Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden.

Von

Georg Hamel in Berlin.

Es dürfte nützlich sein, zuweilen die allgemeinen Fortschritte, welche die Analysis in den letzten Jahren gemacht hat, an einem bestimmten Beispiel zu prüfen. Das soll hier an einer Aufgabe geschehen, die technisch und physikalisch wichtig ist und der Herr Duffing eine Monographie in der Sammlung Vieweg (Nr. 41/42) gewidmet hat[1]):

Ein Pendel, das der Wirkung der Schwere unterworfen ist, wird außerdem von einer periodischen Kraft angeregt. Bei Einführung geeigneter Maßstäbe lautet die Differentialgleichung für den Ausschlagwinkel x

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \alpha^2 \sin x = \beta \sin t,$$

wo α, β gegebene Konstante sind. Sie ist also nicht linear. Herr Duffing setzt angenähert $\sin x \approx x - \frac{1}{3} x^3$, nimmt die Existenz einer Lösung von der Periode 2π an, approximiert sie in rohester Weise durch $x = A \sin t$, also das erste Glied der Fourierschen Entwicklung, und findet nach verschiedenen Methoden für A eine Gleichung dritten Grades

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) A - \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{1}{8} A^3,$$

die er genau diskutiert. Es zeigt sich, daß sie zuweilen, nämlich stets für $\alpha \leqq 1$, aber auch noch für $\alpha > 1$ und hinreichend große β, nur eine Lösung hat, die dann negativ ist, dagegen für $\alpha > 1$ und hinreichend kleine β drei Lösungen, von denen zwei positiv sind und eine negativ ist. Nur die kleinere der beiden positiven Lösungen im letzteren Falle entspricht der bekannten Lösung der linearen Gleichung $\ddot{x} + \alpha^2 x = \beta \sin t$ und geht für hinreichend kleine β in diese über. Dementsprechend zeigt auch der Versuch bei Steigerung von β, namentlich wenn α dicht oberhalb 1 liegt,

[1]) „Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz" 1918.

ein plötzliches Überschlagen einer erregten Schwingung mit gleicher Phase $(A > 0)$ in eine erregte Schwingung mit entgegengesetzter Phase $(A < 0)$: β ist dann so groß geworden, daß nur mehr eine negative Lösung der Gleichung dritten Grades existiert.

Herr Horn[2]) hat bereits die vorliegende Differentialgleichung behandelt, seine Methode ist aber nur bei hinreichend kleinem β brauchbar und auch nur, wenn α keine ganze Zahl ist (siehe § 4).

Wir wollen die Differentialgleichung des Herrn Duffing in der ursprünglichen Form hier etwas genauer untersuchen.

§ 1.

Nachweis der Existenz periodischer Lösungen.

Die Differentialgleichung $\ddot{x} + \alpha^2 \sin x = \beta \sin t$ gehört zu dem Variationsproblem

$$J \equiv \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \alpha^2 \cos x + x\beta \sin t\right] dt = \text{Min.}$$

Die periodischen Lösungen ergeben sich dadurch, daß man verlangt, an den Grenzen 0 und 2π habe x denselben Wert. Das Verschwinden der ersten Variation gibt dann nicht nur die Differentialgleichung, sondern auch die Gleichheit von $\dot{x}$ an den Grenzen und damit die Periodizität. Nun ist J nach unten beschränkt, also die Existenz einer unteren Grenze sichergestellt; denn es ist nach einmaliger partieller Integration des letzten Gliedes

$$J = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \alpha^2 \cos x + \dot{x}\beta \cos t\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(\dot{x} + \beta \cos t)^2 + \alpha^2 \cos x - \frac{1}{2}\beta^2 \cos^2 t\right] dt$$

$$> \int_0^{2\pi} \left[-\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2 \cos^2 t\right] dt = -\left(\alpha^2 + \frac{1}{4}\beta^2\right) 2\pi.$$

Betrachtet man statt J das Integral

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(\dot{x} + \beta \cos t)^2 + \alpha^2 (1 + \cos x)\right] dt,$$

so gehört $J_1 = \text{Min.}$ zur selben Differentialgleichung und hat einen stets positiven Integranden.

---

[2]) Horn: Über kleine, endliche erzwungene Schwingungen, Archiv Math. Phys. 28 (1920).

