

Über eine Methode zum Beweise von Oszillationstheoremen.

Von

OTTO HAUPT in Karlsruhe i/B.

Einleitung.

Ist eine gewöhnliche Differentialgleichung gegeben, welche einen Parameter enthält, und schreibt man für die Lösungen in den Endpunkten eines Intervalls a, b Bedingungen vor, die nur für gewisse, die sogenannten *ausgezeichneten Werte des Parameters* erfüllt werden können, so wird hierdurch eine *Randwertaufgabe* definiert. Wir nehmen an, es existieren ausgezeichnete Parameterwerte, denen *ausgezeichnete Lösungen* der Differentialgleichung zugehören, und es lassen sich überdies nach einem bestimmten Gesetze die ausgezeichneten Parameterwerte charakterisieren durch die Nullstellenzahl der zugehörigen ausgezeichneten Lösungen im Intervall a, b , d. h. durch die sogenannten *Oszillationszahlen*: dann bezeichnet man dieses Gesetz, nach *Klein*, als ein *Oszillationstheorem*. Ein solches schließt also stets auch ein *Existenztheorem* in sich und liefert eine Regel, nach der die sämtlichen ausgezeichneten Parameterwerte sich ordnen lassen.

Zweck der folgenden Zeilen ist es, eine Methode — sie läßt sich als eine *Kontinuitätsmethode* bezeichnen — zur Gewinnung von *Oszillationstheoremen* darzulegen*). Bei ihrer Anwendung hat man in erster Linie festzustellen, in welcher Weise sich ausgezeichnete Parameterwerte und *Oszillationszahlen* ändern, sobald man die Koeffizienten der Differentialgleichung oder die Randbedingungen oder beide in gewisser Weise variiert. Lassen sich dann Änderungen angeben, bei welchen ausgezeichnete Parameterwerte und ausgezeichnete Lösungen weder verloren noch gewonnen werden und die *Oszillationszahlen* sich nicht oder doch nur in genau angegebbarer Weise ändern, so bleibt ein *Oszillationstheorem* diesen Änderungen gegenüber erhalten. In diesem Falle braucht man das *Oszillationstheorem* nur für

*) Die Grundlage dieser Methode, welche in der vorliegenden Arbeit vertieft und weitergeführt wird, findet sich in meiner Dissertation: *Unters. über Oszillationstheoreme* (Würzburg 1911). Im folgenden zitiert mit D.

eine spezielle, leicht zugängliche Differentialgleichung abzuleiten, um es sofort auf alle diejenigen Differentialgleichungen ausdehnen zu können, die durch Änderungen der geforderten Art aus der ursprünglichen hervorgehen.

Nach dieser Methode soll im folgenden die, einen reellen Parameter λ enthaltende, lineare, homogene Differentialgleichung

$$(\mathfrak{D}) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x, \lambda) \frac{dy}{dx} \right) + q(x, \lambda) y = 0$$

behandelt werden. Die Koeffizienten von (\mathfrak{D}) erfüllen die *Bedingungen* (\mathfrak{D}) :

$p(x, \lambda)$, $\frac{\partial p(x, \lambda)}{\partial x}$ und $q(x, \lambda)$ sind für alle Werte $x (a \leq x \leq b)$ und jeden endlichen Wert von λ eindeutige, stetige, reellwertige Funktionen der reellen Veränderlichen x und λ . $p(x, \lambda)$ ist im nämlichen Bereiche von Null verschieden und werde positiv angenommen.

Wir bezeichnen ferner eine Differentialgleichung (\mathfrak{D}) als *Differentialgleichung* (\mathfrak{A}) oder vom Typus \mathfrak{A} (*nicht-polarer Fall*), wenn außerdem für alle reellen Wertepaare Λ, λ des Parameters λ

$$(\Lambda > \lambda)$$

$p(x, \Lambda) - p(x, \lambda) \leq 0$, $q(x, \Lambda) - q(x, \lambda) \geq 0$, $\Lambda > \lambda$, $a \leq x \leq b$,
und beispielsweise

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(x, \lambda) = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} q(x, \lambda) = -\infty, \quad a \leq x \leq b$$

ist.

Neben dem nichtpolaren betrachten wir den *polaren Fall* der Differentialgleichung (\mathfrak{D}) (*Differentialgleichung vom Typus* \mathfrak{B}). Ein solcher liegt beispielsweise vor, wenn $p(x, \lambda)$ von λ unabhängig ist und $q(x, \lambda)$ die Gestalt $\lambda k(x)$ hat, wobei $k(x)$ in endlich oder unbegrenzt vielen Stellen des Intervalls $a \leq x \leq b$ das Zeichen wechselt.

Die Randbedingungen, welche wir zulassen, sind linear und homogen in den Randwerten von y und $\frac{dy}{dx}$ und umfassen als besondere Fälle die Sturmschen Bedingungen.*)

§ 1 und 2 beschäftigen sich mit den Randbedingungen, § 3 und 4 behandeln die nichtpolaren Fälle. § 5 ist einer speziellen Differentialgleichung vom Typus \mathfrak{B} , § 6 den sogenannten definiten polaren Problemen im Falle einer allgemeineren Differentialgleichung (\mathfrak{B}) gewidmet. Weitere Beispiele, in denen die Methode, welche mannigfacher Anwendung fähig ist, zum Ziele führt, sind am Schlusse der Arbeit angegeben.

Die in Rede stehenden Randbedingungen finden sich für den Fall der Differentialgleichung (\mathfrak{A})

$$(\mathfrak{A}_1) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda k(x) + q(x)) y = 0$$

*) Sturm, J. de Math. (1) 1 (1836), S. 106—186. Vgl. Böcher, Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Diffgl. (Enzykl. math. Wiss. II A 7 a, S. 437 ff.).

in meiner Dissertation behandelt. Durch die Liebenswürdigkeit von Herrn Bôcher bin ich nach Erscheinen meiner Arbeit auf die Abhandlung von Herrn Birkhoff: Existence and oscillation theorem for a certain boundary value problem (Trans. Am. Math. Soc. 1909, vol. X, S. 259 ff.) aufmerksam gemacht worden. Herr Birkhoff beweist dort bereits die Oszillationstheoreme für die zur Differentialgleichung $(\mathfrak{A}) \frac{d^2 y}{dx^2} + q(x, \lambda)y = 0$ gehörigen Randbedingungen nach anderer Methode (unter Benutzung des Sturmischen Satzes). Die folgenden in § 1—4 inkl. gewonnenen Ergebnisse hatte Verfasser bereits abgeleitet, ehe er von den Resultaten des Herrn Birkhoff Kenntnis erhielt. Neuerdings hat Herr Ettliger (Bulletin of the Amer. math. soc. 26. April 1913) noch allgemeinere Randbedingungen für den Fall der Differentialgleichung (\mathfrak{A}) nach der Methode von Bôcher-Birkhoff behandelt*); für den Sturmischen Fall findet sich eine derartige Erweiterung bei Bôcher (l. c. S. 443) angegeben.

Die Existenzsätze für den polaren definiten Fall sind zuerst von Herrn Hilbert**) bewiesen. Im Anschluß daran ist eine Arbeit von Herrn Hilb***) zu nennen, in der die Behandlung nicht-definiten Fälle angedeutet wird. †) Wie Herr Birkhoff mir mitteilt, ist der polare Fall seiner Methode ebenfalls zugänglich.

§ 1.

Greensche Randbedingungen bei linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Auf die in der Einleitung genannten Randbedingungen wird man durch folgende Überlegung geführt: Bezeichnen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei bzw. zu den Werten λ_1 und λ_2 des Parameters λ gehörige Lösungen von (\mathfrak{D}) und gebraucht man die Abkürzungen

$$p(x; \lambda_i) = p_i(x), \quad q(x; \lambda_i) = q_i(x), \quad i = 1, 2,$$

so folgt aus (\mathfrak{D})

$$y_2 \frac{d}{dx} \left(p_1 \frac{dy_1}{dx} \right) - y_1 \frac{d}{dx} \left(p_2 \frac{dy_2}{dx} \right) + (q_1 - q_2) y_1 y_2 = 0.$$

*) Vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit von Herrn Ettliger.

**) Hilbert, Allgem. Theorie der linearen Integralgl., 5. Mitt. (Gött. Nachr. 1906).

***) Hilb, Erweiterung des Kleinschen Oszillationstheorems (Jahresber. d. D. Math.-Ver. 1907).

†) Vgl. hierzu Richardson, Notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen eines Kleinschen Oszillationstheorems (Math. Ann., Bd. 73, S. 289 ff.). Berichtigung hierzu (Math. Ann., Bd. 74, S. 312).

Durch Integration von a bis b ergibt sich die von Sturm*) benutzte Formel

$$(1) \quad \left[p_1 y_2 \frac{dy_1}{dx} - p_2 y_1 \frac{dy_2}{dx} \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \left[(p_2 - p_1) \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} + (q_1 - q_2) y_1 y_2 \right] dx = 0.$$

Der in (1) linker Hand an erster Stelle stehende Ausdruck innerhalb der eckigen Klammer werde mit $P(y_1, y_2)$, das Integral mit $J(y_1, y_2)$ bezeichnet.

Während die Bedingung (1) identisch für jedes Paar von Werten λ_1, λ_2 und jedes Paar zugehöriger Lösungen y_1, y_2 von (\mathfrak{D}) befriedigt ist, wird $J(y_1, y_2)$ für sich genommen nur unter besonderen Umständen Null werden. Es ergibt sich demgemäß die Frage nach einem Systeme von Werten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ des Parameters λ , für welche die Differentialgleichung (\mathfrak{D}) bzw. Lösungen y_1, y_2, \dots besitzt von der Eigenschaft, daß für jedes Paar einem solchen Systeme angehöriger Lösungen $y_i, y_k; i, k = 1, 2, \dots$, und das zugehörige Wertepaar λ_i, λ_k der Ausdruck $P(y_1, y_2)$, genommen zwischen den Grenzen a und b , oder, was das Gleiche, das Integral $J(y_1, y_2)$ verschwindet.

Das hiermit formulierte Problem werde als *Greensche Randwertaufgabe****) bezeichnet. Die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sind die *ausgezeichneten Parameterwerte*, y_1, y_2, \dots die zugehörigen *ausgezeichneten Lösungen* von (\mathfrak{D}) .

Die Lösung $y \equiv 0$ scheidet grundsätzlich aus der Betrachtung aus; außerdem kommen für die oszillationstheoretischen Betrachtungen ausschließlich reelle ausgezeichnete Parameterwerte in Betracht. Da durch die Problemstellung die ausgezeichneten Lösungen nur bis auf einen von x unabhängigen Faktor festgelegt sind, so schreibt man, außer den Randbedingungen, noch eine *Normierungsbedingung* für die ausgezeichneten Lösungen vor, durch die jener Faktor eindeutig bestimmt wird; ausgezeichnete Lösungen, die sich nur um einen, von x unabhängigen, Faktor unterscheiden, sind als nicht verschieden anzusehen.

Ein System von ausgezeichneten Parameterwerten und ausgezeichneten Lösungen ist durch zwei ausgezeichnete Lösungen oder durch zwei lineare homogene, unabhängige Randbedingungen charakterisiert.

Wir nehmen an, es seien u und v zwei ausgezeichnete Lösungen, λ_u und λ_v die zugehörigen Parameterwerte. Bei Einführung der Bezeichnungen

$$u(a) = u_a, \quad \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=a} = u'_a, \quad p(a; \lambda_u) = p_u(a), \quad \text{usw.}$$

*) Vgl. Sturm, l. c. Böcher, l. c. S. 442.

**) Für den Fall der Differentialgleichung $\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda k(x) + r(x)) y = 0$ ist das Problem zuerst von Hilbert behandelt (Hilbert, Grundzüge einer allgem. Theorie d. linearen Integralgleichungen, 2; Mitt., Gött. Nachr. 1904; 5. Mitt., Gött. Nachr. 1906).

besteht dann die Beziehung

$$(2) \quad \begin{vmatrix} p_u(b)u'_b & u_b \\ p_v(b)v'_b & v_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_u(a)u'_a & u_a \\ p_v(a)v'_a & v_a \end{vmatrix}.$$

Jede weitere ausgezeichnete Lösung $Y(x)$ genügt zufolge der Definition den linearen homogenen Bedingungen

$$(3) \quad \begin{vmatrix} p_u(b)u'_b & u_b \\ p_\lambda(b)Y'_b & Y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_u(a)u'_a & u_a \\ p_\lambda(a)Y'_a & Y_a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p_v(b)v'_b & v_b \\ p_\lambda(b)Y'_b & Y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_v(a)v'_a & v_a \\ p_\lambda(a)Y'_a & Y_a \end{vmatrix};$$

dabei ist λ der zu $Y(x)$ gehörige ausgezeichnete Parameterwert.

Sind umgekehrt irgend zwei unabhängige Randbedingungen vorgelegt — $p_u(b)u'_b$ bedeuten jetzt irgend welche reellen Konstanten —, so bildet das Bestehen von (2) die Bedingung dafür, daß alle den Randbedingungen genügenden Lösungen von (D) ein System von ausgezeichneten Lösungen darstellen. Um dies einzusehen, betrachte man die Matrix

$$(M) \quad \begin{vmatrix} -p_u(a)u'_a & u_a & p_u(b)u'_b & -u_b \\ -p_v(a)v'_a & v_a & p_v(b)v'_b & -v_b \end{vmatrix}.$$

Ihre Unterdeterminanten seien wie folgt bezeichnet

$$A = \begin{vmatrix} -p_u(a)u'_a & u_a \\ -p_v(a)v'_a & v_a \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} p_u(b)u'_b & -u_b \\ p_v(b)v'_b & -v_b \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} u_a & p_u(b)u'_b \\ v_a & p_v(b)v'_b \end{vmatrix}, \\ D = \begin{vmatrix} -p_u(a)u'_a & -u_b \\ -p_v(a)v'_a & -v_b \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} -u_b & u_a \\ -v_b & v_a \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} -p_u(a)u'_a & p_u(b)u'_b \\ -p_v(a)v'_a & p_v(b)v'_b \end{vmatrix}.$$

Dann besteht

$$(4) \quad AB + CD + EF = 0$$

und (2) erhält die Gestalt

$$(5) \quad A - B = 0.$$

Sind $Y_1(x)$ und $Y_2(x)$ zwei Lösungen von (D), die den gegebenen Randbedingungen genügen, λ_1 und λ_2 die entsprechenden Werte des Parameters, so ergibt (3) in jedem Falle

$$(G) \quad \begin{aligned} p(b; \lambda_i)B Y'_i(b) &= p(a; \lambda_i)C Y'_i(a) + F Y_i(a), \\ B Y_i(b) &= p(a; \lambda_i)E Y'_i(a) - D Y_i(a), \end{aligned} \quad i = 1, 2.$$

Äquivalent mit (G) sind die Bedingungen:

$$(G') \quad \begin{aligned} p(a; \lambda_i)A Y'_i(a) &= -p(b; \lambda_i)D Y'_i(b) - F Y_i(b), \\ A Y_i(a) &= -p(b; \lambda_i)E Y'_i(b) + C Y_i(b), \end{aligned} \quad i = 1, 2,$$

ausgenommen den Fall $A = B = 0$. Für diesen hat man *eine* Bedingung (G) und *eine* Bedingung (G').

