diese Bedingungen sind nun keineswegs voneinander unabhängig. Insbesondere folgt aus der Erfüllung von B_{2k} die Erfüllung von B_k. Denn B_{2k} verlangt, daß für beliebige Funktionen

$$F, G, \ldots, S$$

---

[12]) Dies läßt sich z. B. so zeigen: Wird die Funktion $\varphi(k)$ für $k = 1, \ldots, m$ durch die Gleichung

$$a_{\varphi(k)} = c_k$$

und $\psi(n)$ für positive ganze n durch die Rekursion

$$\psi(1) = 1, \qquad \psi(n+1) = \varphi(\psi(n))$$

definiert, so ist

$$a_{\psi(n+1)} = c_{\psi(n)},$$

mithin ist für jedes positive ganze p

$$\mathfrak{A}(a_{\psi(p)}, a_{\psi(p+1)}) \vee \mathfrak{A}(a_{\psi(p+1)}, a_{\psi(p+2)}) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(a_{\psi(p+r-1)}, a_{\psi(p+r)})$$

eine Teil-Disjunktion von

$$\mathfrak{A}(a_1, c_1) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(a_m, c_m),$$

und zwar eine zyklische, sofern

$$\psi(p), \psi(p+1), \ldots, \psi(p+r-1)$$

alle voneinander verschieden sind, dagegen

$$\psi(p+r) = \psi(p)$$

ist. Diese Voraussetzung läßt sich aber mit einem $r \leqq m$ erfüllen, da jeder Wert von $\psi(n)$ gleich einer der Zahlen

$$1, 2, \ldots, m$$

ist, und daher unter den Zahlwerten

$$\psi(1), \psi(2), \ldots, \psi(m+1)$$

jedenfalls zwei gleiche vorkommen müssen.

die Formel

$$\mathfrak{A}(b_1, b_2) \vee \mathfrak{A}(b_2, b_3) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(b_{2k}, b_1)$$

eine richtige Aussage darstellt. Wählen wir insbesondere solche Funktionen, deren Wertverlauf ungeändert bleibt, wenn der Argumentwert b_{k+1} stets durch b_1, ebenso b_{k+2} stets durch $b_2, \ldots, b_{2k}$ stets durch b_k ersetzt wird, so ergibt sich, daß für diese Funktionen die Formel

$$\mathfrak{A}(b_1, b_2) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(b_k, b_1)$$

immer eine richtige Aussage liefert. Da aber die zugelassenen Funktionen in ihrer Abhängigkeit von

$$b_1, \ldots, b_k$$

noch ganz beliebig sind, so muß die Bedingung B_k erfüllt sein.

Setzen wir speziell $k = 1$ und $k = 2$, so finden wir, daß die Bedingungen B_1 und B_2 in B_4 enthalten sind, daß also im Falle $m \geqq 4$ bereits

$$B_3, B_4, \ldots, B_m$$

zusammen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Allgemeingültigkeit der Formel

$$(Ex)(y)\mathfrak{A}(x, y)$$

bei m Individuen darstellen.

Wir wollen nun die Form der Bedingung B_r für $r \geqq 3$ genauer in Betracht ziehen.

Gemäß dem im § 2 erwähnten Satz über die ausgezeichnete konjunktive Normalform können wir zunächst die Formel $\mathfrak{A}(x, y)$ durch diejenige aus den $4n$ Komponenten

$$\begin{array}{cccc} F(x, x), & F(y, y), & F(x, y), & F(y, x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S(x, x), & S(y, y), & S(x, y), & S(y, x) \end{array}$$

gebildete ausgezeichnete konjunktive Normalform

$$\mathfrak{N}(x, y)$$

ersetzen, welche in Hinsicht auf die Verknüpfung der $4n$ Komponenten mit $\mathfrak{A}(x, y)$ wahrheitsgleich ist[13]). Die Bedingung B_r lautet hiernach: Es muß die Disjunktion

$$\mathfrak{N}(b_1, b_2) \vee \mathfrak{N}(b_2, b_3) \vee \ldots \vee \mathfrak{N}(b_r, b_1)$$

für jede Wahl der Funktionen $F, G, \ldots, S$ eine richtige Aussage ergeben.

