Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz.

Von

Georg Pólya in Zürich.

1. Ich beziehe den d-dimensionalen Raum auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Ich betrachte diejenigen Punkte, deren Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_d$ sämtlich ganzzahlig sind, und solche Verbindungsgeraden dieser Punkte, die einer der d Koordinatenaxen parallel sind. Die Gesamtheit dieser Geraden bildet das d-dimensionale *Geradennetz*, und die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, die man gewöhnlich als Gitterpunkte bezeichnet, sollen die *Knotenpunkte* des Netzes heißen. In jedem Knotenpunkte kreuzen sich d zueinander rechtwinklige Geraden des Netzes, und jede Gerade wird durch die daraufliegenden Knotenpunkte in gleiche Stücke von der Länge 1 geteilt. Auf dem Geradennetz soll ein Punkt aufs Geratewohl herumfahren. D. h. an jeden neuen Knotenpunkt des Netzes angelangt, soll er sich mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2d}$ für eine der möglichen $2d$ Richtungen entscheiden. Der Bestimmtheit halber wollen wir uns vorstellen, daß der herumwandernde Punkt zur Zeit $t = 0$ im Anfangspunkt des Koordinatensystems seine Irrfahrt beginnt, und daß er sich mit der Geschwindigkeit 1 bewegt. In der Zeit t beschreibt er einen Zickzackweg von der Länge t, in jedem ganzzahligen Zeitpunkt $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ passiert er einen Knotenpunkt und fällt eine vom Zufall geleitete Entscheidung unter $2d$ gleichmöglichen Richtungen.

Für $d = 1$ haben wir eine, in gleiche Segmente geteilte, unbegrenzte Gerade und die geometrische Darstellung des „Wappen-oder-Schrift"-Spiels vor uns. Die Wappenseite einer Münze soll einem Spieler eine Geldeinheit Gewinn einbringen, die Schriftseite einen ebenso großen Verlust; der jeweilige Stand von Gewinn und Verlust soll als positiver bzw. negativer Abstand an einer Geraden von einem festen Ausgangspunkte aus durch eine bewegliche Marke registriert werden. Nach jedem Wurf verschiebt sich die Marke um eine Einheit nach rechts oder nach links; die Hin- und Herpendelung der Marke bei fortgesetztem Spiel ist gerade der eindimensionale Fall der beschriebenen Irrfahrt. Für $d = 2$ haben wir die Irrfahrt eines Spaziergängers in einem regulären quadratischen Straßennetz, für $d = 3$ das angenäherte Bild der Irrfahrt eines Moleküls, das in einem Kristall des regulären Systems diffundiert.

Von den klassischen Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung über Wappen und Schrift, die mit Hilfe des beschriebenen Bildes mehrdimensional verallgemeinert werden können, betrachte ich hauptsächlich diejenige über den „Ruin des Spielers“[1]). Besitzt der Spieler Q Geldeinheiten, so handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit, daß er in höchstens n Spielen seinen ganzen Besitz verspielt, oder auf die eindimensionale Irrfahrt bezogen, um die Wahrscheinlichkeit, daß der vom Ausgangspunkt zur Zeit $t = 0$ aufbrechende, auf der Geraden aufs Geratewohl hin- und hergehende Punkt bis zur Zeit $t = n$ mindestens einmal die Stelle mit der Abszisse $-Q$ erreicht. Ich betrachte jetzt die Irrfahrt im d-dimensionalen Geradennetz; es sei gegeben ein Knotenpunkt mit den Koordinaten $a_1, a_2, \ldots, a_d$; es handelt sich jetzt um die Wahrscheinlichkeit, daß der herumirrende Punkt in der Zeitspanne $0 < t \leqq n$ mindestens einmal den gegebenen Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ passiert. Die Wahrscheinlichkeit wächst offenbar mit zunehmendem n. Es erhebt sich die Frage: strebt sie gegen die Sicherheit, wenn n unbegrenzt wächst?