Im Falle $B \neq 0$ ist wegen (5) auch $A \neq 0$ und mithin

$$(6) \quad \begin{vmatrix} p(b; \lambda_1) Y_1'(b) & Y_1(b) \\ p(b; \lambda_2) Y_2'(b) & Y_2(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p(a; \lambda_1) Y_1'(a) & Y_1(a) \\ p(a; \lambda_2) Y_2'(a) & Y_2(a) \end{vmatrix}$$

Folge von (5) und (3); entsprechendes gilt für den Fall $A = B = 0$. Zu Folge der Identität (1) ist aber (6) gleichbedeutend mit dem Verschwinden von $J(Y_1, Y_2)$.

Die Bedingungen (3) stellen also, falls (5) befriedigt ist, die allgemeinsten Randbedingungen dar, durch die ein System von ausgezeichneten Lösungen bestimmt wird; man nennt sie Greensche Randbedingungen. (G) heißt die Normalform.

Die von Sturm*) behandelten Randbedingungen bilden die durch $A = B = 0$ gekennzeichnete Klasse von Greenschen Bedingungen. Im Sturmischen Falle gehört zu jedem ausgezeichneten Parameterwerte nur eine ausgezeichnete normierte Lösung.

Satz I. Die Systeme von ausgezeichneten Lösungen einer Differentialgleichung (D) sind dadurch charakterisiert, daß die Randwerte der ausgezeichneten Lösungen einem Paare Greenscher Bedingungen

$$(G) \quad \begin{aligned} G_1(y) &= p(b; \lambda) B y'(b) - p(a; \lambda) C y'(a) - F y(a) = 0, \\ G_2(y) &= \quad \quad \quad B y(b) - p(a; \lambda) E y'(a) + D y(a) = 0 \end{aligned}$$

genügen. Die Koeffizienten d. h. die reellen Konstanten A, B, \dots, F verschwinden nicht sämtlich und sind an die Bedingungen

$$(g) \quad AB + CD + EF = 0, \quad A - B = 0$$

gebunden.**)

Man bemerke, daß der Parameter λ in die Randbedingungen eingeht, so lange nicht $p(x, \lambda)$ von λ unabhängig ist.

Anmerkung: Zu einem und dem nämlichen ausgezeichneten Parameterwert gehören dann, aber auch nur dann mehrere ausgezeichnete Lösungen, wenn die sämtlichen Lösungen von (D) für diesen Wert λ den betreffenden Greenschen Randbedingungen genügen; der ausgezeichnete Parameterwert heißt dann ein *zweifacher*, im andern Falle ein *einfacher*. Wir bemerken hierzu, daß die Randwerte der sämtlichen Lösungen von (D) für einen festen Wert von λ stets einem gewissen, übrigens leicht anzugebenden, Greenschen Bedingungenpaare genügen, eine Tatsache, die für lineare sich selbst adjungierte homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung ebenfalls gilt. Allgemein gestatten die vorstehenden Überlegungen

*) Vgl. Böcher, l. c.

**) Vgl. D. I. Teil, § 1.

alle Greenschen Bedingungen zu klassifizieren, die zu den sich selbst adjungierten linearen homogenen Differentialgleichungen $2n^{\text{ter}}$ Ordnung gehören.*)

§ 2.

Begriff der zulässigen Änderung. Verhalten reellwertiger ausgezeichnete Lösungen und ihrer Oszillationszahlen bei zulässigen Änderungen.**)

Aus einem vorgelegten Greenschen Problem erhält man neue Aufgaben, wenn man die Konstanten A, B, \dots, F , sowie die Differentialgleichung (\mathfrak{D}) ändert. Dabei sollen die Koeffizienten der Differentialgleichung stetige Funktionen eines reellen *Hilfsparameters* sein, durch dessen Änderung die Änderung der Differentialgleichung bewirkt wird. Man gelangt nun infolge solcher Änderungen wieder zu einem Greenschen Problem, wenn die Gleichungen (g) und die Bedingungen (\mathfrak{D}) stets erfüllt bleiben. Jede derartige Änderung heißt eine *zulässige Änderung*.

Wir gehen zunächst darauf aus, festzustellen, inwieweit die ausgezeichneten Lösungen bzw. ihre Oszillationszahlen — und in zweiter Linie dann die ausgezeichneten Parameterwerte — durch zulässige Änderung beeinflusst werden. Für unsere Zwecke kommen nur solche zulässige Änderungen in Betracht, bei welchen alle ausgezeichneten Parameterwerte sich stetig ändern, reell und endlich bleiben, ferner die zugehörigen ausgezeichneten Lösungen niemals identisch verschwinden; andernfalls würden ja etwaige Oszillationseigenschaften nicht erhalten bleiben. Wir werden demgemäß im folgenden nur zulässige Änderungen der eben bezeichneten Art verwenden; daß derartige Änderungen, wenigstens für besondere Klassen von Differentialgleichungen (\mathfrak{D}), wirklich existieren, wird sich im Laufe der Untersuchung ergeben. (Vgl. § 3, § 5.)

Bei den soeben bezeichneten zulässigen Änderungen ändern sich die Werte der ausgezeichneten Lösungen an einer Stelle $\xi (a \leq \xi \leq b)$ sowie die einfach zählenden Nullstellen dieser Lösungen stetig mit dem Parameter ρ und den Konstanten der Randbedingungen. Das gleiche gilt für die erste Ableitung nach x . Es können demgemäß reelle Nullstellen einer ausgezeichneten Lösung im Innern des Intervalls und an dessen Grenzen nur dadurch verloren (oder gewonnen) werden, daß entweder mehrere solche Nullstellen zuerst zusammenrücken und dann im weiteren Verlaufe der Änderung verloren gehen (bzw. umgekehrt), oder daß ein Verlust oder Gewinn von Nullstellen in den Intervallgrenzen stattfindet.

*) Vgl. Westfall, Zur Theorie der Integralgleichungen (Diss. Göttingen 1905), S. 18. Ferner D. II. Teil.

***) Vgl. D. I. Teil, § 2 und § 3.

Nun hat bekanntlich eine nicht identisch verschwindende Lösung von (D), als Funktion von x betrachtet niemals zwei- oder mehrfache Nullstellen; mithin bleibt nur noch die zweite Möglichkeit übrig.

Satz II. *Ein Gewinn oder Verlust von reellen Nullstellen einer reellwertigen ausgezeichneten Lösung kann nur an den Intervallgrenzen stattfinden.*

Ist $y \cdot \frac{dy}{dx} > 0$ (bzw. < 0) an der Stelle $x = a$, wobei $y(x)$ eine ausgezeichnete Lösung bezeichne, und wechselt vermöge einer zulässigen Änderung $y(a)$ das Zeichen, während $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ von Null verschieden bleibt, so gewinnt (bzw. verliert) die betrachtete ausgezeichnete Lösung y in $x = a$ gerade eine Nullstelle.

Gilt hingegen die Ungleichung $\left(y \frac{dy}{dx}\right)_b > 0$ (bzw. < 0), so verliert (bzw. gewinnt) die Lösung y in $x = b$ gerade eine Nullstelle, wenn $y(b)$ vermöge einer zulässigen Änderung das Zeichen wechselt, während gleichzeitig $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=b}$ von Null verschieden bleibt.

Wir bezeichnen, wie üblich, die Anzahl der im Innern des Intervalls a, b gelegenen reellen Nullstellen einer ausgezeichneten Lösung als deren Oszillationszahl; in den Nicht-Sturmschen Fällen werden wir indes von zwei an den Intervallendpunkten gleichzeitig auftretenden Nullstellen einer ausgezeichneten Lösung die eine zur Oszillationszahl hinzurechnen.

Zufolge Satz II ist jetzt das Verhalten der Randwerte bei zulässigen Änderungen zu betrachten. Im Sturmschen Falle läßt sich dies sofort übersehen. Die Randbedingungen sind

$$(S) \quad hp(a; \lambda)y'_a - Hy_a = 0, \quad kp(b; \lambda)y'_b - Ky_b = 0$$

und die Oszillationszahlen sind daher konstant, solange nur kein von Null verschiedener Koeffizient h, H, k, K in (S) zum Verschwinden gebracht wird und umgekehrt kein verschwindender Koeffizient von Null verschiedene Werte annimmt.

Beinahe ebenso einfach gestaltet sich die Diskussion der Nicht-Sturmschen Fälle, wenn man durch eine geeignete Transformation der ausgezeichneten Lösungen die Randbedingungen vereinfacht. Setzt man

$$y = \eta(x, \lambda)y_1(x),$$

wobei $\eta(x, \lambda)$ nebst seiner ersten Ableitung nach x für alle x ($a \leq x \leq b$) und jedes reelle λ eine eindeutige, stetige reellwertige Funktion von x und λ ist und $\eta(x, \lambda)$ nirgends verschwindet, so entspricht jeder einfachen Nullstelle von y eine einfache Nullstelle von y_1 und umgekehrt. y hat also die gleiche Oszillationszahl wie y_1 . Man substituiert für y und $\frac{dy}{dx}$ ihre Ausdrücke in y_1 und $\frac{dy_1}{dx}$ in die Greenschen Bedingungen.

Im Falle $E = 0$ erhält man ein Paar Hilbertscher*) Bedingungen

$$(IV) \quad ky_1(a) = y_1(b), \quad p(a; \lambda)y_1'(a) = kp(b; \lambda)y_1'(b),$$

wenn $\eta(x, \lambda)$ für jeden Wert λ , oder auch nur für jeden ausgezeichneten Parameterwert seinerseits den Randbedingungen

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=a} = 0, \quad F\eta_b + p(b; \lambda)D\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=b} = 0, \quad D \neq 0$$

genügt. Eine Funktion, die alle aufgezählten Eigenschaften hat, existiert stets.

Im Falle $E \neq 0$ erhält man ein Paar Hilbertscher Bedingungen IV*

$$(IV^*) \quad y_1(a) = lp(b; \lambda)y_1'(b), \quad lp(a; \lambda)y_1'(a) = -y_1(b),$$

wenn

$$C\eta_b - p(b; \lambda)E\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=b} = 0, \quad D\eta_a - p(a; \lambda)E\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=a} = 0, \quad E \neq 0.$$

Die in (IV) bzw. (IV*) auftretenden Konstanten k und l sind von Null verschieden und lassen sich leicht durch die Koeffizienten A, \dots, F des ursprünglichen Greenschen Systems und die Randwerte von η ausdrücken.

Man nehme für den Augenblick an, daß zu der Randbedingung (IV) oder (IV*) und einer zugehörigen Differentialgleichung (2) eine ausgezeichnete Lösung y existiert. Bei zulässigen Änderungen der betrachteten Art, welche überdies die Ungleichungen bzw. Gleichungen $A \neq 0, B \neq 0, E = 0$ (bzw. $E \neq 0$) ungeändert lassen, kann dann zufolge Satz II die Oszillationszahl sich höchstens um eins ändern; und zwar kann sie entweder nur um eins zu- oder nur um eins abnehmen. Dies folgt sofort aus den Gleichungen

$$p(a; \lambda)y_a y'_a = p(b; \lambda)y_b y'_b, \quad p(a; \lambda)y_a y'_a = -p(b; \lambda)y_b y'_b,$$

die sich ihrerseits aus (IV) bzw. (IV*) ergeben.

Unter Berücksichtigung der oben (S. 74) gegebenen Definition der Oszillationszahl ergibt sich

Satz III. Die Oszillationszahl jeder zu einem Greenschen Bedingungenpaare, charakterisiert durch $A = B \neq 0, E = 0$, oder einem Paare Sturmischer Bedingungen ($A = 0$) gehörigen ausgezeichneten Lösung bleibt bei den betrachteten zulässigen Änderungen invariant, wenn man die Koeffizienten A, \dots, F der Randbedingungen festhält.

Jeder zu einem Greenschen Bedingungenpaare $A \neq 0, E \neq 0$ gehörigen ausgezeichneten Lösung sind zwei ganze positive Zahlen, deren eine auch die Null sein kann, zugeordnet, die sich gerade um eins unterscheiden.***) Bei allen in Betracht kommenden zulässigen Änderungen, welche die Koeffizienten der

*) Hilbert, l. c., 2. Mitt. (S. 216).

**) Dabei ist der Fall auszunehmen, in welchem die ausgezeichnete Lösung die Oszillationszahl Null besitzt und höchstens eine Nullstelle verlieren könnte. Vgl. die Formulierung des Oszillationstheorems (§ 3, S. 81).

Randbedingungen festlassen, kann die Oszillationszahl für die nämliche ausgezeichnete Lösung sich immer nur zwischen diesen beiden Werten hin- und herbewegen.

Insbesondere entsprechen den sämtlichen zu einem festen Werte von λ gehörigen Lösungen von (2) zwei Oszillationszahlen, die sich höchstens um eins unterscheiden.

Der Satz III gilt etwas allgemeiner für solche zulässige Änderungen, welche die Gleichungen bzw. Ungleichungen $A = B \neq 0$, $E = 0$ ($E \neq 0$) ungeändert lassen. Die gefundene Eigenschaft der Oszillationszahlen ist wesentlich durch die Beziehung $A \cdot B > 0$ bedingt.