[13]) Im Falle, daß $\mathfrak{A}(x, y)$ bereits als Aussagenverknüpfung allgemeingültig ist, wird die Normalform $\mathfrak{N}(x, y)$ 0-gliedrig, und die Bedingung B_r ist dann in trivialer Weise erfüllt.

Die Glieder dieser Disjunktion

$$\mathfrak{R}(b_1, b_2),\ \mathfrak{R}(b_2, b_3),\ \ldots,\ \mathfrak{R}(b_r, b_1)$$

setzen sich wiederum aus Komponenten zusammen; und zwar gehören hier zu jedem Funktionszeichen $3r$ Komponenten. Z. B. gehören zu F die Komponenten

$$\begin{array}{lll} F(b_1, b_1), & F(b_1, b_2), & F(b_2, b_1), \\ F(b_2, b_2), & F(b_2, b_3), & F(b_3, b_2), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F(b_r, b_r), & F(b_r, b_1), & F(b_1, b_r). \end{array}$$

Die möglichen Werte dieser $3r$ Komponenten bei Einsetzung einer bestimmten Funktion für F sind, da $r \geqq 3$ ist, voneinander ganz unabhängig. Ferner sind die Werte von Komponenten, die zu verschiedenen Funktionszeichen gehören, gewiß auch voneinander unabhängig.

Die Bedingung B_r ist somit gleichbedeutend mit der Allgemeingültigkeit derjenigen Aussagenformel, welche man erhält, indem man in der Disjunktion

$$\mathfrak{R}(b_1, b_2) \vee \mathfrak{R}(b_2, b_3) \vee \ldots \vee \mathfrak{R}(b_r, b_1)$$

die $3r \cdot n$ Komponenten durch ebenso viele unabhängige Aussagenvariablen ersetzt.

Führen wir dies nun aus, d. h. ersetzen wir

$$F(b_k, b_k),\ G(b_k, b_k),\ \ldots,\ S(b_k, b_k)$$

bezüglich durch

$$X_k, Y_k, \ldots, U_k \qquad (\text{für } k = 1, \ldots, r)$$

und

$$F(b_k, b_l),\ G(b_k, b_l),\ \ldots,\ S(b_k, b_l)$$

durch

$$X_{kl}, Y_{kl}, \ldots, U_{kl} \quad (\text{für } k, l = 1, \ldots, r;\ k \neq l),$$

so erhalten wir an Stelle von

$$\mathfrak{R}(b_1, b_2),\ \mathfrak{R}(b_2, b_3),\ \ldots,\ \mathfrak{R}(b_r, b_1)$$

bezüglich die Aussagenformeln

$$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_r,$$

welche sich voneinander nur durch die Indizes der vorkommenden Aussagenvariablen unterscheiden.

$\mathfrak{R}_1$ ist eine aus den Variablen

$$X_1, Y_1, \ldots, U_1, \quad X_2, Y_2, \ldots, U_2, \quad X_{12}, Y_{12}, \ldots, U_{12}, \quad X_{21}, Y_{21}, \ldots, U_{21}$$

gebildete ausgezeichnete konjunktive Normalform, und ganz entsprechend sind

$$\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \ldots, \mathfrak{R}_r$$

gebildet.

Die Bedingung B_r stellt sich jetzt dar durch die Allgemeingültigkeit der Formel

$$\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{N}_r.$$

Entwickeln wir diese durch distributives Ausmultiplizieren in eine konjunktive Normalform[14]), so hat jedes Konjunktionsglied (jeder „Summand") dieser Normalform die Gestalt

$$\mathfrak{S}_1 \vee \mathfrak{S}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{S}_r,$$

wobei $\mathfrak{S}_1$ ein Summand von $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{S}_2$ ein Summand von $\mathfrak{N}_2, \ldots,$ $\mathfrak{S}_r$ ein Summand von $\mathfrak{N}_r$ ist. Und das Kriterium für die Allgemeingültigkeit einer Aussagenformel, wie es im § 2 angegeben wurde, besagt demnach in der Anwendung auf die Formel

$$\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{N}_r,$$

daß in jeder solchen Disjunktion

$$\mathfrak{S}_1 \vee \mathfrak{S}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{S}_r$$

mindestens eine Aussagenvariable einmal ohne Negation und einmal mit Negation vorkommen muß.