Weiterhin ist die zweite Ableitung des Integranden nach $\dot{x}$ gleich 1 und also stets positiv. Mithin ist das Variationsproblem nach der Ausdrucksweise Hilberts[3]) ein reguläres. Allerdings gilt das nur, solange $dt > 0$, d. h. Kurven betrachtet werden, für die x eine eindeutige Funktion von t ist. Es könnte also noch sein, daß die Kurven, deren J_1 sich der unteren Grenze nähert, immer steiler würden und keine Grenzkurve mit endlichem $\dot{x}$ besäßen. Wenn wir aber noch zeigen, daß wir uns von vornherein auf Kurven mit begrenztem $\dot{x}$ beschränken können, so lassen sich die Betrachtungen von Hilbert[3]), Carathéodory[4]) u. a.[5]) auf unser Problem übertragen. D. h. es läßt sich die Existenz mindestens einer periodischen Lösung behaupten. Da die Art der Aufgabe Lösungen mit Knicken ausschließt, $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_2 \text{ führt zu } \dot{x}_1 = \dot{x}_2\right)$ muß diese Lösung zugleich eine Lösung unserer Differentialgleichung mit stetiger Tangente sein. Wegen der Periodizität des Integranden kann angenommen werden, daß der Anfangs- und gleiche Endwert von x zwischen 0 und 2π liegt. Da weiter nach der Differentialgleichung $\left|\frac{d^2 x}{dt^2}\right| \leqq \alpha^2 + \beta$ ist, ergibt sich bei den Integralen der Differentialgleichung für die Differenz irgend zweier $\dot{x}$-Werte, $|\triangle \dot{x}| < |\alpha^2 + \beta| \, 2\pi$. Da sicher wegen der Periodizität für alle in Betracht kommenden Kurven irgendwo $\dot{x} = 0$ sein muß, kann $|\dot{x}| < 2\pi(\alpha^2 + \beta)$ und somit $|x| < 2\pi + 4\pi^2(\alpha^2 + \beta)$ angenommen werden. Demnach lassen wir zur Konkurrenz nur solche Kurven zu, für die

1. $|x| \leqq 2\pi + 4\pi^2(\alpha^2 + \beta)$; unsere Kurven liegen also in einem bestimmten Rechteck der x, t-Ebene.
2. $|\dot{x}| \leqq 2\pi(\alpha^2 + \beta)$.

Unter diesen Kurven gibt es jetzt nach den oben zitierten Beweismethoden sicher eine, welche J_1 zum Minimum macht, die nebst ihrer ersten Ableitung stetig ist und sich aus Stücken zusammensetzt, die entweder Lösungen der Differentialgleichung sind oder dem Rande des Gebietes angehören, oder aber Gerade der Grenzsteilheit $\pm 2\pi(\alpha^2 + \beta)$ sind.

Die Ungleichheit 2. schließt das Erreichen der Grenzen des Gebietes aus, aber auch Grenzgerade der Steilheit $\pm 2\pi(\alpha^2 + \beta)$ können nicht vorkommen. Denn sonst müßte es einen verbindenden Extremalbogen geben, für den an den Grenzen $\dot{x} = \pm 2\pi(\alpha^2 + \beta)$ und zwischen-

[3]) Hilbert: Über das Dirichletsche Prinzip, Jahresberichte der D. M. V. 1899, Math. Ann. 59 (1901). Noble: Dissertation Göttingen 1901.

[4]) Carathéodory: Math. Ann. 62 (1906).

[5]) Weitere Literaturangaben in Bolzas Variationsrechnung. Siehe auch Birkhoff: Dynamical systems with two degrees of freedom. Transactions Am. Math. Soc. 18 (1917).

durch irgendwie $\dot{x} = 0$, was nach obigem ausgeschlossen ist. Mithin kann die Kurve, welche das Minimum erzeugt, nur eine stetige Lösung der Differentialgleichung sein, w. z. b. w. Es kann aber mehrere periodische Lösungen geben.

§ 2.

Das Ritzsche Verfahren [6]).

Man sieht leicht, daß das periodische x von der Form

$$x = A \sin t + A_3 \sin 3t + A_5 \sin 5t + \dots$$

ist. Es liegt demnach nahe, x durch eine entsprechende endliche Summe zu approximieren und nun die Koeffizienten A so zu bestimmen, daß J ein Minimum wird. Wegen der Schwierigkeit der Ausrechnung will ich mich wie Duffing zunächst auf die roheste Annäherung $x = A \sin t$ beschränken. Man erhält so