Zusatz: Die allgemeinste Transformation*), welche eine Differentialgleichung (2) wieder in eine lineare homogene Differentialgleichung überführt, hat die Gestalt

$$y = \eta(x_1, \lambda)y_1, \quad x = \xi(x_1, \lambda);$$

dabei sind η und ξ als Funktionen von x zweimal stetig differenzierbar, als Funktionen von x und λ nebst ihren Ableitungen nach x stetig, im übrigen eindeutig und reellwertig. $\eta(x_1)$ und $\frac{dx}{dx_1}$ verschwinden für keinen Wert $x(a \leq x \leq b)$ und keinen Wert λ . Die Transformation läßt die Oszillationszahl ungeändert, führt hingegen ein Paar Greenscher Bedingungen in ein anderes Paar linearer homogener Bedingungen über, welche sich im allgemeinen der Normalform (G) nicht unterordnen lassen; man kommt auf diese Weise zu Nicht-Greenschen Problemen, die ebenfalls ein Oszillationstheorem besitzen.

§ 3.

Beweis des Oszillationstheorems für die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda k_1(x) + r(x)) y = 0, \quad k_1(x) > 0.$$

(Nicht-polarer Fall.)**)

Der Satz III liefert ein Mittel, um ein Oszillationstheorem, welches für eine spezielle Differentialgleichung (A) gilt, auf die allgemeine Differentialgleichung (A), oder zunächst doch auf eine ganze Klasse solcher Differentialgleichungen auszudehnen. Zu dem Ende kommt es nur mehr darauf an, Differentialgleichungen (A) anzugeben, welche zulässige Änderungen von den im vorhergehenden Paragraphen näher präzisierten, für die Anwendbarkeit des Satzes III notwendigen Eigenschaften gestatten.

*) Stäckel, Über Transformationen von Differentialgleichungen (Crelles Journal, Bd. 111, S. 290 ff.).

***) Vgl. D. §§ 3, 4, 5.

Wir betrachten zunächst die spezielle Differentialgleichung (\mathfrak{A})

$$(\mathfrak{A}_1) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda k(x) + r(x))y = 0.$$

$p(x)$, $k(x)$ und $r(x)$ hängen von λ nicht ab und es ist

$$p(x) > 0, \quad k(x) > 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Die Koeffizienten von (\mathfrak{A}_1) genügen der Bedingung (\mathfrak{A}), wenn p , $\frac{dp}{dx}$, k und r stetige Funktionen von x sind.

Da die Integralbedingung $J(y_1 y_2) = 0$ für (\mathfrak{A}_1) in die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_a^b k(x) y_1(x) y_2(x) dx = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

übergeht, so sind alle ausgezeichneten Parameterwerte reell; sie besitzen nirgends im Endlichen eine Häufungsstelle, weil die ausgezeichneten Parameterwerte Nullstellen einer ganzen transzendenten Funktion $\delta(\lambda)$ in λ sind.

Ferner besitzt $\delta(\lambda)$ höchstens zweifache Nullstellen und diese sind mit den zweifachen ausgezeichneten Parameterwerten identisch*); jedem zweifachen ausgezeichneten Parameterwerte gehören zwei linear unabhängige ausgezeichnete Lösungen zu.

Bei einer zulässigen Änderung von (\mathfrak{A}_1), in deren Verlauf nur Differentialgleichungen (\mathfrak{A}_1) auftreten und die ausgezeichneten Parameterwerte sich stetig ändern, kann dem Gesagten zufolge ein Verlust bzw. ein Gewinn von ausgezeichneten Parameterwerten und Lösungen nur dadurch zustande kommen, daß ein solcher Parameterwert über alle Grenzen wächst, d. h. „ins Unendliche rückt“ bzw. daß er „aus dem Unendlichen hereinrückt“.

Über das Verhalten der ausgezeichneten Parameterwerte bei zulässigen Änderungen läßt sich folgende schärfere Aussage machen:

Hilfssatz Ia. *Bleiben bei einer zulässigen Änderung, in deren Verlauf nur Differentialgleichungen (\mathfrak{A}_1) auftreten, die Koeffizienten A, \dots der Randbedingungen ungeändert und nimmt $r(x)$ für alle $x(a \leq x \leq b)$ zu (oder doch nicht ab), $p(x)$ hingegen ab, oder doch nicht zu, so nimmt hierbei jeder reelle ausgezeichnete Parameterwert ab; vorausgesetzt ist, daß die Koeffizienten von (\mathfrak{A}_1) ganze transzendenten Funktionen des Hilfsparameters ρ sind, ferner, daß für mindestens ein Teilintervall $\xi_1, \xi_2 (a \leq \xi_1 < \xi_2 \leq b)$ wirklich eine Zunahme von $r(x)$ oder Abnahme von $p(x)$ mit sich änderndem ρ erfolgt.*

Umgekehrt nimmt — unter im übrigen gleichen Voraussetzungen — jeder ausgezeichnete Parameterwert zu, wenn $r(x)$ ab-, $p(x)$ hingegen zunimmt. Endlich wächst jeder ausgezeichnete Parameterwert seinem absoluten Betrage

*) Vgl. z. B. Hilbert, l. c., 1. Mitt.; Birkhoff, l. c., § 2; ferner D. § 4, § 5.

nach, wenn $k(x)$ für jedes $x (a \leq x \leq b)$ abnimmt, oder doch nicht wächst, und gleichzeitig die Randbedingungen und die übrigen Koeffizienten von (\mathfrak{A}_1) festbleiben.

Die letzte Behauptung ergibt sich für den Fall der Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda k(x)y = 0$$

folgendermaßen: für den Wert $\rho = \rho_0$ des Hilfsparameters ρ sei $y_0(x)$ die zum einfachen ausgezeichneten Parameterwert λ_0 gehörige Lösung. Durch die zulässige Änderung $\Delta \rho$ des Parameters ρ erhält man die neue Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{d^2(y_0 + \Delta y_0)}{dx^2} + (\lambda_0 + \Delta \lambda_0)(k(x) + \Delta k(x))(y_0 + \Delta y_0) = 0,$$

wobei $\lambda_0 + \Delta \lambda_0$ bzw. $y_0 + \Delta y_0$ derjenige ausgezeichnete Parameterwert bzw. diejenige ausgezeichnete Lösung von (2) ist, in die λ_0 bzw. $y_0(x)$ übergeht. Multipliziert man (1) mit $(y_0 + \Delta y_0)$, (2) mit y_0 , subtrahiert und integriert von a bis b , so ergibt sich, weil $y_0 + \Delta y_0$ und y_0 den gleichen Randbedingungen genügen,

$$(3) \quad \int_a^b [\lambda_0 \cdot \Delta k(x) + \Delta \lambda_0 \cdot k(x) + \Delta \lambda_0 \cdot \Delta k(x)] y_0(x) (y_0(x) + \Delta y_0(x)) dx = 0.$$

Zufolge der gemachten Annahmen, kann man die Identität (3) in $\Delta \rho$ nach Potenzen von $\Delta \rho$ ordnen; die Glieder niedrigster Ordnung sind

$$(4) \quad \Delta \rho \cdot \left\{ \lambda_0 \int_a^b \left(\frac{\partial k(x)}{\partial \rho} \right)_{\rho = \rho_0} \cdot y_0^2(x) dx + \left(\frac{d\lambda_0}{d\rho} \right)_{\rho = \rho_0} \int_a^b k(x) y_0^2(x) dx \right\},$$

woraus die Behauptung folgt.*) Ganz entsprechend gestaltet sich der Beweis des ersten Teiles unseres Hilfssatzes, sowie die Behandlung zweifacher ausgezeichneter Parameterwerte λ_0 .

Das Beispiel einer zulässigen Änderung der im Hilfssatze bezeichneten Art liefert die Differentialgleichung (\mathfrak{A}_1)

$$\frac{d}{dx} \left([\rho p(x) + (1 - \rho)x(x)] \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda k(x) + [\rho r(x) + (1 - \rho)\tau(x)]) y = 0,$$

wenn

$$p(x) \geq x(x), \quad r(x) \leq \tau(x)$$

für jedes $a \leq x \leq b$. In der Variation $\Delta \rho \geq 0$ hat man dann eine solche zulässige Änderung.

Nun gilt für die spezielle Differentialgleichung (\mathfrak{A}_1)

$$(a) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

*) Daß $\left(\frac{d\lambda_0}{d\rho} \right)$ existiert, ist leicht zu sehen.

und ein zugehöriges Greensches Randbedingungenpaar folgendes Oszillationstheorem: Es existieren unendlich viele reelle ausgezeichnete Parameterwerte, die nur im Positiv-Unendlichen eine Häufungsstelle besitzen. Zu der von Null verschiedenen Oszillationszahl $2n$ und der ihr — je nach Art der vorgelegten Randbedingung — zugeordneten Oszillationszahl $2n + 1$ bzw. $2n - 1$ gehören stets zwei aber nur zwei ausgezeichnete Lösungen. Im ersteren Falle, d. h. wenn $2n + 1$ und $2n$ zugeordnet sind, gehören zu den Oszillationszahlen 0 und 1 im ganzen zwei ausgezeichnete Lösungen; andernfalls gibt es immer gerade eine ausgezeichnete Lösung mit der Oszillationszahl Null. Zu Paaren größerer Oszillationszahlen gehören größere ausgezeichnete Parameterwerte.*)

Das Theorem gilt unverändert auch für Differentialgleichungen

$$(a) \quad \frac{d}{dx} \left(\pi \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda x^2 + \nu) y = 0,$$

wenn π , ν , λ von Null verschiedene reelle Konstanten sind. Ferner erleidet das Oszillationstheorem gemäß Satz III, wie aus seiner Herleitung hervorgeht,**) bei zulässigen Änderungen der Differentialgleichung (a) allein keinerlei Änderung, es sei denn daß ein Gewinn oder Verlust von ausgezeichneten Parameterwerten stattfindet. Daß dies nur „im Unendlichen“ geschehen kann, ist bereits oben gezeigt.

Mit Hilfe der zulässigen Änderung des Hilfssatzes Ia ergibt sich aber, daß auch diese letzte Möglichkeit ausgeschlossen ist. Betrachten wir zunächst eine Differentialgleichung (\mathcal{A}_1) der Form

$$(\mathcal{A}_1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda k(x) y = 0.$$

Jeder derartigen Differentialgleichung kann man zwei Differentialgleichungen (a) zuordnen

$$(a_j) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda x_j^2 y = 0, \quad j = 1, 2,$$

die zu ihr in der für die Anwendung des Hilfssatzes erforderlichen Beziehung stehen. Man braucht nur die Konstanten x_j^2 ($j = 1, 2$) so zu wählen, daß etwa

$$x_2^2 > k(x) > x_1^2 > 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Führt man nun (a_1) bzw. (a_2) in der S. 78 angegebenen Weise in (\mathcal{A}_1) über, so läßt sich Hilfssatz Ia anwenden. Es können demgemäß im einen

*) Bezüglich der eingehenderen Formulierung vgl. Birkhoff, l. c., S. 269; ferner D. S. 35.

***) Siehe D. § 5. Durch das Oszillationstheorem müssen eben solche Oszillationszahlen einander zugeordnet werden, die auch vermöge der Randbedingungen (Satz III, § 2) einander entsprechen.

Fälle ausgezeichnete Parameterwerte nur gewonnen, im andern nur verloren werden. Da man beide Male zur Differentialgleichung (\mathfrak{A}_1) gelangt, findet also weder Gewinn noch Verlust statt. (\mathfrak{A}_1) besitzt für die gleichen Randbedingungen das nämliche Oszillationstheorem wie (a).

Durch entsprechende Verwendung des ersten Teiles von Hilfssatz Ia beweist man ein Gleiches für die allgemeine Differentialgleichung (\mathfrak{A}_1). Wir formulieren das Ergebnis so:

Hilfssatz II. *Beschränkt man sich ausschließlich auf Differentialgleichungen (\mathfrak{A}_1), so werden bei festen Randbedingungen d. h. festen Werten der Koeffizienten A, \dots, F infolge irgendwelcher zulässigen Änderung der Differentialgleichung d. i. der Koeffizienten p, k, r ausgezeichnete Parameterwerte bzw. ausgezeichnete Lösungen niemals gewonnen oder verloren. Ausgezeichnete Parameterwerte und Lösungen ändern sich stetig mit einem reellen Parameter ϱ , wenn die Koeffizienten von (\mathfrak{A}_1) eindeutige, stetige, reellwertige Funktionen von ϱ und $x(a \leq x \leq b)$ für den in Betracht kommenden Bereich von ϱ sind.*

Sind die Koeffizienten von (\mathfrak{A}_1) bloß stetige, nicht-analytische Funktionen des Hilfsparameters, so kann der Beweis des Satzes dadurch geführt werden, daß man beispielsweise die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left[(p(x, \varrho_0) - \varepsilon) \frac{dy}{dx} \right] + (\lambda k(x) + [r(x, \varrho_0) + \varepsilon]) y = 0$$

bildet, wobei ε eine genügend kleine positive Größe ist. Vergleicht man hiermit alle Differentialgleichungen (\mathfrak{A}_1) in einer hinreichend kleinen Umgebung der Stelle $\varrho = \varrho_0$ und faßt hierbei einen bestimmten ausgezeichneten Parameterwert ins Auge, so ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Hilfssatz Ia bzw. der Formel (3) und analoger Beziehungen die Behauptung.

Der Hilfssatz Ia gestattet die entsprechende Erweiterung.

Zum Schlusse sei nochmals hervorgehoben, daß zulässige Änderungen von $p(x)$ das Oszillationstheorem in keiner Weise beeinflussen.

§ 4.

Ausdehnung des Oszillationstheorems auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(p(x, \lambda) \frac{dy}{dx} \right) + q(x, \lambda) y = 0.$$

(Nicht-polarer Fall.)*

Das im vorstehenden angewandte Verfahren läßt sich so modifizieren, daß es auch im Falle der allgemeinen Differentialgleichung (\mathfrak{A}) zum Be-

*) Vgl. hierzu Birkhoff, l. c. und die daselbst zitierte Literatur.

weise führt. Dabei wird sich die Betrachtung ausschließlich auf reelle endliche Parameterwerte beschränken.

Als gegeben betrachten wir bei den folgenden Überlegungen die Differentialgleichung (\mathfrak{A}) und ein System von Greenschen Bedingungen, das wir ein für allemal festhalten.

Zunächst ziehen wir nur *die Bedingungen*

$$(1) \quad p(x, \Lambda) - p(x, \lambda) \leq 0, \quad q(x, \Lambda) - q(x, \lambda) \geq 0, \quad a \leq x \leq b, \quad \Lambda > \lambda$$

heran; dabei soll also für jedes Λ in der Umgebung jeden Wertes von λ mindestens für einen der Koeffizienten ein Teilintervall ξ_1, ξ_2 von a, b existieren, so daß in diesem das Ungleichheitszeichen gilt.