Nun erkennen wir aber sofort, daß für eine der Aussagenvariablen mit zwei Indizes

$$X_{kl}, Y_{kl}, \ldots, U_{kl} \qquad (k \neq l)$$

der Fall ausgeschlossen ist, daß sie in einer Disjunktion

$$\mathfrak{S}_1 \vee \mathfrak{S}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{S}_r$$

sowohl ohne Negation wie mit Negation auftritt. Denn eine solche Variable kommt überhaupt nur in einer von den Normalformen $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_r$ vor, und in dieser, welche ja eine ausgezeichnete Normalform ist, tritt sie in jedem Summanden entweder nur ohne Negation oder nur mit Negation auf.

Demnach sind diese Aussagenvariablen

$$X_{kl}, Y_{kl}, \ldots, U_{kl}$$

ohne Einfluß auf die Allgemeingültigkeit der Formel

$$\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{N}_r,$$

d. h. es ändert sich in Hinsicht auf die Erfüllung der Bedingung B_r nichts, wenn wir in den Summanden der Normalformen $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_r$ überall diese Variablen (bzw. ihre Negationen) wegstreichen.

Vergegenwärtigen wir uns, daß bei der Bildung der Formeln $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_r$ aus $\mathfrak{N}(x, y)$ die Variablen

$$X_{kl}, Y_{kl}, \ldots, U_{kl}$$

---

[14]) Diese ist keine ausgezeichnete Normalform.

den Komponenten

$$F(x, y),\ F(y, x),\ G(x, y),\ G(y, x),\ \ldots,\ S(x, y),\ S(y, x)$$

zugeordnet sind, so gelangen wir zu folgendem Ergebnis: Für die Erfüllung der Bedingung B_r macht es keinen Unterschied, wenn wir in den Konjunktionsgliedern von $\mathfrak{N}(x, y)$ überall die Komponenten

$$F(x, y),\ F(y, x),\ \ldots,\ S(x, y),\ S(y, x)$$

(bzw. ihre Negationen) streichen, also nur die Komponenten

$$F(x, x),\ F(y, y),\ G(x, x),\ G(y, y),\ \ldots,\ S(x, x),\ S(y, y)$$

beibehalten.

Dies gilt nun für jede der Bedingungen B_3, B_4, $\ldots$, B_m. Diese bilden aber, falls $m \geqq 4$ ist, in ihrer Gesamtheit die notwendige und hinreichende Bedingung für die Allgemeingültigkeit der Formel

$$(Ex)(y)\,\mathfrak{A}(x, y)$$

bei m Individuen. Es folgt demnach, daß für einen m-zahligen Individuenbereich, falls $m \geqq 4$ ist, unsere betrachtete Formel dann und nur dann allgemeingültig ist, wenn auch diejenige Formel

$$(Ex)(y)\,\mathfrak{N}'(x, y)$$

es ist, bei der $\mathfrak{N}'(x, y)$ aus der zu $\mathfrak{A}(x, y)$ gehörigen ausgezeichneten konjunktiven Normalform $\mathfrak{N}(x, y)$ durch Wegstreichen der Komponenten

$$F(x, y),\ F(y, x),\ G(x, y),\ G(y, x),\ \ldots,\ S(x, y),\ S(y, x)$$

und Weglassen aller dadurch eventuell auftretenden Wiederholungen von Summanden gebildet ist.