Ja, wenn $d = 1$ oder $d = 2$, *nein*, wenn $d \geqq 3$. Diese Antwort will ich im folgenden begründen. Die Frage ist übrigens nur wenig verschieden von der folgenden: Es brechen zur Zeit $t = 0$ *zwei* Punkte auf, von zwei gegebenen Knotenpunkten; sie irren auf die beschriebene Weise, mit der gleichen Geschwindigkeit 1, aber voneinander unabhängig im d-dimensionalen Geradennetz herum. Es handelt sich um die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden sich innerhalb der Zeitspanne $0 < t \leqq n$ begegnen; wird diese Wahrscheinlichkeit mit wachsendem n gegen 1 streben? *Ja* für $d = 1, 2$, *nein* für $d = 3, 4, 5, \ldots$. Für $d = 1$ war dies Resultat, wie gesagt, implizite bekannt. Daß die Punkte in höheren Dimensionen „mehr Platz“ haben, um aneinander vorbeizulaufen, ist plausibel. Aber daß der wesentliche Unterschied sich beim Übergang von der Ebene zu dem dreidimensionalen Raum einstellt, schien mir der Mitteilung wert zu sein.

Sämtliche klassischen Aufgaben über wiederholtes Werfen mit einer Münze lassen sich als Aufgaben über den eindimensionalen Fall der beschriebenen Irrfahrt interpretieren und viele darunter gewinnen sehr an

---

[1]) Vgl. z. B. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig und Berlin 1912), S. 116—129.

Anschaulichkeit und Verallgemeinerungsfähigkeit bei dieser Interpretation. Ich begnüge mich heute mit der Bearbeitung der erläuterten Fragestellung. Natürlich können sämtliche Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung kinematisch interpretiert und als Aufgaben über irgendeine Art von Irrfahrt gelesen werden. Bei den meisten Problemen, klassischen und modernen, wird die Erfassung der Zusammenhänge, die pädagogische Eindringlichkeit des Vortrages, der Übergang zu den Anwendungen sehr durch die kinematische Auffassung gefördert, soweit ich nach meinen Erfahrungen urteilen kann[2]).

2. Ich betrachte einen Punkt, der zur Zeit $t = 0$ vom Koordinatenanfangspunkt aufbrechend auf die eingangs beschriebene Weise im d-dimensionalen Netz herumirrt. Im Zeitpunkt $t = m$ befindet er sich in einem Knotenpunkt $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Knotenpunkt die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_d$ haben soll, sei mit $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ bezeichnet. Es ist $P_0(0, 0, \ldots, 0) = 1$ und $P_0(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0$ für jeden von dem Anfangspunkt verschiedenen Knotenpunkt $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Bei jedem festen m ist $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ nur für eine endliche Anzahl Knotenpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_d$ von Null verschieden. Ich bemerke, daß notwendigerweise

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_d \equiv m \,(\mathrm{mod}\ 2), \quad \text{wenn} \quad P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d) > 0.$$

Die Summe der d Koordinaten des Knotenpunktes, den der wandernde Punkt passiert, ändert sich nämlich von jedem ganzzahligen Zeitpunkt zum nächstfolgenden um $+1$ oder um -1, also, mod. 2 gerechnet, um $+1$, ebenso wie m; für $m = 0$ ist diese Summe $= 0$; daher ist (1) richtig. — $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ist eine gerade, symmetrische Funktion der d ganzzahligen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_d$.

Unter mehreren sich darbietenden Methoden[3]) zur Untersuchung von

---

[2]) G. Pólya, 1. Anschauliche und elementare Darstellung der Lexisschen Dispersionstheorie, Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft **55** (1919), S. 121—140; 2. Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die „Irrfahrt", Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich **19** (1919), S. 75—86; 3. Anschaulich-experimentelle Herleitung der Gaußschen Fehlerkurve, Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterr. **52** (1921), S. 57—65.