Wir betrachten dann in der Schar von Differentialgleichungen

$$(\mathfrak{A}_1^\varrho) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x, \varrho) \frac{dy}{dx} \right) + (\mu + q(x, \varrho)) y = 0$$

den Parameter ϱ als Hilfsparameter*). Für den Wert $\varrho = \varrho_1$ möge das zu $(\mathfrak{A}_1^{\varrho_1})$ und den festen Randbedingungen gehörige Problem n_1 negative ausgezeichnete Parameterwerte μ besitzen. Für jeden größeren Wert $\varrho = \varrho_2$ besitzt dann das entsprechende, zu ϱ_2 gehörige Problem sicher nicht weniger negative ausgezeichnete Parameterwerte. Vergleicht man nämlich die beiden Differentialgleichungen $(\mathfrak{A}_1^{\varrho_1})$ und $(\mathfrak{A}_1^{\varrho_2})$, so bestehen für ihre Koeffizienten bzw. die Beziehungen

$$p(x, \varrho_2) \leq p(x, \varrho_1), \quad q(x, \varrho_2) \geq q(x, \varrho_1), \quad a \leq x \leq b, \quad \varrho_1 < \varrho_2.$$

Zufolge Hilfssatz Ia müssen demgemäß die ausgezeichneten Parameterwerte von $(\mathfrak{A}_1^{\varrho_1})$ sämtlich abnehmen, wenn ϱ von ϱ_1 bis ϱ_2 wächst. Weil bei dieser zulässigen Änderung ausgezeichnete Parameterwerte weder verloren noch gewonnen werden, ist die Behauptung erwiesen.

Wie bereits bemerkt, nehmen bei zunehmendem ϱ die ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{A}_1^ϱ) beständig ab. Jeder positive (einfache oder zweifache) ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{A}_1^ϱ) kann hierbei also höchstens einmal Null werden. Für $\mu = 0$ wird aber jeweils (\mathfrak{A}_1^ϱ) mit (\mathfrak{A}) für den betreffenden Wert $\lambda = \varrho$ des Parameters λ identisch. Daher kann jede zu einem positiven ausgezeichneten Parameterwerte von $(\mathfrak{A}_1^{\varrho_1})$ gehörige ausgezeichnete Lösung höchstens zu einer einzigen ausgezeichneten Lösung von (\mathfrak{A}) führen. Andererseits liefert ein negativer ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{A}_1^{\varrho_1})$ bei wachsendem ϱ niemals einen ausgezeichneten Parameterwert von (\mathfrak{A}) , auch der etwa vorhandene ausgezeichnete Parameterwert $\mu = 0$ von $(\mathfrak{A}_1^{\varrho_1})$ gibt zu keinem weiteren ausgezeichneten Parameterwert von (\mathfrak{A}) Veranlassung. Und umgekehrt entspricht jeder aus-

*) Eine analoge Schlußweise findet sich bei Hilb, l. c. (Jahresber. 1907) zum Beweise Sturmischer Oszillationstheoreme im polaren Fall. Vgl. S. 88.

gezeichnete Parameterwert λ ($\rho_1 \leq \lambda < \rho_2$) von (\mathfrak{A}) einem ausgezeichneten Parameterwerte $\mu = 0$ von $(\mathfrak{A}_1^{\rho_1})$ ($\rho_1 \leq \rho < \rho_2$). Daher das Resultat:

Sind ρ_1 und ρ_2 zwei reelle Werte des Parameters ρ ($\rho_1 < \rho_2$) und hat die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_1^{\rho_1})$ im ganzen n_1 , die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_1^{\rho_2})$ hingegen im ganzen n_2 zu negativen ausgezeichneten Parameterwerten gehörige ausgezeichnete Lösungen, so ist $n_1 \leq n_2$; und es gibt genau $n_2 - n_1$ verschiedene reelle ausgezeichnete Lösungen von (\mathfrak{A}) , deren zugehörige reelle ausgezeichnete Parameterwerte der Bedingung $\rho_1 \leq \lambda < \rho_2$ genügen. Voraussetzung ist hierbei nur, daß die Koeffizienten von (\mathfrak{A}) die Bedingung (1) erfüllen.

Aus dem so gewonnenen Ergebnis folgt unmittelbar: *Ist die Forderung (1) erfüllt, so gilt für die Differentialgleichung (\mathfrak{A}) und die vorgegebene Randbedingung dann und nur dann das nämliche Oszillationstheorem wie für die Differentialgleichung (\mathfrak{A}_1) , wenn*

- (2) a) zu jeder positiven ganzen Zahl N_0 ein Wert $\lambda = \rho_0$ existiert, so daß $(\mathfrak{A}_1^{\rho_0})$ unter den gleichen Randbedingungen mindestens N_0 zu negativen ausgezeichneten Parameterwerten gehörige ausgezeichnete Lösungen besitzt;
- b) ein Wert $\lambda = P$ existiert, so daß (\mathfrak{A}_1^P) nur positive ausgezeichnete Parameterwerte zuläßt.

Um die an erster Stelle genannte Bedingung (2a) zu erfüllen, genügt es und ist zugleich notwendig, daß bei passender Wahl von λ eine (und dann zufolge § 2 auch jede) Lösung von (\mathfrak{A}) im Intervalle a, b beliebig viele Nullstellen besitze. Um ein Kriterium hierfür zu gewinnen, führe man in der Differentialgleichung (\mathfrak{A}) vermöge der Substitution

$$x = x(x_1, \lambda), \quad x_1 = \frac{1}{c} \int_a^x \frac{dx}{p(x, \lambda)}$$

die neue unabhängige Veränderliche x_1 ein. Wie leicht zu zeigen, ergibt sich dann aus (\mathfrak{A}) die Differentialgleichung

$$\frac{\bar{p}(x_1)}{c^2(\bar{p}(x_1))^2} \cdot \frac{d^2 \bar{y}}{dx_1^2} + \bar{q}(x_1) \bar{y} = 0,$$

wobei

$$\bar{p}(x_1) = p(x(x_1, \lambda), \lambda), \quad \bar{q}(x_1) = q(x(x_1, \lambda), \lambda), \quad \bar{y}(x_1) = y(x(x_1, \lambda)).$$

Bestimmt man den willkürlichen, von x unabhängigen Faktor c durch die Gleichung

$$c(\lambda) = \int_a^b \frac{dx}{p(x, \lambda)},$$

so entsprechen den Punkten $a \leq x \leq b$ eineindeutig die Punkte $0 \leq x_1 \leq 1$ für jeden endlichen Wert von λ . $\bar{y}(x_1)$ hat in $0, 1$ die gleiche Nullstellenzahl wie $y(x)$ in a, b .

(A) besitzt demgemäß die oben geforderte Eigenschaft, sobald in

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d x_1^2} + \bar{p}(x_1) \bar{q}(x_1) \left\{ \int_a^b \frac{dx}{p(x, \lambda)} \right\}^2 \bar{y} = 0$$

der Koeffizient von \bar{y} im Intervalle 0, 1 (oder auch nur in einem festen Teilintervall, das also mit wachsendem λ eine feste Größe nicht unterschreitet) durchweg größer wird als eine beliebig große positive Größe. Die Bedingung (2a) ist somit gewiß erfüllt, wenn

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p(x, \lambda) q(x, \lambda) \left\{ \int_a^b \frac{dx}{p(x, \lambda)} \right\}^2 = +\infty, \quad a \leq x \leq b.$$

Um die Bedingung (2b) zu befriedigen, genügt es z. B., daß für alle $a \leq x \leq b$ die Beziehung gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} q(x, \lambda) = -\infty.*$$

Zum Beweise bestimme man in der Differentialgleichung

$$(a) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (\mu + \tau) y = 0$$

die Konstante τ so, daß alle ausgezeichneten Parameterwerte μ von (a) für die vorgegebenen Randbedingungen positiv sind. Das ist immer möglich. Bezeichnet α das Minimum von $p(x, l)$, wo l ein fester, im übrigen beliebiger Wert des Parameters λ ist, so gilt

$$0 < \alpha \leq p(x, \lambda), \quad a \leq x \leq b$$

für jedes $\lambda \leq l$. Setzt man ferner $\tau = \frac{\beta}{\alpha}$, so gibt es den angenommenen Eigenschaften von $q(x, \lambda)$ zufolge überdies eine Zahl $l_0 \leq l$, für welche

$$q(x, l_0) < \beta, \quad a \leq x \leq b.$$

Führt man nun die Differentialgleichung

$$(a') \quad \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{dy}{dx} \right) + (\mu' + \beta) y = 0,$$

die ebenfalls nur positive ausgezeichnete Parameterwerte besitzt, in

$$(A_1^{l_0}) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x, l_0) \frac{dy}{dx} \right) + (\mu' + q(x, l_0)) y = 0$$

*) Mit dieser Bedingung ist die folgende

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{q(x, \lambda)}{p(x, \lambda)} = -\infty$$

gleichbedeutend. Da nämlich die stets positive Funktion $p(x, \lambda)$ mit abnehmendem λ sicher nicht abnimmt, so muß $q(x, \lambda)$, absolut genommen, für alle $a \leq x \leq b$ mit gegen $-\infty$ abnehmendem λ offenbar über alle Grenzen wachsen.

über, so nehmen alle ausgezeichneten Parameterwerte zu, (\mathfrak{A}_1^2) hat nur positive ausgezeichnete Parameterwerte, w. z. b. w.

Eine ganz entsprechende Betrachtung zeigt übrigens, daß die bereits behandelte Bedingung (2a) sicher befriedigt ist, sobald für ein festes Teilintervall ξ_1, ξ_2 ($a \leq \xi_1 < \xi_2 \leq b$)

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(x, \lambda) = +\infty.$$

Auf weitere Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden. Bezüglich der Kriterien, die in den Sturmschen Fällen die Existenz des vollständigen Oszillationstheorems für die Differentialgleichung (\mathfrak{A}) garantieren, sei an dieser Stelle nochmals auf die Arbeiten von Herrn Böcher*) hingewiesen.

Die beiden Bedingungen (1) und (2) waren für die vorstehende Untersuchung durch die Natur der Koeffizienten von (\mathfrak{A}_1) vorgezeichnet. Sie erwiesen sich als hinreichend, um für ein festes Greensches System die Gültigkeit eines und des nämlichen Oszillationstheorems, und zwar des gleichen wie für (\mathfrak{A}_1) , für alle Differentialgleichungen vom Typus (\mathfrak{A}) zu sichern. Die Annahmen, daß $p(x, \lambda)$ und $q(x, \lambda)$ mit wachsendem λ bei festem x monoton abnehmen, bzw. monoton wachsen, boten die Gewähr, daß *nicht mehr* ausgezeichnete Parameterwerte von (\mathfrak{A}) existierten, als durch das Oszillationstheorem von (\mathfrak{A}_1) vorgeschrieben waren. Die hinzutretende Eigenschaft (2) sicherte die Existenz *aller* dieser ausgezeichneten Parameterwerte für die Differentialgleichung (\mathfrak{A}) .

Die Bedingungen (1), (2) sind im oben erklärten Sinne offenbar auch notwendig. Dies läßt sich durch Konstruktion von Beispielen leicht erhärten.

§ 5.

Die Oszillationstheoreme für die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda k(x) + r(x)) y = 0, \quad k(x) \geq 0.$$

(Polarer Fall.)

Die im vorstehenden entwickelte Methode gestattet die Behandlung sogenannter *polarer Probleme*. In diesem Paragraphen soll zunächst das einfachste Beispiel eines solchen, nämlich die zu vorgegebenen Greenschen Bedingungen und zur Differentialgleichung

$$(\mathfrak{B}_1) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda k(x) + r(x)) y = 0$$

gehörige Randwertaufgabe betrachtet werden. Dabei wechselt also $k(x)$

*) Siehe die bei Böcher, l. c. (S. 446) zitierten Arbeiten.

in endlich vielen oder unbegrenzt vielen Stellen des Intervalls a, b sein Vorzeichen. Die Voraussetzungen über $p(x)$, $k(x)$ und $r(x)$ sind im übrigen die gleichen wie in Paragraph 3.

Zunächst lehrt die Betrachtung von (\mathfrak{B}_1) , daß zu jeder vorgegebenen Oszillationszahl N immer eine positive Zahl L von folgender Eigenschaft existiert: Für alle positiven und alle negativen Werte des Parameters λ , deren absoluter Betrag nicht kleiner ist als L , ist die Oszillationszahl einer jeden Lösung von (\mathfrak{B}_1) größer als N . Um dies einzusehen, greife man ein Teilintervall von a, b heraus, in dem $\lambda k(x)$, einschließlich der Endpunkte, für $\lambda > 0$ durchweg positiv ist und bestimme (vgl. S. 82) eine Konstante L^+ , die für eben dieses Teilintervall und damit auch für das Intervall a, b bezüglich der positiven Werte von λ die oben geforderte Eigenschaft besitzt. Für negative Werte von λ ergibt sich auf Grund einer ähnlichen Betrachtung eine entsprechende Zahl L^- . Die größere der Zahlen L^+ und L^- ist die gesuchte Schranke L .

Eine unmittelbare Folge dieser Tatsache ist, daß *die Randbedingungen nur für diskrete Werte λ erfüllt sein können*. Die ausgezeichneten Parameterwerte ergeben sich nämlich als Nullstellen einer in λ ganzen transzendenten Funktion $\delta(\lambda)^*$; sie liegen daher entweder diskret oder erfüllen die ganze (komplexe) λ -Ebene. Geht man im letzteren Falle von einem beliebigen reellen Werte des Parameters λ und einer zugehörigen ausgezeichneten reellen Lösung von (\mathfrak{B}_1) aus, so müßte sich dieser Wert von λ stetig in jeden anderen überführen lassen, so zwar, daß während des ganzen Verlaufes der Änderung sowohl die Differentialgleichung als die Randbedingungen erfüllt und die auftretenden Parameterwerte λ und die zugehörigen Lösungen von (\mathfrak{B}_1) sämtlich reell sind. Bei einer solchen Änderung würde aber nach dem oben Bewiesenen die ursprüngliche Lösung beliebig viele Nullstellen gewinnen, obwohl dies den Randbedingungen (§ 2) zufolge unmöglich ist.