In dieser Formel

$$(Ex)(y)\,\mathfrak{N}'(x, y)$$

kommt der Relationscharakter der Funktionen $F, G, \ldots, S$ gar nicht zur Geltung, vielmehr ist sie eine reine *Prädikatenformel*, gebildet aus den n Prädikaten

$$F(x, x),\ G(x, x),\ \ldots,\ S(x, x).$$

Auf diese Weise wird unser Problem der Allgemeingültigkeit auf eines von denjenigen zurückgeführt, die wir im § 2 behandelt haben. Dadurch werden wir zugleich frei von der Beschränkung auf eine bestimmte endliche Individuenzahl. Denn indem wir das Endergebnis des § 2 verwerten, gewinnen wir folgendes Resultat:

Die Formel

$$(Ex)(y)\,\mathfrak{A}(x, y)$$

ist allgemeingültig für jeden Individuenbereich, falls sie allgemeingültig ist für einen Bereich, dessen Individuenzahl $\geqq 4$ *und* $\geqq 2^n$ *ist.*

Mit diesen Feststellungen ist die Frage der Allgemeingültigkeit für die Formeln

$$(Ex)(y)\mathfrak{A}(x, y)$$

grundsätzlich erledigt. Wir wollen aber noch die erhaltene Bedingung für die Allgemeingültigkeit (bei einem Bereich von mindestens 4 Individuen) auf eine explizite Form bringen. Als notwendig und hinreichend dafür, daß $(Ex)(y)\mathfrak{A}(x, y)$ für einen Bereich von m Individuen $(m \geqq 4)$ allgemeingültig ist, haben wir erkannt, daß die Formel

$$(Ex)(y)\mathfrak{N}'(x, y)$$

für diesen Bereich allgemeingültig ist, und dies wiederum ist gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{N}'(x, y)$ die Bedingungen

$$B_1, B_2, \ldots, B_m$$

erfüllt. Die Bedingung B_r besagt in Anwendung auf $\mathfrak{N}'(x, y)$, daß diejenige Aussagenformel

$$\mathfrak{N}_1' \vee \mathfrak{N}_2' \vee \ldots \vee \mathfrak{N}_r'$$

allgemeingültig ist, welche aus

$$\mathfrak{N}'(b_1, b_2) \vee \mathfrak{N}'(b_2, b_3) \vee \ldots \vee \mathfrak{N}'(b_r, b_1)$$

entsteht, indem an Stelle von

$$F(b_k, b_k),\ G(b_k, b_k),\ \ldots,\ S(b_k, b_k)$$

bezüglich die Aussagen-Variablen

$$X_k, Y_k, \ldots, U_k$$

gesetzt werden $(k = 1, \ldots, r)$. Und zwar brauchen wir hier B_1 und B_2 nicht mehr auszunehmen.

Um nun eine übersichtliche Schreibweise zu gewinnen, führen wir zunächst für die 2^n verschiedenen n-gliedrigen Disjunktionen, welche als erstes Glied $F(x, x)$ bzw. $\overline{F}(x, x)$, als zweites Glied $G(x, x)$ bzw. $\overline{G}(x, x), \ldots$, als n-tes Glied $S(x, x)$ bzw. $\overline{S}(x, x)$ haben, eine Numerierung ein und bezeichnen sie in dieser Reihenfolge mit

$$\mathfrak{P}_1(x),\ \mathfrak{P}_2(x),\ \ldots,\ \mathfrak{P}_{2^n}(x).$$

Die ausgezeichnete Normalform $\mathfrak{N}'(x, y)$ setzt sich konjunktiv zusammen aus Gliedern von der Form

$$\mathfrak{P}_\alpha(x) \vee \mathfrak{P}_\beta(y) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2^n),$$

und wir stellen sie symbolisch dar in der Form

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{2^n} C_{\alpha\beta}(\mathfrak{P}_\alpha(x) \vee \mathfrak{P}_\beta(y)),$$

wobei das Summenzeichen für die Konjunktion steht und der Koeffizient $C_{\alpha\beta}$ gleich 1 oder 0 zu setzen ist, je nachdem in $\mathfrak{R}'(x, y)$ das Glied $\mathfrak{P}_\alpha(x) \vee \mathfrak{P}_\beta(y)$ vorkommt oder fehlt.