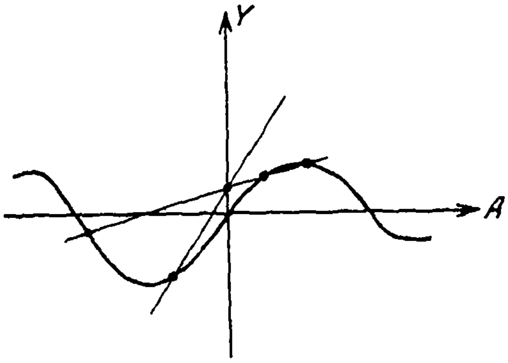

Fig. 1.

$$\frac{1}{2}\pi A^2 + \alpha^2 \int_0^{2\pi} \cos(A \sin t)\, dt + A\beta\pi = \text{Min.}$$

und daraus

$$A - \frac{\alpha^2}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin t \sin(A \sin t)\, dt + \beta = 0,$$

oder, wie man leicht durch Reihenentwicklung nachweist,

$$\text{(I)} \qquad A - 2\alpha^2 J_1(A) + \beta = 0,$$

wo

$$J_1(A) = \frac{A}{2}\left(1 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 \frac{1}{2\cdot 1} + \left(\frac{A}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} - \dots\right)$$

die bekannte Besselsche Funktion ist. Bricht man die Entwicklung beim zweiten Gliede ab, so erhält man die Duffingsche Gleichung, doch leitet Herr Duffing auch in einer Anmerkung (Seite 75) unsere Gleichung (I) ab. Um die Gleichung (I) zu lösen, wird man die beiden Kurven

$$y = 2J_1(A) \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{\alpha^2}A + \frac{1}{\alpha^2}\beta$$

zeichnen und zum Schnitt bringen (Fig. 1). Man erkennt das Duffingsche Resultat im wesentlichen wieder. Für $\alpha \leq 1$ gibt es sicher eine und nur eine Lösung und diese ist negativ; desgleichen noch für $\alpha > 1$ und große $\frac{\beta}{\alpha^2}$; dagegen für $\alpha > 1$ und hinreichend kleine $\frac{\beta}{\alpha^2}$ gibt es drei, für sehr kleine $\frac{\beta}{\alpha^2}$

[6]) Ritz: „Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik", J. f. Math. **135** (1908); Oeuvres, S. 192.

sogar fünf und noch mehr Lösungen. Ob aber letzteren wegen des dann sehr großen A irgendeine physikalische Bedeutung zukommt, muß dahingestellt bleiben. Um das Ritzsche Verfahren weiter auszudehnen, müßte man die Fouriersche Entwicklung des Sinus einer periodischen Funktion beherrschen. Darüber vielleicht ein anderes Mal.

§ 3.

Versuch einer Fehlerschätzung.

Es sei ein A nach (I), § 2, bestimmt. Man ersetze in der Differentialgleichung β durch $2\alpha^2 J_1(A) - A$ und x durch $A \sin t + y$. Man erhält für y

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha^2 \sin(y + A \sin t) = 2\alpha^2 J_1(A) \sin t.$$

Sehen wir y als klein an, vernachlässigen höhere Potenzen von y und kontrollieren, ob wenigstens kein Widerspruch entsteht. Die Vernachlässigung ergibt

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha^2 \cos(A \sin t) y = \alpha^2 [2 J_1(A) \sin t - \sin(A \sin t)],$$

oder wegen der leicht nachzuweisenden und auch bekannten Entwicklung

$$\sin(A \sin t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(A) \sin(2n+1)t,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha^2 \cos(A \sin t) y = -2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(A) \sin(2n+1)t.$$

Das größte Glied der rechten Seite ist $-\frac{\alpha^2}{24} A^3 \sin 3t$. Nun hat Herr Duffing mit Werten von α experimentiert, die nahe bei 1 liegen. Seine Werte von A liegen bei $\frac{10}{17}$, so daß das genannte größte Glied etwa den Maximalwert von $\frac{1}{120}$ hat. Da sowohl die höheren Glieder von J_3 als auch $J_5, J_7, \ldots$ für Werte von $A < 1$ außerordentlich schnell abnehmen, kann die ganze rechte Seite dauernd auf weniger als $\frac{1}{100}$ geschätzt werden.