Nunmehr bilden wir die Schar von Differentialgleichungen (\mathfrak{A}_1) :

$$(\mathfrak{A}_1^{\lambda}) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (v + \lambda k(x) + r(x)) y = 0,$$

wobei λ der Hilfsparameter ist, und betrachten das zur gegebenen Green'schen Randbedingung und zu jedem $(\mathfrak{A}_1^{\lambda})$ gehörige nichtpolare Oszillationstheorem; die Anzahl negativer ausgezeichneten Parameterwerte sei dann $n(\lambda)$. Die Funktion $n(\lambda)$ von λ besitzt das absolute Minimum n_0 und die Werte Λ , für die $n(\lambda) = n_0$ ist, liegen dem oben Bemerkten zufolge zwischen angebbaren endlichen Grenzen. Eine Teilmenge der Λ bilden die Punkte Λ' , in denen gleichzeitig die Mindestzahl von ausgezeichneten Parameterwerten

* Vgl. D. I., § 3.

$\nu = 0$ erreicht wird. Bei der Bildung von $n(\lambda)$ sind natürlich zweifache negative ausgezeichnete Parameterwerte immer als zwei in Anschlag zu bringen.

Wir verlegen den Nullpunkt der λ -Zählung in eine Stelle Λ' oder, wie der Kürze wegen im folgenden stets gesagt werden soll, wir *normieren den Parameter λ* . Die Differentialgleichung (\mathfrak{B}_1) lautet dann:

$$(\mathfrak{B}_1) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda k(x) + r_0(x)) y = 0.$$

(Der Index 0 in r_0 soll anzeigen, daß der Parameter normiert ist.)

Jedem positiven ausgezeichneten Parameterwert von (\mathfrak{A}_1^0) entspricht mindestens ein positiver und ein negativer reeller ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{B}_1) . In der Tat, faßt man irgend einen positiven ausgezeichneten Parameterwert ν_0 von (\mathfrak{A}_1^0) ins Auge, bzw. das Oszillationszahlenpaar, dem er zugehört, so läßt sich, wie oben bewiesen wurde, eine obere Grenze L für die absoluten Beträge der etwa zu diesem Oszillationszahlenpaar gehörigen ausgezeichneten reellen Parameterwerte von (\mathfrak{B}_1) stets angeben. Dem für (\mathfrak{A}_1^2) geltenden nichtpolaren Oszillationstheorem zufolge ist dann jeder diesem Oszillationszahlenpaar entsprechende ausgezeichnete Parameterwert ν_0 von (\mathfrak{A}_1^2) sicher negativ, sobald $|\lambda| \geq L$ ist. Lassen wir nun λ von Null beginnend beständig wachsen (oder abnehmen), so ändert sich hierbei ν_0 stetig (Hilfssatz Ia), ist für $\lambda = 0$ positiv und wird für $\lambda = \pm L$ negativ sein. Da überdies ν_0 stets innerhalb endlicher Grenzen bleibt, muß es mindestens einmal den Wert Null annehmen; dann ist (\mathfrak{A}_1^2) mit (\mathfrak{B}_1) identisch, der zugehörige Wert λ ist ein reeller ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{B}_1) .

Umgekehrt entspricht jedem reellen ausgezeichneten Parameterwert von (\mathfrak{B}_1) ein ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{A}_1^0) . Es erübrigt, um für die reellen ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{B}_1) ein Oszillationstheorem zu gewinnen, die Untersuchung, wie oft jeder positive und jeder negative ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{A}_1^0) , sowie der etwa vorhandene ausgezeichnete Parameterwert $\nu = 0$ von (\mathfrak{A}_1^0) den Wert Null passiert, wenn entweder λ von Null beginnend beständig wächst oder beständig abnimmt.

In dieser Hinsicht gilt folgender Satz: *Bei wachsendem sowohl als bei abnehmendem λ wechselt jeder positive ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{A}_1^0) gerade einmal das Vorzeichen, wenn*

$$(II) \quad \lambda_0 \int_a^b k(x) (y_0(x))^2 dx > 0$$

für jeden von Null verschiedenen reellen ausgezeichneten Parameterwert λ_0 und eine zu λ_0 gehörige ausgezeichnete Lösung y_0 von (\mathfrak{B}_1) . Unter der

gleichen Voraussetzung bleibt jeder negative ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{A}_1^0) bei wachsendem sowohl als bei abnehmendem λ beständig negativ.

Es entspricht dann jedem positiven ausgezeichneten Parameterwert bzw. jeder ausgezeichneten Lösung von (\mathfrak{A}_1^0) nicht mehr als ein reeller ausgezeichnete positiver und negativer Parameterwert bzw. eine reelle ausgezeichnete Lösung von (\mathfrak{B}_1) . Keinem der negativen ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{A}_1^0) entspricht ein reeller ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{B}_1) .

Ist noch bekannt, daß der ausgezeichnete Parameterwert $\nu = 0$ von (\mathfrak{A}_1^0) keine weiteren ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{B}_1) liefert, so kann man sagen: damit für die reellen positiven bzw. negativen ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{B}_1) je das gleiche Oszillationstheorem wie für die positiven ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{A}_1^0) gilt, ist hinreichend, daß die Bedingung (U) erfüllt ist.

Zum Beweise sei ν_0 ein ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{A}_1^λ) , $\nu_0 + \Delta\nu_0$ derjenige ausgezeichnete Parameterwert von $(\mathfrak{A}_1^{\lambda+\Delta\lambda})$, der aus ν_0 bei Änderung von λ in $\lambda + \Delta\lambda$ hervorgeht. Die zugehörigen ausgezeichneten Lösungen seien bzw. y_0 und $y_0 + \Delta y_0$. Da beide den gleichen Green'schen Randbedingungen und bzw. den Differentialgleichungen (\mathfrak{A}_1^λ) und

$$(\mathfrak{A}_1^{\lambda+\Delta\lambda}) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d(y_0 + \Delta y_0)}{dx} \right) + (\nu_0 + \Delta\nu_0 + (\lambda + \Delta\lambda) k(x) + r_0(x)) (y_0 + \Delta y_0) = 0$$

genügen, ergibt der Green'sche Satz:

$$\int_a^b y_0 (y_0 + \Delta y_0) (\Delta\nu_0 + \Delta\lambda \cdot k(x)) dx = 0.$$

λ geht analytisch in die Koeffizienten von (\mathfrak{A}_1^λ) ein. Infolgedessen dürfen wir, nach Division mit $\Delta\lambda$, zur Grenze übergehen und erhalten

$$\left(\frac{d\nu_0}{d\lambda} \right)_\lambda = - \frac{\int_a^b k(x) (y_0(x))^2 dx}{\int_a^b (y_0(x))^2 dx}.$$

Nehmen wir insbesondere $\nu_0 = 0$, so ist $\lambda = \lambda_0$ ein ausgezeichnete Parameterwert, y_0 eine zugehörige ausgezeichnete Lösung von (\mathfrak{B}_1) . Ist λ positiv, so wird mithin ν_0 bei zunehmendem λ stets abnehmend durch Null hindurchgehen, wenn

$$(U+) \quad \int_a^b k(x) \cdot (y_0(x))^2 dx > 0.$$

Und das gleiche wird bei abnehmendem, negativen λ stattfinden, wenn

$$(U^-) \quad \int_a^b k(x) (y_0(x))^2 dx < 0.$$

Anders ausgedrückt: wenn ν_0 einmal die Null passiert hat, muß es beständig negativ bleiben, w. z. z. w.

Wir ziehen hieraus noch die weitere Folgerung, daß für jede zum einfachen ausgezeichneten Parameterwert $\lambda = 0$ gehörige ausgezeichnete Lösung y_0

$$(U^0) \quad \int_a^b k(x) (y_0(x))^2 dx = 0$$

wird, sobald der Parameter normiert ist. Da die ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{B}_1) diskret liegen, muß nämlich der ausgezeichnete Parameterwert $\nu_0 = 0$ von (\mathfrak{A}_1^0) in der Umgebung von $\lambda = 0$ sicher von Null verschiedene Werte annehmen, und zwar negative, da der Parameter normiert ist. Wäre nun

$$\int_a^b k y_0^2 dx \neq 0,$$

so ließe sich stets eine Änderung von λ angeben, für die ν_0 positiv würde. Aus dieser Überlegung folgt in Verbindung mit dem oben Gezeigten gleichzeitig, daß unter Annahme von (U) eine etwa vorhandene, zu $\nu = 0$ gehörige ausgezeichnete Lösung von (\mathfrak{A}_1^0) zu keinem weiteren von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwert von (\mathfrak{B}_1) Anlaß gibt. Entsprechendes gilt (wenigstens im definiten Fall) für zweifache ausgezeichnete Parameterwerte $\nu_0 = 0$. Die Darstellung berührt sich im Grundgedanken aufs engste mit der von Herrn Hilb*) gegebenen Behandlung Sturmscher Randbedingungen. Vgl. ferner Richardson, l. c., § 1.

Die Ungleichung (U) besteht im definiten Falle**) d. h. immer dann, wenn $\nu_0 = 0$ ist, wenn also kein ausgezeichneter Parameterwert von (\mathfrak{A}_1^0) negativ ist.

Um dies nachzuweisen bildet man die zu den vorgegebenen Greenschen Randbedingungen und dem Differentialausdruck

$$L(y) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + r_0(x)y$$

gehörige Greensche***) Funktion $G(x, \xi)$; diese gestattet die Darstellung

*) Hilb, Eine Erweiterung des Kleinschen Oszillationstheorems (Jahresb. d. D. Math.-Ver. 1907).

**) Vgl. Hilbert, l. c., 5. Mitt. Für den Fall, daß in der Differentialgleichung (\mathfrak{B}_1) der Koeffizient $k(x)$ unbegrenzt viele Nullstellen im Intervall a, b besitzt, vgl. Lichtenstein, Zur Analysis der unendlich vielen Variablen I. (Rend. Circ. Mat. Palermo, T. XXXVIII, 1914) sowie die Literaturangaben ebenda.

***) Vgl. Hilbert, l. c., 2. Mitt.

$$(I) \quad G(x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_j} \varphi_j(x) \varphi_j(\xi).$$

Dabei sind die ν_j die positiven ausgezeichneten Parameterwerte, φ_j die zugehörigen ausgezeichneten Lösungen von (\mathfrak{A}_1^0) und die Darstellung konvergiert gleichmäßig für alle $a \leq x \leq b$, $a \leq \xi \leq b$. Je nachdem $\nu = 0$ ein ausgezeichneter Parameterwert von (\mathfrak{A}_1^0) für die gegebenen Randbedingungen ist oder nicht, hat man es mit einer Greenschen Funktion im erweiterten oder im gewöhnlichen Sinne zu tun. Der Beweis für die Gültigkeit dieser Darstellung läßt sich mit Hilfe der Differentialgleichung (\mathfrak{A}_1^0) allein erbringen, indem man unter Zuhilfenahme asymptotischer Darstellungen für die Lösungen von (\mathfrak{A}_1^0) bei großen Werten von ν das Verhalten von $G(x, \xi; \mu)$ d. h. der zu $L(y) + \mu y$ (für den betreffenden Wert μ) gehörigen Greenschen Funktion untersucht. Der Beweis ergibt sich aus den Untersuchungen von Herrn Birkhoff.*)

Aus den charakteristischen Eigenschaften der Greenschen Funktion (im gewöhnlichen oder erweiterten Sinne) folgt in bekannter Weise die Symmetrie von $G(x, \xi)$ hinsichtlich der beiden Variablen x, ξ ; sie ist eine Folge des speziellen Charakters der Randbedingungen. (Die Greensche Funktion im gewöhnlichen Sinne liefert einen abgeschlossenen Kern, die im erweiterten Sinne besitzt, als Kern einer Integralgleichung 2. Art betrachtet, die dem Werte $\nu = 0$ zugehörigen ausgezeichneten Lösungen von (\mathfrak{A}_1^0) und nur diese als Nulllösungen.)

Ist ferner $y_0(x)$ eine reelle oder komplexe ausgezeichnete Lösung von (\mathfrak{B}_1) , λ_0 der zugehörige von Null verschiedene reelle oder komplexe ausgezeichnete Parameterwert, so gilt

$$(II) \quad y_0(\xi) = \lambda_0 \int_a^b G(x, \xi) k(x) y_0(x) dx$$

und hieraus folgt

$$\lambda_0 \int_a^b k(x) (y_0(x))^2 dx = \lambda_0^2 \iint_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y_0(x) y_0(\xi) dx d\xi;$$

außerdem ist für zwei verschiedene ausgezeichnete Parameterwerte λ_1, λ_2 bzw. die ausgezeichneten Lösungen $y_1(x), y_2(x)$

$$\int_a^b k(x) y_1(x) y_2(x) dx = 0, \quad \iint_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y_1(x) y_1(\xi) dx d\xi = 0.$$

*) Birkhoff, Boundary value and expansion problems (Trans. Am. Math. Soc., Vol. 9, S. 373 ff.). Birkhoff, Note on the Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations (Rend. Circ. Mat. Palermo, T. XXXVI, S. 115 ff.).

Setzen wir für $G(x, \xi)$ die Entwicklung (I) und integrieren gliedweise, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz gestattet ist, so folgt

$$\lambda_0 \int_a^b k(x) (y_0(x))^2 dx = \lambda_0^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{v_j} \left[\int_a^b k(x) \varphi_j(x) y_0(x) dx \right]^2.$$

Da die v_j alle positiv und, ebenso wie die $\varphi_j(x)$, sämtlich reell sind, so ist für reelle ausgezeichnete Parameterwerte $\lambda_0 \neq 0$ von (\mathfrak{B}_1) tatsächlich (II) erfüllt. Daß (\mathfrak{B}_1) im definiten Falle keine komplexen ausgezeichneten Parameterwerte hat, folgt aus ähnlichen Überlegungen. (Vgl. auch weiter unten.)

Für die definiten Fälle gilt somit der Satz:*) *Normiert man, bei vorgegebenen Randbedingungen, den Parameter der Differentialgleichung (\mathfrak{B}_1) und hat dann die nichtpolare Differentialgleichung (\mathfrak{A}_1^0)*

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (v + r_0(x)) y = 0$$

keinen negativen ausgezeichneten Parameterwert, so ist die Gesamtheit sowohl der positiven als der negativen reellen ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{B}_1) — jede für sich — nach dem nämlichen Oszillationstheorem geordnet, wie die Gesamtheit der positiven ausgezeichneten Parameterwerte der Differentialgleichung (\mathfrak{A}_1^0) .