[3]) $(2d)^m P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ist die Anzahl sämtlicher Zickzackwege im Netz, die aus m Stücken von der Länge 1 zusammengesetzt vom Punkt $0, 0, \ldots, 0$ zum Punkt $x_1, x_2, \ldots, x_d$ führen. Daher ist

$$(2d)^m P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sum (2d)^{m-1} P_{m-1}(y_1, y_2, \ldots, y_d)$$

die Summe über die $2d$ zu $x_1, x_2, \ldots, x_d$ nächstliegenden Knotenpunkte $y_1, y_2, \ldots, y_d$ erstreckt. Aus dieser Rekursionsformel läßt sich über die relative Größe der Wahr-

$P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ wähle ich die klassische, die diese Wahrscheinlichkeiten als Koeffizienten einer erzeugenden Funktion darstellt. $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ist eindeutig bestimmt durch die in den d Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_d$ identische Gleichung

$$\left(\frac{e^{u_1} + e^{-u_1} + e^{u_2} + e^{-u_2} + \ldots + e^{u_d} + e^{-u_d}}{2d}\right)^m \tag{2}$$

$$= \sum_{x_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{x_d=-\infty}^{+\infty} P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)\, e^{x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_d u_d}.$$

Man kann, nach der Polynomialformel, die Größen $(2d)^m P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ als Summen über Polynomialkoeffizienten aus (2) ausdrücken. Im einfachsten Fall $d = 1$ kommt nur die Binomialformel zur Anwendung; das geläufige Resultat sieht in der jetzigen Bezeichnung so aus:

$$2^m P_m(x) = \frac{m!}{\frac{m+x}{2}!\;\frac{m-x}{2}!}. \tag{3}$$

Ich bemerke noch die einfache Formel

$$4^{2n} P_{2n}(0, 0) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2n!}{\nu!\,\nu!\,n-\nu!\,n-\nu!} = \binom{2n}{n}^2. \tag{4}$$

Man setze in (2) $u_1 = i\varphi_1, u_2 = i\varphi_2, \ldots, u_d = i\varphi_d$ und drücke die Koeffizienten $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ auf die übliche Weise durch ein d-faches Integral aus. Ich schreibe die Formeln für gerades und ungerades m getrennt hin:

$$\text{für } x_1 + x_2 + \ldots + x_d \equiv 0 \pmod 2$$

$$P_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \tag{5}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\int \ldots \int \left(\frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \ldots + \cos\varphi_d}{d}\right)^{2n} e^{-i x_1 \varphi_1 - i x_2 \varphi_2 - \ldots - i x_d \varphi_d} d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_d,$$

---

scheinlichkeiten $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ viel mehr ableiten, als in den nachfolgenden Formeln (8) bis (11′) enthalten ist. Aus der Rekursionsformel sind die folgenden numerischen Werte von $4^m P_m(x_1, x_2)$ auf ersichtliche Weise abgeleitet:

$$1,\qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{array},\qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 1 & & 4 & & 1 \\ & 2 & & 2 & \\ & & 1 & & \end{array},\qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & 3 & & 9 & & 3 & \\ 1 & & 9 & & 9 & & 1 \\ & 3 & & 9 & & 3 & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}.$$

für $x_1 + x_2 + \ldots + x_d \equiv 1 \pmod 2$

$$(6) \qquad P_{2n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_d) =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\int\cdots\int\left(\frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \ldots + \cos\varphi_d}{d}\right)^{2n-1} e^{-ix_1\varphi_1 - ix_2\varphi_2 - \ldots - ix_d\varphi_d} d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_d.$$

Die Integrale sind erstreckt über den d-dimensionalen Würfel

$$(7) \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_1 \leqq \frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_2 \leqq \frac{3\pi}{2}, \quad \ldots, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_d \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

Man könnte auch irgendeinen andern gleich großen und gleich orientierten Würfel als Integrationsgebiet wählen.

Zerlegt man den Integranden passend in 2 Faktoren, von denen der eine positiv ist, und der andere den absoluten Betrag 1 bzw. $\leqq 1$ hat, so ergeben (5) und (6) bzw.

$$(8) \qquad P_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_d) \leqq P_{2n}(0, 0, \ldots, 0),$$
$$(9) \qquad P_{2n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_d) < P_{2n-2}(0, 0, \ldots, 0).$$