Diese Darstellungsweise ist so beschaffen, daß beim distributiven Entwickeln von Disjunktionen die gewöhnlichen Rechenregeln der Algebra anwendbar sind.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, diejenigen Koeffizientensysteme $C_{\alpha\beta}$ zu bestimmen, für welche die Formel

$$(Ex)(y)\,\mathfrak{R}'(x, y)$$

bei einem m-zahligen Individuenbereich allgemeingültig ist. Dazu müssen wir die Bedingungen

$$B_1, \ldots, B_m$$

als Gleichungen für die $C_{\alpha\beta}$ ausdrücken.

Die Bedingung B_r verlangt, daß die Aussagenformel

$$\mathfrak{R}_1' \vee \ldots \vee \mathfrak{R}_r'$$

allgemeingültig ist. $\mathfrak{R}_k'$ wird aus $\mathfrak{R}'(x, y)$ erhalten, indem

$$F(x, x),\ G(x, x),\ \ldots,\ S(x, x)$$

bezüglich durch

$$X_k,\ Y_k,\ \ldots,\ U_k$$

und

$$F(y, y),\ G(y, y),\ \ldots,\ S(y, y)$$

durch

$$X_{k+1},\ Y_{k+1},\ \ldots,\ U_{k+1} \quad \text{für } k \neq r$$

bzw. durch

$$X_1,\ Y_1,\ \ldots,\ U_1 \quad \text{für } k = r$$

ersetzt werden.

Bei diesen Ersetzungen geht — so wählen wir die Bezeichnung —

$$\mathfrak{P}_\alpha(x) \text{ in } \mathfrak{P}_\alpha^{(k)}$$

und

$$\mathfrak{P}_\alpha(y) \text{ in } \mathfrak{P}_\alpha^{(k+1)} \quad \text{für } k \neq r$$

$$\text{bzw. in } \mathfrak{P}_\alpha^{(1)} \quad \text{für } k = r$$

über. Und die distributive Entwicklung von

$$\mathfrak{R}_1' \vee \ldots \vee \mathfrak{R}_r'$$

liefert auf Grund unserer symbolischen Darstellung den Ausdruck

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \mu, \nu = 1}^{2^n} C_{\alpha\beta} \cdot C_{\gamma\delta} \ldots C_{\mu\nu}\, \mathfrak{P}_\alpha^{(1)} \vee \mathfrak{P}_\beta^{(2)} \vee \mathfrak{P}_\gamma^{(2)} \vee \mathfrak{P}_\delta^{(3)} \vee \ldots \vee \mathfrak{P}_\mu^{(r)} \vee \mathfrak{P}_\nu^{(1)}.$$

Damit diese Aussagenformel allgemeingültig ist, dürfen nur diejenigen Koeffizienten

$$C_{\alpha\beta}\cdot C_{\gamma\delta}\ldots C_{\mu\nu}$$

von 0 verschieden sein, für welche die zugehörige Disjunktion

$$\mathfrak{P}_\alpha^{(1)}\vee\mathfrak{P}_\beta^{(2)}\vee\mathfrak{P}_\gamma^{(2)}\vee\mathfrak{P}_\delta^{(3)}\vee\ldots\vee\mathfrak{P}_\mu^{(r)}\vee\mathfrak{P}_\nu^{(1)}$$

die Eigenschaft hat, daß in ihr mindestens eine Aussagen-Variable sowohl ohne Negation wie mit Negation als Glied auftritt. Dies ist aber, wie man sich leicht überlegt, dann und nur dann der Fall, wenn unter den $\mathfrak{P}$-Faktoren *zwei mit demselben oberen, aber verschiedenem unteren Index vorkommen*, d. h. wenn von den unteren Indizes

$$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots,\mu,\nu$$

entweder der zweite verschieden von dem dritten oder der vierte verschieden von dem fünften ..., oder der $2r$-te verschieden von dem ersten ist. Für alle anderen Indexsysteme muß also der zugehörige Koeffizient gleich 0 sein.