Damit sind die definiten Fälle erledigt. Im Hinblick auf spätere Anwendung formulieren wir für diese Fälle noch folgenden, dem Hilfssatze Ia entsprechenden

Hilfssatz Ib. *Es sei durch ein festes Greensches System und eine Differentialgleichung*

$$(\mathfrak{B}_1) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda k(x) + r_0(x)) y = 0$$

*ein definites polares Problem bestimmt (und der Parameter in (\mathfrak{B}_1) bereits normiert). Ändert man dann (\mathfrak{B}_1) mit Hilfe eines Parameters ρ , der etwa linear in die Koeffizienten von (\mathfrak{B}_1) eingeht, in zulässiger Weise, wobei $k(x)$ an jeder Stelle des Intervalls $a \leq x \leq b$ wächst (oder doch nicht abnimmt), so bleibt das Problem definit**), alle positiven ausgezeichneten Parameterwerte nehmen ab oder doch nicht zu; im Verlaufe der Änderung werden positive ausgezeichnete Parameterwerte weder gewonnen noch verloren. Nimmt, unter im übrigen gleichen Voraussetzungen, $k(x)$ für alle $a \leq x \leq b$ ab (oder doch nicht zu), so nehmen die negativen ausgezeichneten Parameterwerte sämtlich zu (sicher nicht ab); keiner von ihnen geht verloren. Etwa vorhandene aus-*

*) Vgl. D. I. Teil, § 8.

**) Und kann unter Umständen auch in ein nichtpolares Problem übergehen.

gezeichnete Parameterwerte $\lambda = 0$ bleiben bei den genannten Änderungen erhalten.

Daß bei der Änderung das Problem definit bleibt, ist klar. Zum Beweise der übrigen Behauptungen sei etwa

$$(\mathfrak{B}_1^e) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda(k(x) + \varrho \Delta k(x)) + r_0(x) \right) y = 0$$

gesetzt, wobei die stetige Funktion $\Delta k(x)$ der Ungleichung genügt

$$\Delta k(x) \geq 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Der Greensche Satz, angewandt auf eine ausgezeichnete Lösung $y_0(x)$ von (\mathfrak{B}_1^e) und die ihr entsprechende Lösung $y_0 + \Delta y_0$ von $(\mathfrak{B}_1^{e+\Delta e})$ ergibt beim Übergang zur Grenze

$$\left(\frac{d\lambda_0}{d\varrho} \right)_e = - \frac{\lambda_0 \int_a^b \Delta k(x) y_0^2 dx}{\int_a^b k(x) y_0^2 dx}.$$

Da der Nenner stets von Null verschieden ist, folgt die Behauptung.

Was den *allgemeinen*, also den *nichtdefiniten, polaren Fall* anlangt, so scheint bis jetzt der Nachweis nicht gelungen, daß bei normiertem Parameter ausnahmslos für alle reellen von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwerte bzw. die entsprechenden ausgezeichneten Lösungen die Ungleichung (II) in Geltung bleibt.

Indes kann man durch Betrachtung der Greenschen Funktion im nichtdefiniten Falle wenigstens erkennen, daß es sicher nicht mehr als n_0 reelle von Null verschiedene ausgezeichnete Parameterwerte λ_0 bzw. verschiedene ausgezeichnete Lösungen y_0 geben kann, die eine Ausnahmestellung einnehmen, insofern für sie

$$\lambda_0 \int_a^b k(x) (y_0(x))^2 dx \leq 0$$

ist. n_0 bedeutet hierbei wie früher die Gesamtzahl verschiedener ausgezeichneter Lösungen von (\mathfrak{A}_1^0) , die zu negativen ausgezeichneten Parameterwerten gehören, im Falle der Parameter normiert ist. Die folgende Betrachtung wird gleichzeitig eine obere Schranke für die Anzahl komplexer ausgezeichneter Lösungen des polaren Problems liefern.

Wir beschränken uns vorläufig auf die Betrachtung reeller ausgezeichneter Parameterwerte; der Parameter in (\mathfrak{B}_1) sei normiert. Die zu (\mathfrak{A}_1^0) und den gegebenen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion besitzt n_0 verschiedene zu negativen ausgezeichneten Parameterwerten von (\mathfrak{A}_1^0) gehörige Summanden, es ist also

$$(I) \quad G(x, \xi) = - \sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{v_j} \varphi_j(x) \varphi_j(\xi) + \sum_{\rho=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{v_\rho} \varphi_\rho(x) \varphi_\rho(\xi);$$

die Größen v_j, v_ρ und die Funktionen $\varphi_j(x), \varphi_\rho(x)$ sind alle reellwertig, die v_j, v_ρ sämtlich positiv.

Aus der Integralgleichung (II) folgt für jeden von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwert λ_0 und die zugehörige ausgezeichnete Lösung wie oben

$$\lambda_0 \int_a^b k(x) y_0^2 dx = \lambda_0^2 \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y_0(x) y_0(\xi) dx d\xi.$$

Für alle reellen von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwerte ist also gleichzeitig mit

$$\lambda_0 \int_a^b k(x) y_0^2 dx \cong 0$$

stets auch

$$J_0 = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y_0(x) y_0(\xi) dx d\xi \cong 0.$$

Zunächst werden wir zeigen: es gibt sicher *nicht mehr als n_0 reelle verschiedene ausgezeichnete Lösungen*, die reellen von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwerten zugehören und *für welche das* (mit den ausgezeichneten Lösungen gebildete) *Doppelintegral $J(y)$ kleiner als Null ist*,

$$(1) \quad J(y) = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y(x) y(\xi) dx d\xi < 0.$$

Nehmen wir im Gegenteil an, es gebe $n_0 + 1$ reelle ausgezeichnete Parameterwerte $\lambda_\tau (\tau = 1, \dots, n_0 + 1)$, deren zugehörige ausgezeichnete Lösungen $y_\tau (\tau = 1, \dots, n_0 + 1)$ nur negative Integralwerte $J(y_\tau) = J_\tau$ liefern: In der Reihe $\lambda_1, \lambda_2; \dots, \lambda_{n_0+1}$ sind dabei zweifache ausgezeichnete Parameterwerte, für welche zwei verschiedene zugehörige ausgezeichnete Lösungen negative Integralwerte J_τ liefern, zunächst doppelt zu zählen. Außerdem soll sein

$$(2) \quad \int_a^b k(x) y_\sigma(x) y_\tau(x) dx = 0 = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y_\sigma(x) y_\tau(\xi) dx d\xi.$$

Für $\lambda_\sigma \neq \lambda_\tau$ ist (2) eine direkte Folge aus (II) (S. 89).

Ist im Falle $\lambda_\sigma = \lambda_\tau$ (2) nicht erfüllt, so ersetzen wir y_σ und y_τ durch zwei verschiedene lineare Kombinationen

$$\Phi_\sigma = y_\sigma + c y_\tau, \quad \Phi_\tau = y_\sigma + \gamma y_\tau,$$

welche der Bedingung (2) genüge leisten. Dies ist der Fall, sobald

$$\gamma = \frac{1 - c\eta}{\eta - c}$$

ist, wobei

$$\eta = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y_\sigma(x) y_\tau(\xi) dx d\xi$$

gesetzt wird. Hierbei sind, was immer möglich ist, y_σ und y_τ so normiert, daß die zugehörigen Integrale J gleich -1 werden.

Außerdem wird dann

$$J(\Phi_\sigma) = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) \Phi_\sigma(x) \Phi_\sigma(\xi) dx d\xi = -1 + 2\eta c - c^2,$$

$$J(\Phi_\tau) = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) \Phi_\tau(x) \Phi_\tau(\xi) dx d\xi = \frac{1 - \eta^2}{(\eta - c)^2} (-1 + 2c\eta - c^2).$$

Sobald also $\eta^2 < 1$ ist, liefert $\lambda_\sigma = \lambda_\tau$ wirklich zwei verschiedene der Forderung (1) genügende ausgezeichnete Lösungen. Im Falle $\eta^2 > 1$ hingegen gibt es im wesentlichen nur eine einzige ausgezeichnete Lösung dieser Art; letztere Eventualität ist daher auszuschließen, während $\eta^2 = 1$ sich den später zu erörternden Fällen unterordnet, in denen ein Teil der Integrale J_τ Null ist.

Jedes lineare Aggregat

$$S(x) = \sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau y_\tau(x) \quad [c_\tau \text{ nicht alle } 0]$$

von $(n_0 + 1)$ reellen, den Forderungen (1) und (2) ausnahmslos genügenden stetigen Funktionen $y_\tau (\tau = 1, \dots, n_0 + 1)$ ergibt als zugehörigen Integralwert $J(S)$

$$\begin{aligned} J(S) &= \sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau^2 \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y_\tau(x) y_\tau(\xi) dx d\xi \\ &= - \sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{p_j} \left(\sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau \int_a^b \varphi_j(x) k(x) y_\tau(x) dx \right)^2 \\ &\quad + \sum_{\varrho=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{p_\varrho} \left(\sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau \int_a^b \varphi_\varrho(x) k(x) y_\tau(x) dx \right)^2 < 0. \end{aligned}$$

Die n_0 Gleichungen

$$\sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau \int_a^b \varphi_j(x) k(x) y_\tau(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, n_0,$$

sind hinsichtlich der $n_0 + 1$ reellen Größen c_τ linear und homogen, werden

also unter allen Umständen durch (mindestens) ein System von Größen e_τ befriedigt, die nicht sämtlich Null sind. Für ein solches System bzw. das zugehörige $S(x)$ wäre aber

$$J(S) = \sum_{\rho=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{\nu_\rho} \left(\sum_{\tau=1}^{n_0+1} e_\tau \int_a^b \varphi_\rho(x) k(x) y_\tau(x) dx \right)^2 < 0,$$

was unmöglich ist, da in dieser Ungleichung linker Hand nur positive (höchstens verschwindende) Glieder stehen.

Die Überlegung bleibt anwendbar, wenn an Stelle der reellen ausgezeichneten Parameterwerte oder eines Teiles derselben *komplexe ausgezeichnete Parameterwerte* $\Lambda_\tau = \Lambda'_\tau + i\Lambda''_\tau$ ($\Lambda''_\tau \neq 0$) bzw. die zugehörigen komplexen ausgezeichneten Lösungen $Y_\tau = Y'_\tau + iY''_\tau$ ($Y''_\tau \neq 0$) treten. Λ'_τ , Y'_τ bzw. $i\Lambda''_\tau$, iY''_τ bedeuten die reellen bzw. lateralen Bestandteile der Größen Λ_τ und Y_τ . Aus der Problemstellung folgt übrigens, daß zu einem komplexen ausgezeichneten Parameterwert sicher keine reellwertige ausgezeichnete Lösung gehört, ferner daß mit Λ immer auch der konjugiert komplexe Wert $\bar{\Lambda} = \Lambda' - i\Lambda''$ ausgezeichneten Parameterwert ist. Entspricht dem ausgezeichneten Parameterwert Λ die ausgezeichnete Lösung $Y = Y' + iY''$, so ist die konjugiert komplexe Funktion $\bar{Y} = Y' - iY''$ die zu $\bar{\Lambda}$ gehörige ausgezeichnete Lösung.

Anstatt (1) genügt es jetzt zu fordern, daß

$$(1') \quad J_\tau \neq 0;$$

dabei ist

$$\begin{aligned} J_\tau &= \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y_\tau(x) Y_\tau(\xi) dx d\xi \\ &= 2 \left(\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y'_\tau(x) Y'_\tau(\xi) dx d\xi \right. \\ &\quad \left. + i \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y'_\tau(x) Y''_\tau(\xi) dx d\xi \right). \end{aligned}$$

Dies soll jetzt gezeigt werden.

Die Integralgleichung (II) ergibt, da die ausgezeichneten Lösungen $Y'_\tau + iY''_\tau$ und $Y'_\tau - iY''_\tau$ zu verschiedenen ausgezeichneten Parameterwerten gehören,

$$(1a) \quad \begin{aligned} &\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y'_\tau(x) Y'_\tau(\xi) dx d\xi \\ &= - \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y''_\tau(x) Y''_\tau(\xi) dx d\xi. \end{aligned}$$

Ferner ist für jede zu einem reellen ausgezeichneten Parameterwert gehörige reellwertige ausgezeichnete Lösung y_σ die Bedingung erfüllt

$$(2a) \quad \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y_\tau'(x) y_\sigma(\xi) dx d\xi = 0,$$

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y_\tau''(x) y_\sigma(\xi) dx d\xi = 0.$$

Für jeden von Λ_τ und $\bar{\Lambda}_\tau$ verschiedenen komplexen ausgezeichneten Parameterwert Λ_σ hat man

$$(2b) \quad \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y_\tau'(x) Y_\sigma'(\xi) dx d\xi = 0,$$

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y_\tau''(x) Y_\sigma''(\xi) dx d\xi = 0,$$

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y_\tau'(x) Y_\sigma''(\xi) dx d\xi = 0.$$

Existieren hingegen zwei verschiedene zu Λ_τ gehörige ausgezeichnete Lösungen, etwa $Y_\tau, Y_{\tau+1}$, so gilt zunächst nur

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y_\tau'(x) Y_{\tau+1}'(\xi) dx d\xi$$

$$= - \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y_\tau''(x) Y_{\tau+1}''(\xi) dx d\xi;$$

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y_{\tau+1}'(x) Y_\tau''(\xi) dx d\xi$$

$$= + \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y_{\tau+1}''(x) Y_\tau'(\xi) dx d\xi.$$

Ist für das Paar $Y_\tau, Y_{\tau+1}$ die Bedingung (2b) nicht befriedigt, so ersetzt man wieder Y_τ und $Y_{\tau+1}$ durch zwei verschiedene lineare Kombinationen

$$Z_\tau = Y_\tau + c Y_{\tau+1} \quad \text{und} \quad Z_{\tau+1} = Y_\tau + \gamma Y_{\tau+1}$$

(c und γ sind komplexe Konstanten),

die wiederum ausgezeichnete Lösungen sind und deren reelle bzw. laterale Bestandteile die Bedingungen (2b) erfüllen. Das ist immer möglich. Für Z_τ und $Z_{\tau+1}$ bzw. ihre reellen und lateralen Bestandteile gelten dann außerdem die Gleichungen (1a) und (2a), aber nicht notwendig (1').