Die $2d$ Größen $P_{2n-1}(1, 0, \ldots, 0)$, $P_{2n-1}(-1, 0, \ldots, 0)$, $P_{2n-1}(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $P_{2n-1}(0, \ldots, 0, -1)$ haben denselben Wert, erscheinen jedoch durch (6) etwas verschieden ausgedrückt. Durch Addieren der $2d$ Ausdrücke und Division durch $2d$ erhält man gemäß (5)

$$(10) \qquad P_{2n-1}(1, 0, 0, \ldots, 0) = P_{2n}(0, 0, 0, \ldots, 0).$$

(10) mit (9), bzw. mit (8) und (9) kombiniert ergibt

$$(11) \quad P_{2n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_d) < P_{2n}(0, 0, \ldots, 0) = P_{2n-1}(1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$(11') \qquad P_{2n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_d) < P_{2n}(0, 0, \ldots, 0).$$

3. Es ist bei festen $x_1, x_2, \ldots, x_d$

$$(12) \begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} P_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 2\left(\frac{d}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}}, & \text{wenn } x_1 + x_2 + \ldots + x_d \equiv 0 \pmod 2, \\ \lim\limits_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} P_{2n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 2\left(\frac{d}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}}, & \text{wenn } x_1 + x_2 + \ldots + x_d \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Ich will nur die Hauptzüge des Beweises andeuten. In dem durch (7) abgegrenzten Integrationsgebiete der Integrale (5), (6) gibt es nur zwei Punkte, nämlich

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_d = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \pi, \ \varphi_2 = \pi, \ \ldots, \ \varphi_d = \pi,$$

wo der absolute Wert des Integranden $= 1$ ist.

Man betrachte zwei d-dimensionale Würfel von der Kantenlänge 2α, der eine soll den Mittelpunkt $0, 0, \ldots, 0$, der andere den Mittelpunkt

$\pi, \pi, \ldots, \pi$ haben; sie seien mit $\mathfrak{W}_0$ und $\mathfrak{W}_\pi$ bezeichnet. Aus dem Integrationsgebiet (7) bleibt nach Wegnahme des Innern der beiden Würfel $\mathfrak{W}_0$ und $\mathfrak{W}_\pi$ ein abgeschlossenes Gebiet übrig. In diesem Gebiet hat

$$\left|\frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \ldots + \cos\varphi_d}{d}\right|$$

ein bestimmtes Maximum ϱ, $\varrho < 1$, und der von diesem Gebiet herrührende Teil der Integrale (5), (6) ist $< \varrho^{2n}$ bzw. $< \varrho^{2n-1}$. Ich betrachte nun den über $\mathfrak{W}_0$ erstreckten Teil des Integrals (5). Es ist

$$n^{\frac{d}{2}} \iint\limits_{-a}^{+a} \ldots \int \left(\frac{\cos\varphi_1 + \ldots + \cos\varphi_d}{d}\right)^{2n} e^{-ix_1\varphi_1 - \ldots - ix_d\varphi_d}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_d$$

$$= \iint\limits_{-a\sqrt{n}}^{+a\sqrt{n}} \ldots \int \left(\frac{\cos\frac{t_1}{\sqrt{n}} + \ldots + \cos\frac{t_d}{\sqrt{n}}}{d}\right)^{2n} e^{-\frac{ix_1t_1 + \ldots + ix_dt_d}{\sqrt{n}}}\, dt_1 \ldots dt_d$$

$$= \iint\limits_{-a\sqrt{n}}^{+a\sqrt{n}} \ldots \int \left(1 - \frac{t_1^2 + \ldots + t_d^2}{2dn} + \ldots\right)^{2n} \left(1 - \frac{ix_1t_1 - \ldots + ix_dt_d}{\sqrt{n}} + \ldots\right) dt_1 \ldots dt_d$$

$$\sim \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_d^2}{d}}\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_d = (d\pi)^{\frac{d}{2}}.$$

Daraus folgt (12) durch einfaches Einsetzen, wenn man $\lim\limits_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} \varrho^n = 0$ beachtet. Die in der Rechnung gelassene Lücke läßt sich durch geläufige Überlegungen ausfüllen[4]). Übrigens folgt (12) in den Fällen $d = 1, 2$ gemäß (3), (4) einfach aus der Wallisschen Produktformel.