Hat die homogene Gleichung

$$\text{(III)} \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha^2 \cos(A \sin t) y = 0$$

das Fundamentalsystem y_1 und y_2, so daß

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1,$$

so lautet die Lösung von (II), welche für $t = 0$ verschwindet (nur solche kommen für periodische Lösungen in Frage)

$$y = \int_0^t [y_1(t)\, y_2(\tau) - y_2(t)\, y_1(\tau)]\, p(\tau)\, d\tau + C\, y_2(t),$$

wo $p(t)$ zur Abkürzung für die rechte Seite von (II) gesetzt ist. Damit y periodisch sei, ist notwendig und hinreichend, daß $y_{t=\pi} = 0$ sei; also

$$C = -\frac{1}{y_2(\pi)} \int_0^\pi [y_1(\pi)\, y_2(\tau) - y_2(\pi)\, y_1(\tau)]\, p(\tau)\, d\tau.$$

Mithin hat (II) eine periodische Lösung, die endlich bleibt und mit $p(t)$ klein wird, wenn $y_2(\pi) \neq 0$ ist. Denn $y_1(t)\, y_2(\tau) - y_2(t)\, y_1(\tau)$ hat als Lösung von (III), die für $t = \tau$ verschwindet und die Ableitung 1 besitzt $\left[\text{solange } A < \frac{\pi}{2} \text{ ist, was wir annehmen wollen}\right]$ als nach unten konkave Funktion im Intervall 0 bis π einen Wert, der sicher kleiner als π bleibt.

Da y_2 die ungerade Lösung von (III) ist, hat $y_2(\pi)$ nur dann den Wert 0, wenn (III) eine Lösung von der Periode 2π besitzt, was nur für gewisse Ausnahmewerte von α vorkommt. Es ist leicht zu sehen, daß für $\alpha \leqq 1$ ein solcher Ausnahmewert ausgeschlossen ist.

Denn

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0$$

hat den ersten Ausnahmewert für $\alpha = 1$; mithin hat (III), weil $\alpha^2 \cos(A \sin t) < \alpha^2$ ist, nach bekannten Sätzen einen größeren ersten Ausnahmewert, w. z. b. w.

Da ferner (III) für Werte von α^2 unterhalb des ersten Ausnahmewertes zum stabilen Typus gehört, so bleiben alle Lösungen von (II) dauernd klein, wenn die Anfangswerte von y und y' klein sind. Die gefundene Lösung st also bis zum ersten Ausnahmewert von α^2, der über 1 liegt, sicher stabil.

Eine obere Schranke der Stabilitätsgrenze läßt sich auch angeben. Es sei $|A| < \frac{\pi}{2}$. Dann ist $\cos(A \sin t) \geqq \cos A$ und also das erste Ausnahme-α der Schranke $\alpha^2 \cos A \leqq 1$, d. h. $\alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{\cos A}}$ unterworfen.

§ 4.

Die Methode der Integralgleichungen.

Ist

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = p(t),$$

wo $p(t)$ eine ungerade Funktion der Periode 2π ist, so lassen sich die ungeraden periodischen Lösungen der vorstehenden Gleichung

$$x = \int_0^\pi K(t, \tau)\, p(\tau)\, d\tau$$

schreiben, wo der Kern

$$K(t, \tau) = -\frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\sin n t \sin n \tau}{n^2} = \begin{cases} t\left(\frac{\tau}{\pi} - 1\right), & \text{wenn } t < \tau, \\ \tau\left(\frac{t}{\pi} - 1\right), & \text{wenn } t > \tau. \end{cases}$$

Mithin kommt die Bestimmung der periodischen Lösungen von

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \alpha^2 \sin x = \beta \sin t$$

auf die Auflösung der nicht linearen Integralgleichung

$$\text{(IV)} \qquad x(t) = -\alpha^2 \int_0^\pi K(t, \tau) \sin x(\tau)\, d\tau - \beta \sin t$$

hinaus. Von dieser Gleichung kennt man die sämtlichen Lösungen für $\beta = 0$. Für $\alpha^2 \leqq 1$ ist es nur $x = 0$, für $\alpha^2 > 1$ gibt es noch eine zweite, eventuell mehrere, denn

$$\text{(V)} \qquad \frac{d^2 x}{d t^2} + \alpha^2 \sin x = 0$$

hat als allgemeine Lösung eine elliptische Funktion mit einer reellen Periode größer als $\frac{2\pi}{\alpha}$. Soll also diese Periode 2π oder der n-te Teil davon sein, so muß $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{n}$, d. h. $\alpha > n$ sein. Da die Amplitude mit der Periode monoton wächst, ist sie durch die Periode bestimmt. Je nachdem also $0 < \alpha \leqq 1$, $1 < \alpha \leqq 2$ ist usw., hat (IV) für $\beta = 0$ eine zweite, dritte usw. bestimmte Lösung, nämlich außer $x \equiv 0$, noch