Unter den Voraussetzungen (1a), (2a), (2b), (1') läßt sich nun aus jedem System von m komplexen Funktionen Y_ρ ($\rho = 1, \dots, m$) ein System von m reellen stetigen Funktionen z_ρ bilden, das den Bedingungen (1) und (2) genügt und überdies bezüglich jeder reellen ausgezeichneten Lösung y_r die Eigenschaft besitzt, daß

$$(2') \quad \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y_r(x) z_\rho(\xi) dx d\xi = 0.$$

Im Falle

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y'_\rho(x) Y'_\rho(\xi) dx d\xi \neq 0$$

ist nämlich wegen (1a) entweder $Y'_\rho(x)$ oder $Y''_\rho(x)$ der Beitrag, den Y_ρ zu dem neuen Systeme der z_ρ liefert. Ist hingegen

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y'_\rho(x) Y'_\rho(\xi) dx d\xi \\ &= - \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y''_\rho(x) Y''_\rho(\xi) dx d\xi = 0, \end{aligned}$$

so muß wegen (1') sein

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) Y'_\rho(x) Y''_\rho(\xi) dx d\xi \neq 0.$$

Es wird also für eine der reellen Größen $c_\rho = \pm 1$ die Ungleichung gelten

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) (Y'_\rho(x) + c_\rho Y''_\rho(x)) (Y'_\rho(\xi) + c_\rho Y''_\rho(\xi)) dx d\xi < 0.$$

$y_\rho = Y'_\rho + c_\rho Y''_\rho$ ist dann wegen (2b) und (2a) der von Y_ρ herrührende Bestandteil im Systeme der z_ρ .

Nun waren aber in dem oben für reelle ausgezeichnete Lösungen durchgeführten Beweis die Eigenschaft (1) und (2) allein wesentlich. Unser Satz gilt daher allgemein für $(n_0 + 1)$ reelle und komplexe den Bedingungen (2), (2b) ausnahmslos genügende ausgezeichnete Lösungen, sobald nur für jede von ihnen auch (1) bzw. (1') erfüllt ist.

Der bisher ausgeschlossene Fall, daß für alle ausgezeichnete Lösungen des betrachteten Systems oder auch nur für einen Teil derselben die Integrale J verschwinden, läßt sich immer auf den bereits behandelten Fall negativer bzw. von Null verschiedener Integralwerte J zurückführen.

Zu dem Ende betrachte man die Schar von Differentialgleichungen (\mathfrak{B}_1)

$$(\mathfrak{B}_1'') \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda k(x) + r_0(x) - \mu R(x)) y = 0$$

in der Umgebung der Stelle $\mu = 0$. $R(x)$ ist hierbei eine stetige reellwertige Funktion von x , und μ ein reeller Hilfsparameter; für $\mu = 0$ erhält man die ursprüngliche Differentialgleichung (\mathfrak{B}_1). $\lambda = 0$ soll kein ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{B}_1) sein.

Jeder ausgezeichnete Parameterwert λ_1 von (\mathfrak{B}_1^u) ist, als Nullstelle einer in λ und μ ganzen transzendenten, für keinen Wert von μ identisch in λ verschwindenden Funktion $\delta(\lambda, \mu)$, eine stetige*) Funktion $\lambda_1(\mu)$ von μ ; diese letztere wird im allgemeinen, d. h. von diskret liegenden (reellen) Werten von μ abgesehen**), in der Umgebung einer Stelle $\mu = \mu_0$ durch eine nach positiven, ganzen, steigenden Potenzen von $\mu - \mu_0$ fortschreitende konvergente Reihe dargestellt. Ein gleiches gilt für die zugehörige ausgezeichnete Lösung $y_1(x; \mu)$. Ferner ergibt sich die Existenz einer Umgebung $\varepsilon_0: |\mu| < \varepsilon_0$ der Stelle $\mu = 0$, in der $\lambda = 0$ kein ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{B}_1^u) ist, wenn dies für $\mu = 0$ nicht der Fall war; in dieser Umgebung bleibt daher die Greensche Funktion $G(x, \xi; \mu)$ des Differentialausdruckes

$$L(y; \mu) = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + r_0 y - \mu R y$$

eine regulär-analytische Funktion von μ und besitzt stets die gleiche Anzahl n_0 negativer ausgezeichnete Parameterwerte wie für $\mu = 0$.

Wir lassen im Systeme der $y_x (\tau = 1, \dots, n_0 + 1)$ zuerst nur eine einzige reelle oder komplexe ausgezeichnete Lösung von (\mathfrak{B}_1) zu — sie sei etwa mit y_1 bezeichnet — deren Integral J_1 Null ist. Auf den Fall einer größeren Zahl derartiger Funktionen y_x übertragen sich die nachstehenden Überlegungen ohne weiteres. Den oben angeführten Stetigkeitssätzen zufolge existiert nun eine positive Größe $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ derart, daß bei Beschränkung auf Änderungen $|\mu - \mu_0| = |\Delta\mu| \leq \varepsilon_1$, ($\mu_0 = 0$), keines der zu y_x ($\tau = 2, \dots, n_0 + 1$) gehörigen Integrale J_x ($\tau = 2, \dots$) verschwindet, und daß keiner der zugehörigen ausgezeichneten Parameterwerte λ_x ($\tau = 1, \dots, n_0 + 1$) verloren geht.

Ändert man demgemäß μ , von Null beginnend, um den reellen Betrag $\Delta\mu$, so wird hierbei $y_1(x; 0)$ in eine andere ausgezeichnete Lösung $y_1(x; \Delta\mu) = y_1(x; 0) + \Delta y_1(x)$, $\lambda_1(0)$ in einen anderen ausgezeichneten Parameterwert $\lambda_1(\Delta\mu) = \lambda_1(0) + \Delta\lambda_1$ übergehen und der Greensche Satz ergibt

$$(III) \quad \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\mu} \int_a^b k(x) y_1(x; \Delta\mu) y_1(x; 0) dx = \int_a^b R(x) y_1(x; \Delta\mu) y_1(x; 0) dx.$$

Der Stetigkeit von $\lambda_1(\mu)$ zufolge bleibt der Differenzenquotient $\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\mu}$ endlich, solange $\Delta\mu \neq 0$ ist. Da ferner $y_1(x; \mu)$ nicht identisch in x verschwindet

*) Vgl. D. S. 22. **) Vgl. S. 98 der vorliegenden Arbeit.

und stetige Funktion von μ und x ist, läßt sich bei geeigneter Verfügung über $R(x)$ eine positive Größe ε_3 bestimmen, so daß

$$\int_a^b R(x) y_1(x; 0) y_1(x; \Delta\mu) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b R(x) (y_1(x; \Delta\mu))^2 dx$$

von Null verschieden bleiben, solange $|\Delta\mu| \leq \varepsilon_3 \leq \varepsilon_1$ ist; dabei kann $R(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$) angenommen werden. Dann folgt aber aus (III), daß $\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\mu}$ mit gegen Null gehendem μ absolut genommen größer wird als jede gegebene positive Größe.

An der Stelle $\mu = 0$, $\lambda = \lambda_1(0)$ sind daher eine endliche Zahl k von Lösungen $\lambda_1^{(h)}(\mu)$ ($h = 1, \dots, k$) der Gleichung $0 = \delta(\lambda, \mu)$ verzweigt. Es ist ein charakteristischer Unterschied des polaren Falles gegenüber dem nicht-polaren, daß derartige Verzweigungsstellen nur im ersteren auftreten können.

Da die Verzweigungsstellen von $\lambda_1(\mu)$ diskret liegen,^{*} gibt es eine Umgebung $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$ von $\mu = 0$, in welcher, von $\mu = 0$ abgesehen, die Differentialquotienten $\frac{d\lambda_1^{(h)}}{d\mu}$ ($h = 1, \dots, k$) endlich und stetig bleiben. In dieser Umgebung liefern die Zweige $\lambda_1^{(h)}(\mu)$ verschiedene ausgezeichnete Parameterwerte bzw. verschiedene zugehörige ausgezeichnete Lösungen $y_1^{(h)}(x; \mu)$. Wir schränken überdies ε_3 so ein, daß in der Umgebung $|\lambda - \lambda_1(0)| < \delta$ von $\lambda_1(0)$ außer den Werten $\lambda_1^{(h)}(\mu)$ keine weiteren ausgezeichneten Parameterwerte sich vorfinden, sobald $|\mu| \leq \varepsilon_3$; $\delta > 0$ ist eine hinreichend kleine, vorgegebene, positive Größe. Im Rahmen dieser Bedingung kann über ε_3 noch so verfügt werden, daß auch für $|\mu| \leq \varepsilon_3$

$$\int_a^b R(x) (y_1^{(h)}(x; \mu))^2 dx \neq 0, \quad h = 1, 2, \dots, k.$$

In der Umgebung ε_3 , von $\mu = 0$ abgesehen, ist aber jetzt

$$J_1^{(h)} \neq 0, \quad J_1^{(h)} = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi; \mu) k(x) k(\xi) y_1^{(h)}(x; \mu) y_1^{(h)}(\xi; \mu) d\xi dx,$$

$$\lambda_1^{(h)}(\mu) \int_a^b k(x) (y_1^{(h)}(x; \mu))^2 dx = (\lambda_1^{(h)})^2 J_1^{(h)}, \quad \lambda_1^{(h)} \neq \lambda_1(0), \quad h = 1, \dots, k.$$

Daß $J_1^{(h)} \neq 0$ ist, ergibt sich aus dem eben Bemerkten, wenn (III) auf eine solche Stelle μ und eine hinreichend benachbarte $\mu + \Delta\mu$ angewandt und der Grenzübergang $\lim (\mu + \Delta\mu) = \mu$ ausgeführt wird.

War $\lambda_1(0)$ ein komplexer ausgezeichneter Parameterwert, so liefert dem eben Bewiesenen zufolge jede reelle Änderung $|\Delta\mu| \leq \varepsilon_3$ ein System

^{*} Es folgt dies unter anderem auch daraus, daß $\frac{d\mu}{d\lambda}$ in einer Umgebung von $\lambda = \lambda_1(0)$, $\mu = 0$ eindeutig und stetig ist (vgl. (III)) und nicht identisch verschwindet.

von mindestens $n_0 + 1$ Funktionen y_x , das die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Das gleiche hat statt, wenn $\lambda_1(0)$ reell war und bei einer Änderung $|\Delta \mu| \leq \varepsilon_3$ einer der Zweige $\lambda_1^{(2)}(\mu)$ komplexe Werte liefert.

War hingegen $\lambda_1(0)$ reell und führen die sämtlichen in $\mu \neq 0$, $\lambda = \lambda_1(0)$ zusammenhängenden Zweige für eine reelle Änderung von μ zu reellen Werten $\lambda_1^{(2)}(\mu)$, so sind die den beiden kleinsten so entstehenden reellen ausgezeichneten Parameterwerten $\lambda_1^{(1)}(\mu)$, $\lambda_1^{(2)}(\mu)$ entsprechenden (nicht verschwindenden) Integrale $J_1^{(1)}$, $J_1^{(2)}$ von verschiedenem Vorzeichen. Tatsächlich entspricht der ausgezeichnete Parameterwert $\lambda_1(0)$ von (\mathfrak{B}_1) bzw. die ausgezeichnete Lösung $y_1(x; 0)$ dem Nullwerden eines ganz bestimmten ausgezeichneten Parameterwertes $\nu(\lambda = 0, \mu = 0)$ von (\mathfrak{A}_1^0) ; die (bzw. eine) zu $\nu(0, 0)$ gehörige ausgezeichnete Lösung von (\mathfrak{A}_1^0) werde mit $\varphi(x; \lambda = 0, \mu = 0)$ bezeichnet. Bei genügender Beschränkung der reellen Änderung von μ im Rahmen der Bedingung $|\mu| < \varepsilon_3$ entsprechen die ausgezeichneten Parameterwerte $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$ von (\mathfrak{B}_1^{μ}) mit den zugehörigen ausgezeichneten Lösungen $y_1^{(1)}$, $y_1^{(2)}$ sicher der ausgezeichneten Lösung $\varphi(x; \lambda = 0, \mu)$ von

$$(\mathfrak{A}_1^{\mu}) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (r_0(x) - \mu R(x) + \nu) y = 0, \quad \nu = \nu(\lambda = 0, \mu),$$

wobei $\varphi(x; \lambda = 0, \mu)$ ihrerseits gerade der Lösung $\varphi(x; \lambda = 0, \mu = 0)$ von (\mathfrak{A}_1^0) entspricht. Zwischen $\lambda_1^{(1)}(\mu)$ und $\lambda_1^{(2)}(\mu)$ findet sich kein weiterer der Lösung $\varphi(x; \lambda = 0, \mu)$ entsprechender reeller ausgezeichneten Parameterwert von (\mathfrak{B}_1^{μ}) , d. h. $\lambda_1^{(1)}(\mu)$ und $\lambda_1^{(2)}(\mu)$ repräsentieren zwei „unmittelbar“ aufeinander folgende Vorzeichenwechsel von $\nu(\lambda, \mu)$, bei variablem λ und festem μ . Daraus folgt die Behauptung.

Die übrigen Fälle erledigen sich in ganz entsprechender Weise. Aber auch die bisher festgehaltene Annahme, daß $\lambda = 0$ kein ausgezeichneten Parameterwert sei, ist unwesentlich. Man fordere nämlich, daß $R(x)$ nur positive Werte annehme; das ist, wie schon oben angedeutet, im Rahmen der über $R(x)$ bereits getroffenen Festsetzungen gewiß möglich. Läßt man μ , von Null beginnend, positive Werte annehmen, so wachsen alle ausgezeichneten Parameterwerte ν_ρ von (\mathfrak{A}_1^0) , insbesondere wird also der ausgezeichnete Parameterwert $\nu = 0$ der ursprünglichen Differentialgleichung (\mathfrak{A}_1^0) positiv. Die (gewöhnliche) Greensche Funktion des neuen Problems hat bei normiertem Parameter sicher nicht mehr negative ausgezeichnete Parameterwerte als die (erweiterte) Greensche Funktion des ursprünglichen.

Hätte man unter den zuletzt genannten Annahmen und unter Zugrundelegung etwa eines definiten Falles den Parameter μ in der Differentialgleichung (\mathfrak{B}_1^{μ}) abnehmen lassen, so wären die ausgezeichneten Parameterwerte $\lambda = 0$ von (\mathfrak{B}_1) in komplexe von (\mathfrak{B}_1^{μ}) übergegangen, wie

die obigen Erörterungen erkennen lassen. Damit ist schließlich die Möglichkeit komplexer ausgezeichnete Parameterwerte nachgewiesen.