4. Der in dem Anfangspunkte zur Zeit $t = 0$ aufbrechende Punkt kann den gegebenen Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ nur in einem der Zeitpunkte $t = 2, 4, 6, \ldots$ passieren, falls $a_1 + a_2 + \ldots + a_d$ gerade ist, bzw. nur in den Zeitpunkten $t = 1, 3, 5, \ldots$, wenn $a_1 + a_2 + \ldots + a_d$ ungerade. Ich berücksichtige beide Fälle gleichzeitig bei den folgenden Festsetzungen.

p_n heißt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der herumirrende Punkt während der Zeitspanne $2n - 2 < t \leqq 2n$ den Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ passiert.

w_n heißt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der herumirrende Punkt während der Zeitspanne $2n - 2 < t \leqq 2n$ den Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ passiert, *ohne ihn in der Zeitspanne* $0 < t \leqq 2n - 2$ *passiert zu haben.*

---

[4]) Vgl. z. B. G. Pólya, Berechnung eines bestimmten Integrals, Math. Ann. 74, S. 204–212, insbesondere S. 211–212.

W_n heißt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der herumirrende Punkt den Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ innerhalb der Zeitspanne $0 < t \leqq 2n$ passiert.

Die Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten w_m und w_n sind, $m < n$, schließen einander aus. Die Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten p_m und p_n sind, $m < n$, schließen einander nicht aus.

Ich füge hinzu, daß ich diese Bezeichnungen nur im Falle anwende, wo $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_d| \geqq 1$ ist. Ist der Ausgangspunkt selber der zu passierende Punkt, so gebrauche ich die Buchstaben

$$\pi_n, \quad \omega_n, \quad \Omega_n$$

für dieselben Wahrscheinlichkeiten, die ich für einen vom Ausgangspunkt verschiedenen Punkt mit

$$p_n, \quad w_n, \quad W_n$$

bezeichnet habe.

Es ist mit den unter 1 erklärten Bezeichnungen

$$(13_0) \quad \pi_n = P_{2n}(0, 0, \ldots, 0),$$

$$(13_2) \quad p_n = \begin{Bmatrix} P_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_d) \\ P_{2n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_d) \end{Bmatrix}, \text{ je nachdem } a_1 + a_2 + \ldots + a_d \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \pmod 2.$$

Es ist $p_1 = w_1$ nach Definition. Für genügend große Werte von n ist aber offenbar $p_n > w_n$, nämlich sobald Zickzackwege aus $2n$ (bzw. $2n-1$) Stücken von der Länge 1 im Netz möglich sind, die den Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ sowohl als Endpunkt, wie auch als Zwischenpunkt enthalten. Nach den Sätzen über Addition und Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten oder aus der geometrischen Anschauung ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\pi_1 = \omega_1, && p_1 = w_1, \\
&\pi_2 = \omega_1^2 + \omega_2, && p_2 = w_1\omega_1 + w_2, \\
&\pi_3 = \omega_1^3 + 2\omega_1\omega_2 + \omega_3, && p_3 = w_1\omega_1^2 + w_1\omega_2 + w_2\omega_1 + w_3. \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots
\end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Unbestimmten z lassen sich die Spezialfälle in eine einzige Formel konzentrieren

$$\begin{aligned}
1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \ldots = 1 &+ \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \omega_3 z^3 + \ldots \\
&+ (\omega_1 z + \omega_2 z^2 + \omega_3 z^3 + \ldots)^2 \\
&+ (\omega_1 z + \omega_2 z^2 + \omega_3 z^3 + \ldots)^3 \\
&+ \ldots, \\
p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots = {} &w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \ldots \\
&+ (w_1 z + w_2 z^2 + \ldots)(\omega_1 z + \omega_2 z^2 + \ldots) \\
&+ (w_1 z + w_2 z^2 + \ldots)(\omega_1 z + \omega_2 z^2 + \ldots)^2 \\
&+ \ldots.
\end{aligned}$$

Der Koeffizient von z^n in der 1ten, 2ten, 3ten, ... Zeile rechts gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der herumirrende Punkt in der Zeitstrecke $2n-2 < t \leqq 2n$ den Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ das 1te, 2te, 3te, ... Mal passiert. Die rechten Seiten dieser Formeln lassen sich noch etwas anders schreiben

$$1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \ldots = \frac{1}{1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 - \ldots},$$

$$p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots = \frac{w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \ldots}{1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 - \ldots}.$$