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\sin\frac{\varphi}{2}}\, \frac{\vartheta_1(v, \tau)}{\vartheta_0(v, \tau)},$$

wo φ der maximale Ausschlagwinkel,

$$v = \frac{\alpha t}{2\omega_1}, \qquad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \qquad h = e^{\pi i \tau},$$

ferner wegen $e_3 - e_1 = 1$,

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots,$$

$$\sqrt{k} \equiv \sqrt{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + \ldots}{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots},$$

$$\sqrt{k'} \equiv \sqrt{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \ldots}{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots};$$

$$\vartheta_1 = 2\,h^{\frac{1}{4}} \sin v\pi - 2\,h^{\frac{9}{4}} \sin 3\,v\pi + 2\,h^{\frac{25}{4}} \sin 5\,v\pi + \ldots,$$

$$\vartheta_0 = 1 - 2\,h \cos 2\,v\pi + 2\,h^4 \cos 4\,v\pi - 2\,h^9 \cos 6\,v\pi + \ldots.$$

(Vgl. H. A. Schwarz, Formelsammlung.)

Die Periode ist $\frac{4\,\omega_1}{\alpha}$. Soll sie $\frac{2\,\pi}{n}$ sein ($n = 1, 2, \ldots$), so muß $\frac{2\,\omega_1}{\alpha} = \frac{\pi}{n}$ sein und also

$$\sqrt{\frac{\alpha}{n}} = 1 + 2\,h + 2\,h^4 + 2\,h^9 + \ldots,$$

woraus bei gegebenem α zunächst h und dann die anderen vorkommenden Größen nach den vorstehenden Formeln zu bestimmen sind.

Aus (IV) kann man nun zunächst leicht für den Fall $\alpha < 1$ das x durch schrittweise Annäherung bestimmen:

Erste Näherung

$$x_1 = -\beta \sin t;$$

zweite Näherung

$$x_2 = \alpha^2 \int_0^\pi K(t, \tau) \sin(\beta \sin \tau)\,d\tau - \beta \sin t;$$

allgemein

$$x_n = -\alpha^2 \int_0^\pi K(t, \tau) \sin x_{n-1}(\tau)\,d\tau - \beta \sin t.$$

Da $-K$ stets positiv und

$$x_{n+1} - x_n = -\alpha^2 \int_0^\pi K(t, \tau)(\sin x_n - \sin x_{n-1})\,d\tau$$

$$= -\alpha^2 \int_0^\pi K(t, \tau)\, 2 \sin \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \cos \frac{x_n + x_{n-1}}{2}\,d\tau,$$

also

$$|x_{n+1} - x_n| < -\alpha^2 \int_0^\pi K(t, \tau)\,|x_n - x_{n-1}|\,d\tau$$

$$< (-\alpha^2)^{n-1} \int_0^\pi K_{n-1}(t, \tau)\,|x_2 - x_1|\,d\tau$$

und

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^{n-1} \int_0^\pi K_{n-1}(t, \tau)\,d\tau = 1$$

ist, so ist die Konvergenz klar. Ebenso beweist man leicht für $\alpha^2 < 1$ die ***Eindeutigkeit der Lösung.***

Für $\alpha^2 \geqq 1$ wird man nun nach E. Schmidt[7]) die Nachbarlösungen zu den oben angegebenen in folgender Weise bestimmen.

---

[7]) E. Schmidt, Nichtlineare Integralgleichungen, Math. Ann. **65** (1908).

I. Die Nachbarlösungen zu $x = 0$, $\beta = 0$.

Man entwickelt $\sin x$ in eine Potenzreihe nach x und schreibt dementsprechend

$$x + \alpha^2 \int_0^\pi K(t, \tau) x(\tau) d\tau = \alpha^2 \int_0^\pi K(t, \tau) \left[\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots\right] d\tau - \beta \sin t.$$

1. *Es sei α keine ganze Zahl.* Man löst erst

$$x_1 + \alpha^2 \int_0^\pi K(t, \tau) x_1 d\tau = -\beta \sin t$$

oder

$$\ddot{x}_1 + \alpha^2 x_1 = \beta \sin t, \quad \text{d. h.} \quad x_1 = \frac{\beta}{\alpha^2 - 1} \sin t.$$

Diesen Wert setzt man rechts ein, behält Glieder bis β^3 bei und berechnet eine neue Näherung usw. Das Verfahren kommt darauf hinaus, die Differentialgleichung so zu lösen, daß man sie