Werden zur Abkürzung alle reellen von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{B}_1) , deren zugehörige ausgezeichnete Lösungen zu nicht-positiven Integralwerten J führen, als *irregulär*, alle übrigen als *regulär* bezeichnet, so läßt das gewonnene Ergebnis sich so formulieren: die Anzahl der Paare konjugiert komplexer vermehrt um die Anzahl der irregulären reellen ausgezeichneten Parameterwerte beträgt insgesamt höchstens n_0 . (Jeder zweifache ausgezeichnete Parameterwert ist hierbei doppelt zu zählen, sofern er zwei irreguläre bzw. zwei verschiedene komplexe ausgezeichnete Lösungen liefert.)

Es gibt also bei vorgegebener Differentialgleichung und vorgegebenen Randbedingungen immer einen positiven ausgezeichneten Parameterwert N_0 von (\mathfrak{A}_1^0) von der Eigenschaft, daß für alle reellen ausgezeichneten Lösungen y_j und die zugehörigen ausgezeichneten Parameterwerte λ_j von (\mathfrak{B}_1) , die N_0 oder größeren positiven ausgezeichneten Parameterwerten von (\mathfrak{A}_1^0) entsprechen,

$$\lambda_j \int_a^b k y_j^2 dx > 0$$

ist. Jedem ausgezeichneten Parameterwert $N \geq N_0$ von (\mathfrak{A}_1^0) entspricht ein und nur ein positiver sowie ein und nur ein negativer ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{B}_1) . Mit anderen Worten: oberhalb der zu N_0 gehörigen Oszillationszahl gilt das Oszillationstheorem des definiten Falles.*)

Entsprechen nun dem (reellen) ausgezeichneten Parameterwert $\nu_0 < N_0$ von (\mathfrak{A}_1^0) , wobei $\nu_0 > 0$ (bzw. $\nu_0 < 0$), im ganzen l verschiedene reelle positive ausgezeichnete Parameterwerte $\tilde{\lambda}_0^{(k)}$ ($k=1, \dots, l$) von (\mathfrak{B}_1) und finden sich unter diesen im ganzen m reguläre $\tilde{\lambda}^{(i)}$ ($i=1, \dots, m$) und n irreguläre $\tilde{\lambda}^{(j)}$ ($j=1, \dots, n$), so ist neben $l = m + n$ stets $m - 1 \leq n$, bzw. $m \leq n$. Sind nämlich die irregulären ausgezeichneten Parameterwerte $\tilde{\lambda}_0^{(j)}$ der Größe nach geordnet $\tilde{\lambda}_0^{(1)} < \tilde{\lambda}_0^{(2)} < \dots < \tilde{\lambda}_0^{(n)}$, so kann zwischen $\tilde{\lambda}_0^{(j)}$ und $\tilde{\lambda}_0^{(j+1)}$ immer höchstens ein regulärer ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{B}_1) liegen, der gleichfalls dem ν_0 entspricht. Außerdem kann höchstens ein (bzw. kein) regulärer Parameterwert kleiner sein als $\tilde{\lambda}_0^{(1)}$, höchstens einer größer als $\tilde{\lambda}_0^{(n)}$: dies folgt aus den eingangs des § 5 angestellten Überlegungen. Nun ist aber $(m-1)$ bzw. m gerade der Überschub regulärer ausgezeichnete Parameterwerte über die durch das nicht gestörte Oszillationstheorem geforderte Anzahl 1 bzw. 0. Dieser Überschub beträgt mithin insgesamt nicht mehr als

$$\sum n \leq n_0,$$

*) Nicht entschieden ist, ob irreguläre (reelle) ausgezeichnete Parameterwerte wirklich auftreten.

die Summe linker Hand erstreckt über alle Gruppen reeller ausgezeichnete Parameterwerte von (\mathfrak{B}_1) , die irreguläre ausgezeichnete Parameterwerte enthalten, und deren jede einem einzigen ausgezeichneten Parameterwert $\nu_0 \geq 0$ bzw. der zugehörigen ausgezeichneten Lösung von (\mathfrak{A}_1^0) entspricht.

Unter anderem ergibt sich also: *Liegt ein polares Problem vor, gegeben durch ein Paar Greenscher Randbedingungen und eine Differentialgleichung (\mathfrak{B}_1) , deren Parameter normiert sei, und besitzt das zu (\mathfrak{A}_1^0) und den gleichen Randbedingungen gehörige nichtpolare Problem gerade n_0 negative, aber keine verschwindenden ausgezeichneten Parameterwerte, so ist die Gesamtheit der positiven sowohl als der negativen ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{B}_1) — jede für sich — nach dem gleichen Oszillationstheorem geordnet wie die der positiven ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{A}_1^0) , sobald man von höchstens n_0 irregulären und höchstens n_0 regulären (positiven und negativen, insgesamt also von höchstens $2n_0$ reellen) ausgezeichneten Parameterwerten des polaren Problems absieht.*

§ 6.

Das Oszillationstheorem für definite polare Fälle der Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x, \lambda) y = 0$.

Zum Schlusse soll mit den entwickelten Methoden noch eine Verallgemeinerung des Oszillationstheorems im definiten polaren Falle (§ 5) behandelt werden. Hierbei schlagen wir im wesentlichen den gleichen Weg ein, der auch bei der Untersuchung in § 4 zum Ziele führte. Auch hier kommen nur reelle Werte des Parameters λ in Betracht.

Es sei ein System Greenscher Randbedingungen und die Differentialgleichung (\mathfrak{B})

$$(\mathfrak{B}) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + q(x, \lambda) y = 0$$

gegeben. Über den Koeffizienten $q(x, \lambda)$ von (\mathfrak{B}) werden dabei folgende Voraussetzungen gemacht.

Bedingung (\mathfrak{B}) 1. $q(x, \lambda)$ und $\frac{\partial q(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ sind eindeutige, stetige, für reelle

Werte von x und λ reellwertige Funktionen von x und λ .

2. $\frac{\partial q(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ nimmt, als Funktion von λ betrachtet, also bei festgehaltenem x , mit wachsendem λ sicher nicht ab.

3. Für die Punkte x mindestens eines festen Teilintervalles ξ_1, ξ_2 ($a \leq \xi_1 < \xi_2 \leq b$) ist $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(x, \lambda) = +\infty$. Für die Punkte mindestens eines festen Teilintervalles η_1, η_2 ($\eta_1 < \eta_2$) ist $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} q(x, \lambda) = +\infty$.

Zuerst bildet man die Schar von Differentialgleichungen (\mathfrak{A}_1)

$$(\mathfrak{A}_1^{\rho}) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (\nu + q(x, \rho))y = 0,$$

wobei also ρ ein Hilfsparameter ist, und betrachtet das durch (\mathfrak{A}_1^{ρ}) und die gegebenen Randbedingungen bestimmte Oszillationstheorem. Λ sei ein Wert von ρ , für welchen dieses Oszillationstheorem die, für alle möglichen Werte von ρ auftretende, Mindestanzahl negativer ausgezeichnete Parameterwerte ν aufweist. Wird ein Wert Λ , für den $\nu = 0$ die geringste Anzahl ausgezeichnete Lösungen von (\mathfrak{A}_1^{Λ}) liefert, als Nullpunkt der Zählung des Parameters λ gewählt, so heißt, wie früher, der Parameter in (\mathfrak{B}) normiert.

Im folgenden wird die Annahme zugrunde gelegt, daß in bezug auf die gegebenen Randbedingungen kein ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{A}_1) Null oder negativ ist, sobald der Parameter in (\mathfrak{B}) normiert wird.

(\mathfrak{B}) kann unter dieser Voraussetzung nicht mehr als zwei ausgezeichnete Lösungen besitzen, die zum gleichen Paare durch die Randbedingungen einander zugeordneter Oszillationszahlen und zu positiven ausgezeichneten Parameterwerten λ gehören. Seien im Gegenteil $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ drei einfache, zum betrachteten Oszillationszahlenpaar gehörige positive ausgezeichnete Parameterwerte von (\mathfrak{B}). Zufolge der Voraussetzungen über $q(x, \lambda)$ kann man

$$(1') \quad q(x, \lambda_j) = \lambda_j k_j(x) + q(x, 0) \left(\geq \lambda_j \left(\frac{\partial q(x, \rho)}{\partial \rho} \right)_{\rho=0} + q(x, 0) \right),$$

$$a \leq x \leq b, \quad j = 1, 2, 3,$$

setzen, wenn

$$k_j(x) = \frac{1}{\lambda_j} \int_0^{\lambda_j} \frac{\partial q(x, \rho)}{\partial \rho} d\rho, \quad j = 1, 2, 3.$$

Da nun $\frac{\partial q}{\partial \lambda}$ mit wachsendem λ sicher nicht abnimmt, so gilt

$$(1) \quad \left(\frac{\partial q(x, \rho)}{\partial \rho} \right)_{\rho=0} \leq k_1(x) \leq k_2(x) \leq k_3(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Zum Beweise benutzt man den Mittelwertsatz für Integrale.

Die Greenschen Probleme, die aus den gegebenen Randbedingungen und den Differentialgleichungen (\mathfrak{B}_1^j)

$$(\mathfrak{B}_1^j) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda k_j(x) + q(x, 0))y = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

sich ergeben, sind entweder nichtpolar oder polar definit und liefern die positiven ausgezeichneten Parameterwerte bzw. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Den Ungleichungen (1) zufolge kann man stets durch eine zulässige Änderung von der in Hilfssatz Ia bzw. Ib charakterisierten Art (\mathfrak{B}_1^j) in (\mathfrak{B}_1^j) und diese wieder in (\mathfrak{B}_1^j) überführen. Dabei nehmen die positiven ausgezeichneten

Parameterwerte dieser Differentialgleichungen sicher nicht zu und es findet kein Gewinn oder Verlust von solchen ausgezeichneten Parameterwerten bzw. ausgezeichneten Lösungen statt. Die zulässige Änderung würde demnach ergeben, daß (\mathfrak{B}_1^2) drei verschiedene, dem gleichen Paare von Oszillationszahlen entsprechende reelle ausgezeichnete Lösungen besitzt. Dies widerspricht aber dem für die positiven ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{B}_1^2) geltenden Oszillationstheorem (des nichtpolaren bzw. des polaren definiten Falles). Die Annahme, daß etwa $\lambda_1 = \lambda_2$ ein zweifacher ausgezeichneter Parameterwert von (\mathfrak{B}) ist, schließt, wie ebenso gezeigt wird, die Existenz eines davon verschiedenen ausgezeichneten Parameterwertes λ_3 aus. In gleicher Weise wird der Satz für negative Werte von λ bewiesen.

(\mathfrak{B}) besitzt aber auch die sämtlichen, durch das Oszillationstheorem für den definiten Fall der Differentialgleichung (\mathfrak{B}_1) geforderten, ausgezeichneten Lösungen bzw. ausgezeichneten Parameterwerte. Das läßt sich wie im § 5 unter Benutzung der Ergebnisse von § 4 nachweisen, wesentlich auf Grund der über $\lim_{\lambda \rightarrow (\pm)\infty} q(x, \lambda)$ gemachten Annahme.

Den oben angestellten Betrachtungen läßt sich noch folgendes entnehmen. Jeder positive ausgezeichnete Parameterwert λ_0 von (\mathfrak{B}) läßt sich gleichzeitig auffassen als positiver ausgezeichnete Parameterwert des entsprechenden durch die Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1^{\lambda_0})$

$$(\mathfrak{B}_1^{\lambda_0}) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda k_0(x) + q(x, 0))y = 0, \quad k_0(x) = \frac{1}{\lambda_0} \{q(x, \lambda_0) - q(x, 0)\},$$

bestimmten (nichtpolaren oder polaren definiten) Randwertproblems. Mit hin gilt für die zugehörige ausgezeichnete Lösung y_0

$$\lambda_0 \int_a^b k_0(x) (y_0(x))^2 dx > 0;$$

andererseits ist

$$k_0(x) \leq \left(\frac{\partial q(x, \varrho)}{\partial \varrho} \right)_{\varrho = \lambda_0}.$$

Daher ergibt sich

$$(U) \quad \lambda_0 \int_a^b \left(\frac{\partial q(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda = \lambda_0} (y_0(x))^2 dx > 0.$$

(U) ist auch für negative ausgezeichnete Parameterwerte λ_0 von (\mathfrak{B}) richtig.

Wir fassen das Ergebnis folgendermaßen zusammen:

Für die reellen positiven sowohl als für die negativen ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{B}) gilt unter der Voraussetzung, daß der Parameter in (\mathfrak{B}) normiert und daß kein ausgezeichnete Parameterwert von (\mathfrak{A}_1) Null oder negativ ist, je das nämliche Oszillationstheorem wie für die positiven ausgezeichneten Parameterwerte von (\mathfrak{A}_0) . Jeder reelle (von Null verschiedene)

ausgezeichnete Parameterwert λ_0 von (B) genügt mit der zugehörigen ausgezeichneten Lösung y_0 der Ungleichung

$$\lambda_0 \int_a^b \left(\frac{\partial q(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} (y_0(x))^2 dx > 0.$$

Auf die Frage, wie die Verhältnisse sich für den Fall gestalten, daß p von λ abhängt, ferner inwieweit die Bedingungen (B) als notwendig für die Existenz des Oszillationstheorems anzusehen sind (vgl. § 4) soll nicht eingegangen werden.

Schlußbemerkung.

Zum Schlusse mag auf weitere Anwendungen der entwickelten Methoden hingewiesen werden.

Für die (sich selbst adjungierte) Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + \lambda q(x) y = 0, \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0, \quad a \leq x \leq b,$$

und eine Reihe von speziellen Greenschen Randbedingungen lassen sich auf ähnlichem Wege Oszillationstheoreme gewinnen*). Durch entsprechende Modifikation der Betrachtungen des § 4 vorliegender Arbeit übertragen sich diese Sätze auf Differentialgleichungen, deren Koeffizienten allgemeinere Funktionen von λ sind. Auch die Randbedingungen können dann noch von λ abhängen. Hierher gehören unter anderem gewisse Probleme, deren Behandlung man Liouville**) verdankt.

Würzburg, 1. Oktober 1913.

*) Vgl. D. II. Teil.

**) Vgl. Liouville, J. de Math. (1) 3 (1838), S. 561; hierzu auch Birkhoff, Annals of Math. (2), Bd. 12, S. 103 ff.