Ich schreibe diese Formeln noch in der Form

$$(14_0) \qquad 1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 - \ldots = \frac{1}{1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \ldots},$$

$$(14_2) \qquad w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \ldots = \frac{p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots}{1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \ldots}.$$

Die Kette, die $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ mit W_n verbindet, wird geschlossen durch die Formeln

$$(15_0) \qquad \Omega_n = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n,$$

$$(15_2) \qquad W_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n,$$

die unmittelbar aus der Definition der darin auftretenden Größen folgen.

Ich will noch die Ungleichung

$$(16) \qquad p_{n+1} < \pi_n$$

anführen, die aus (13_0), (13_2), (11), $(11')$ folgt, und die Grenzgleichungen

$$(17) \qquad \lim_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} \pi_n = \lim_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} p_n = 2 \left(\frac{d}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}},$$

die sich aus (13_0), (13_2) und (12) ergeben.

5. Gemäß (17) sind die drei Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}$$

entweder alle drei konvergent oder alle drei divergent. Nun ist die letzte Reihe divergent für $d = 1, 2$ und konvergent für $d = 3, 4, 5, \ldots$. Es folgt somit aus (14_0)

$$1 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \ldots = 0 \qquad \text{für} \quad d = 1, 2$$

$$1 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \ldots = \frac{1}{1 + \pi_1 + \pi_2 + \ldots} > 0 \quad \text{für } d = 3, 4, 5, \ldots$$

nach dem Abelschen Stetigkeitssatz der Potenzreihen. Das besagt nach (15_0)

$$\lim_{n=\infty} \Omega_n = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots = 1 \text{ für } d = 1, 2; \quad < 1 \text{ für } d = 3, 4, 5, \ldots.$$

Aus (14_2), (15_2) ergibt sich im Falle der Divergenz, d. h. für $d = 1, 2$

$$\lim_{n=\infty} W_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = \lim_{z=1} \frac{p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots}{1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \ldots} = \lim_{n=\infty} \frac{p_n}{\pi_n} = 1$$

mit Benutzung von (17), nach einem Satz von Cesàro[5]. Im Falle der Konvergenz ($d = 3, 4, 5, \ldots$) ist

$$\lim_{n=\infty} W_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}{1 + \pi_1 + \pi_2 + \ldots} < 1,$$

mit Berücksichtigung von (16). Damit ist die erste eingangs ausgesprochene Behauptung voll bewiesen.

6. Es bleibt noch die Aufgabe über die Begegnung von zwei herumirrenden Punkten zu behandeln. Der eine Punkt soll im Koordinatenanfangspunkt $0, 0, \ldots, 0$, der andere im Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ seine Irrfahrt im Moment $t = 0$ beginnen. Um die Umstände zu präzisieren, unter welchen sich die beiden treffen können, unterscheide ich vier Fälle:

0) $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_d| = 0$, die Ausgangspunkte identisch.

1) $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_d| = 1$, die Ausgangspunkte benachbart.

2) $a_1 + a_2 + \ldots + a_d \equiv 0 \pmod 2$, $\quad |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_d| \geqq 2$.

3) $a_1 + a_2 + \ldots + a_d \equiv 1 \pmod 2$, $\quad |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_d| \geqq 3$.

Ich bezeichne die Zeitspanne $n - 1 < t \leqq n$ kurz als die „n-te Zeitspanne". Die Koordinaten der beiden herumirrenden Punkte im Moment $t = n - 1$, zu Anfang der n-ten Zeitspanne, seien $x_1', x_2', \ldots, x_d'$ bzw. $x_1'', x_2'', \ldots, x_d''$. Nach der Begründung von Formel (1) ist

$$(18) \qquad x_1' + x_2' + \ldots + x_d' - x_1'' - x_2'' - \ldots - x_d'' \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \pmod 2 \text{ in den Fällen } \begin{cases} 0)\ 2) \\ 1)\ 3) \end{cases}.$$