Diese Bedingung gilt nun für

$$r=1,2,\ldots,m$$

und liefert folgende für die Allgemeingültigkeit von $(Ex)(y)\,\mathfrak{N}'(x,y)$ notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{lll}
(1) & C_{\alpha\alpha}=0 & (\alpha=1,\ldots,2^n),\\
(2) & C_{\alpha\beta}\cdot C_{\beta\alpha}=0 & (\alpha,\beta=1,\ldots,2^n),\\
(3) & C_{\alpha\beta}\cdot C_{\beta\gamma}\cdot C_{\gamma\alpha}=0 & (\alpha,\beta,\gamma=1,\ldots,2^n),\\
\vdots & \vdots & \\
(m) & C_{\alpha\beta}\cdot C_{\beta\gamma}\cdot\ldots\cdot C_{\mu\nu}\cdot C_{\nu\alpha}=0 & (\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\mu,\nu=1,\ldots,2^n).
\end{array}$$

Hierbei genügt es, die Werte der Indizes

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots$$

alle voneinander verschieden zu nehmen, da sonst die betreffende Gleichung sich bereits aus den vorhergehenden Gleichungen ergibt.

Somit erhalten wir nun folgendes Entscheidungsverfahren: Ist eine Formel

$$(Ex)(y)\,\mathfrak{A}(x,y)$$

vorgelegt, bei der $\mathfrak{A}(x,y)$ in der Form einer Aussagen-Verknüpfung aus den $4n$ Komponenten

$$\begin{array}{cccc}
F(x,x), & F(y,y), & F(x,y), & F(y,x)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
S(x,x), & S(y,y), & S(x,y), & S(y,x)
\end{array}$$

zusammengesetzt ist, so ersetzen wir zunächst $\mathfrak{A}(x, y)$ durch die zugehörige (aus den $4n$ Komponenten gebildete) ausgezeichnete konjunktive Normalform $\mathfrak{N}(x, y)$ — (welche im Falle, wo $\mathfrak{A}(x, y)$ schon als Aussagenformel allgemeingültig ist, überhaupt kein Glied enthält). Von $\mathfrak{N}(x, y)$ gehen wir durch Streichen der Komponenten

$$F(x, y), F(y, x), \ldots, S(x, y), S(y, x)$$

und Weglassen der dadurch evtl. entstehenden Wiederholungen von Konjunktionsgliedern zu der Normalform $\mathfrak{N}'(x, y)$ über und schreiben diese symbolisch in der Form

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{2^n} C_{\alpha\beta}(\mathfrak{P}_\alpha(x) \vee \mathfrak{P}_\beta(y)).$$

Dann stellen, falls $4 \leqq m \leqq 2^n$ ist, die obigen Gleichungen

$$(1), (2), \ldots, (m)$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß die Formel

$$(Ex)(y)\mathfrak{A}(x, y)$$

für jeden m-zahligen Individuenbereich allgemeingültig ist; und die Gleichungen

$$(1), (2), \ldots, (2^n)$$

stellen die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß die Formel für jeden beliebigen Individuenbereich allgemeingültig ist.

Besonders einfach gestaltet sich das Ergebnis im Falle $n = 1$, wo die Formel $\mathfrak{A}(x, y)$ nur ein einziges Funktionszeichen F enthält. Wir haben dann nur die vier Koeffizienten

$$C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21},$$

und die Gleichungen (1), (2) lauten:

$$C_{11} = 0, \quad C_{22} = 0, \quad C_{12} \cdot C_{21} = 0.$$

Hiernach kann die Normalform $\mathfrak{N}'(x, y)$ — wenn sie überhaupt ein Glied enthält — nur eine der beiden Formen

$$F(x, x) \vee \overline{F}(y, y), \qquad \overline{F}(x, x) \vee F(y, y)$$

haben, und $\mathfrak{A}(x, y)$ muß sich daher (nach den Regeln des Aussagenkalkuls) umformen lassen in eine Formel entweder von der Gestalt

$$F(x, x) \vee \overline{F}(y, y) \vee \mathfrak{B}$$

oder von der Gestalt

$$\overline{F}(x, x) \vee F(y, y) \vee \mathfrak{B},$$

wobei $\mathfrak{B}$ aus den Komponenten

$$F(x, y) \quad \text{und} \quad F(y, x)$$

zusammengesetzt ist.