Wie können die beiden herumirrenden Punkte sich in der n-ten Zeitspanne begegnen? (Begegnen heißt mindestens in einem Zeitpunkt denselben Raumpunkt einnehmen.) In den Fällen 1), 3) muß die Differenz an der linken Seite von (18) $= \pm 1$ sein, d. h. die beweglichen Punkte müssen sich in benachbarten Knotenpunkten befinden; sie begegnen sich dann in der Mitte der dazwischen liegenden Strecke von der Länge 1, sich kreuzend, im Moment $t = n - \frac{1}{2}$. In den Fällen 0), 2) können die beiden wandernden Punkte, gemäß (18), im Moment $t = n - 1$ sich *nicht* in benachbarten Knotenpunkten befinden; sie befinden sich also entweder in demselben Knotenpunkt und reisen von dort zusammen weiter, dies

[5] Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis. Deutsch von G. Kowalewski (Leipzig 1904), S. 279–280.

ist eine Art von Begegnung; oder sie treffen sich erst am Ende der Zeitspanne, zur Zeit $t = n$, und diese ist die andere mögliche Art von Begegnung. Haben sich die beiden Punkte in der n-ten Zeitspanne begegnet, in welcher gegenseitigen Lage befinden sie sich im Zeitpunkt $t = n$? Entweder in benachbarten Knotenpunkten, in den Fällen 1) und 3), oder in demselben Knotenpunkt. in den Fällen 0) und 2). In den Fällen 0) und 1) stellen also die wandernden Punkte am Ende jeder Zeitspanne, worin sie sich begegneten, ihre ursprüngliche gegenseitige Lage her, die sie zur Zeit $t = 0$ innehatten.

Ich betrachte folgende Wahrscheinlichkeiten:

die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden herumirrenden Punkte sich in der n-ten Zeitspanne begegnen; diese Wahrscheinlichkeit sei bezeichnet mit

$$\pi_n, \ \bar{\pi}_n, \ p_n \quad \text{oder} \quad \bar{p}_n,$$

je nachdem der Fall 0), 1), 2) oder 3) vorliegt;

die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden herumfahrenden Punkte sich in der n-ten Zeitspanne begegnen, *ohne sich in irgendeiner der vorangehenden $n-1$ Zeitspannen begegnet zu haben.* Diese Wahrscheinlichkeit sei bezeichnet mit

$$\omega_n, \ \bar{\omega}_n, \ w_n \quad \text{oder} \quad \bar{w}_n,$$

je nachdem der Fall 0), 1), 2) oder 3) vorliegt;

die Wahrscheinlichkeit, daß sich die beiden innerhalb der n ersten Zeitspannen begegnen; diese Wahrscheinlichkeit sei bezeichnet mit

$$\Omega_n, \ \bar{\Omega}_n, \ W_n, \ \bar{W}_n,$$

je nach Fall 0), 1), 2), 3).

Die Wahrscheinlichkeit p_n ist ein Bruch; sein Nenner ist die Anzahl der Kombinationen von je zwei Zickzackwegen von der Länge n, der eine von $0, 0, \ldots, 0$, der andere von $a_1, a_2, \ldots, a_d$ ausgehend, d. h. der Nenner ist $(2d)^n \cdot (2d)^n = (2d)^{2n}$. Der Zähler ist die Anzahl sämtlicher Zickzackwege von der Länge $2n$, die die beiden Punkte $0, 0, \ldots, 0$ und $a_1, a_2, \ldots, a_d$ verbinden. Also ist

$$p_n = P_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_d),$$

d. h. hat genau dieselbe Bedeutung, wie vorher in der Formel (13_2), im Falle, wo $a_1 + a_2 + \ldots + a_d$ gerade ist, der hier allein in Betracht kommt. Überhaupt, die Bezeichnungen π_n, ω_n, Ω_n, p_n, w_n, W_n bezeichnen dieselben Wahrscheinlichkeitsbrüche, wie vorher, und damit ist in den Fällen 0) und 2) die Frage erledigt.

Ich kann mir wohl bei Behandlung der Fälle 1), 3) die Einzelheiten der Begründung ersparen und mich auf die Angabe der wesentlichen

Formeln beschränken, deren Analogie mit den vorangehenden auch in der Numerierung hervorgehoben ist.

$$(13_1)\qquad \bar{\pi}_n = \frac{1}{2d} P_{2n-1}(1, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$(13_3)\qquad \bar{p}_n = \frac{1}{2d} P_{2n-1}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_d)$$

$$(14_1)\qquad 1 - \bar{\omega}_1 z - \bar{\omega}_2 z^2 - \bar{\omega}_3 z^3 - \ldots = \frac{1}{1 + \bar{\pi}_1 z + \bar{\pi}_2 z^2 + \ldots}$$

$$(14_3)\qquad \bar{w}_1 z + \bar{w}_2 z^2 + \bar{w}_3 z^3 + \ldots = \frac{\bar{p}_1 z + \bar{p}_2 z^2 + \ldots}{1 + \bar{\pi}_1 z + \bar{\pi}_2 z^2 + \ldots}$$

$$(15_1)\qquad \bar{\Omega}_n = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots + \bar{\omega}_n$$

$$(15_3)\qquad \bar{W}_n = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \ldots + \bar{w}_n$$

$$(16')\qquad \bar{p}_{n+1} < \bar{\pi}_n$$

$$(17')\qquad \lim_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} \bar{\pi}_n = \lim_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} \bar{p}_n = \frac{1}{d}\left(\frac{d}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}}.$$

Aus diesen Formeln kommt man, wie unter 5, zu dem Resultat, daß

$$\lim_{n=\infty} \bar{\Omega}_n = 1, \quad \lim_{n=\infty} \bar{W}_n = 1 \qquad \text{für } d = 1, 2$$

$$\lim_{n=\infty} \bar{\Omega}_n < 1, \quad \lim_{n=\infty} \bar{W}_n < 1 \qquad \text{für } d = 3, 4, 5, \ldots$$

w. z. b. w.

7. Der eingeschlagene Weg eignet sich auch zur numerischen Berechnung der betrachteten Wahrscheinlichkeiten. Ich behandle einen Fall, wo das Resultat besonders einfach ausfällt.

Man kann (15_0) auch so schreiben

$$1 + (1 - \Omega_1) z + (1 - \Omega_2) z^2 + (1 - \Omega_3) z^3 + \ldots = \frac{1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \ldots}{1 - z},$$

woraus nach (14_0)

$$(19)\quad 1 + (1 - \Omega_1) z + (1 - \Omega_2) z^2 + \ldots = \frac{1}{(1-z)(1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \ldots)}$$

folgt. Nun ist im Falle $d = 1$ nach (3), (13_0)

$$\pi_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots2n} \qquad (d = 1),$$

also

$$1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \qquad (d = 1),$$

woraus nach (19)

$$1 + (1 - \Omega_1) z + (1 - \Omega_2) z^2 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

folgt. Kurzum, es ergibt sich im Falle $d = 1$ zusammengefaßt

$$1 - \Omega_n = \pi_n = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \qquad (d = 1).$$

Dies Resultat läßt sich, gemäß der Interpretation unter 1, so lesen: Wenn $2n$ Würfe mit einer Münze n-Mal Wappen und n-Mal Schrift ergeben, so sagt man, daß das Spiel sich mit dem $2n$-ten Wurf „ausgleicht". Daß das Spiel mit dem $2n$-ten Wurf sich ausgleicht, ist ebenso wahrscheinlich (oder unwahrscheinlich), wie das Vorkommnis, daß das Spiel sich während $2n$ Würfen überhaupt nie ausgleicht (weder mit dem 2-ten, noch mit dem 4-ten, ... noch mit dem $2n$-ten Wurf).

Im Falle $d = 2$ ergibt sich aus (4), (13_0), (14_0)

$$1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 - \ldots = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-zu^2)}}\right)^{-1}.$$

Daß die Koeffizienten $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ in dieser Entwicklung positiv sind, wäre direkt zu beweisen, und es wäre zu entscheiden, ob sie mit wachsendem n stets abnehmen.

(Eingegangen am 12. 1. 1921.)