Diese Beschaffenheit von $\mathfrak{A}(x, y)$ ist also im Falle eines einzigen auftretenden Funktionszeichens notwendig und hinreichend dafür, daß die Formel

$$(Ex)(y)\mathfrak{A}(x, y)$$

für jeden Individuenbereich allgemeingültig ist. (Daß die Bedingung hinreichend ist, kann man leicht direkt verifizieren.)

Wenn die Individuenzahl $m < 4$ ist, so besteht in Hinsicht auf die Allgemeingültigkeit keine Gleichwertigkeit zwischen den Formeln

$$\mathfrak{N}(x, y) \quad \text{und} \quad \mathfrak{N}'(x, y);$$

infolgedessen sind dann die Bedingungen

$$(1) \ldots (m)$$

zwar hinreichend, aber nicht notwendig für die Allgemeingültigkeit.

So ist z. B. die Formel

$$(Ex)(y)(F(x, y) \vee \overline{F}(y, x))$$

allgemeingültig für einen Bereich von zwei Individuen, während die zugehörige Normalform $\mathfrak{N}'(x, y)$, deren symbolische Darstellung

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{2} (\mathfrak{P}_\alpha(x) \vee \mathfrak{P}_\beta(y))$$

lautet, keiner der Gleichungen (1), (2) genügt. Und die Formel

$$(Ex)(y)\Big((F(x, x) \vee \overline{F}(y, y) \vee F(x, y) \vee \overline{F}(y, x)) \\ \& \, (G(x, x) \vee \overline{G}(y, y) \vee F(x, y) \vee \overline{F}(y, x))\Big)$$

ist allgemeingültig für einen Bereich von drei Individuen, während die Normalform $\mathfrak{N}'(x, y)$, in deren symbolischer Darstellung (bei geeigneter Numerierung) die Koeffizienten

$$C_{12}, \ C_{13}, \ C_{14}, \ C_{23}, \ C_{24}, \ C_{32}, \ C_{34}$$

gleich 1, die übrigen gleich 0 zu setzen sind, nur die Gleichungen (1), nicht aber (2) erfüllt.

Solche besonderen Fälle von Allgemeingültigkeit für weniger als vier Individuen, bei denen die Bedingungen $(1) \ldots (m)$ nicht erfüllt werden, sind gegenüber dem Hauptfall dadurch ausgezeichnet, daß bei ihnen der Charakter der Relationen als Funktionen *zweier* Argumente wesentlich ist.

Die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit einer Formel für weniger als vier Individuen ist natürlich durch endliches Ausprobieren zu gewinnen.

In den hier behandelten Fällen des Entscheidungsproblems beruht der Erfolg des angewandten Verfahrens auf dem Umstand, daß von einer gewissen Individuenzahl an, welche durch den Typus der Formel und die Anzahl der in ihr vorkommenden Funktionszeichen bestimmt ist, keine neue Bedingung für die Allgemeingültigkeit hinzutritt.

Dieser Umstand ist nun durchaus auf spezielle Formeltypen beschränkt. Wie schon im § 1 erwähnt wurde, gibt es ja Formeln — und zwar bereits solche mit nur vier voranstehenden Zeichen —, die für jeden endlichen Individuenbereich allgemeingültig sind, dagegen nicht mehr für einen unendlichen.

Bei der Betrachtung solcher Formeln, für deren Allgemeingültigkeit (bzw. Erfüllbarkeit) die unendlichen Individuenbereiche eine wesentliche Rolle spielen, macht sich die Problematik des Unendlichen geltend, und wir kommen damit an die Stelle, wo das Entscheidungsproblem mit den prinzipiellen Fragen der Grundlegung der Mathematik verflochten ist.

(Eingegangen am 24. 3. 1927.)