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = \alpha^2 \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \ldots\right) + \beta \sin t$$

schreibt und nun sukzessive x_1 aus

$$\ddot{x}_1 + \alpha^2 x_1 = \beta \sin t \quad \text{zu} \quad x_1 = \frac{\beta}{\alpha^2 - 1} \sin t,$$

dann x_2, aus

$$\ddot{x}_2 + \alpha^2 x_2 = \alpha^2 \frac{x_1^3}{3!} + \beta \sin t$$

bestimmt, usw. Nach E. Schmidt konvergiert das Verfahren für hinreichend kleine β. Das Verfahren ist wesentlich das gleiche wie das des Herrn Horn[2]).

2. *Es sei $\alpha = m$ eine ganze Zahl.* Dann hat K den Eigenwert m und die Eigenfunktion $\sin m t$. Man bilde den neuen Kern

$$K(t, \tau) + \frac{2}{\pi} \frac{\sin m t \sin m \tau}{m^2} = E(t, \tau),$$

der nicht mehr den Eigenwert m hat, und löse

$$x + m^2 \int_0^\pi E(t, \tau)\, x(\tau) d\tau = f(t)$$

durch

$$x = f(t) + \int_0^\pi \mathfrak{E}(t, \tau)\, f(\tau) d\tau.$$

Die ursprüngliche Integralgleichung schreibe man mit der Abkürzung

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\tau) \sin m\tau d\tau = z$$

in folgender Weise:

$$x + m^2 \int_0^\pi E(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau = z \sin mt - \beta \sin t + m^2 \int_0^\pi K(t,\tau) \left[\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \dots\right] d\tau$$

und nun verfahre man genau so schrittweise wie vorher, also bestimme man zuerst x_1 aus

$$x_1 + m^2 \int_0^\pi E(t,\tau)\, x_1(\tau)\, d\tau = z \sin mt - \beta \sin t,$$

dann x_2 aus

$$x_2 + m^2 \int_0^\pi E(t,\tau)\, x_2\, d\tau = z \sin mt - \beta \sin t + m^2 \int_0^\pi K(t,\tau) \frac{x_1^3}{3!}\, d\tau$$

usw. Die Unbekannte z ergibt sich aus der sogenannten *Verzweigungsgleichung*, d. h. daraus, daß stets $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin mt\, dt = z$ sein muß.

Führt man die Rechnung durch, was dem Leser überlassen bleiben möge, so kommt man auf *folgendes höchst einfaches Verfahren*:

Man schreibt die Differentialgleichung wie vorhin:

$$\ddot{x} + m^2 x = m^2 \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \dots\right) + \beta \sin t.$$

Wenn $m \neq 1$ *ist*, beginnt man wie vorhin: Erste Näherung

$$x_1 = \frac{\beta}{m^2 - 1} \sin t.$$

Diese setzt man rechts ein usw. Kommt nun Resonanz vor, d. h. tritt rechts ein Glied mit $\sin mt$ auf, so ignoriere man es einfach bei der Bestimmung der neuen Näherung und füge statt dessen ein Glied mit $z \sin mt$ hinzu, wo dann das zunächst unbekannte z hinterher so bestimmt wird, daß rechts sowie links kein Glied mit $\sin mt$ vorkommt; d. h. die Verzweigungsgleichung lautet:

$$m^2 \int_0^\pi \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \dots\right) \sin mt\, dt + \beta \int_0^\pi \sin t \sin mt\, dt = 0.$$

Es ist dies eine Gleichung für z, das in x vorkommt.

Wenn $\alpha = m = 1$ *ist*, so ist die erste Näherung $= z \sin t$ zu setzen und dann weiter so zu verfahren wie vorhin. Die Verzweigungsgleichung kann mehrere Wurzeln haben und demnach auch die vorgelegte Differentialgleichung mehrere periodische Integrale.

II. Nachbarlösungen zu $\beta = 0$, $\varkappa \neq 0$.

Ist für $\beta = 0$ $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\sin\frac{\varphi}{2}\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}}$ oder $x = 2\arcsin\left[\sqrt{\sin\frac{\varphi}{2}\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}}\right] = \theta(t)$, so setze man allgemein

$$x = \theta(t) + \eta$$

und entwickle $\sin x = \sin(\theta + \eta)$ nach Potenzen von η. Da θ Gleichung (IV) für $\beta = 0$ befriedigt, folgt aus (IV)

$$\eta = -\alpha^2 \int_0^\pi K\left[\eta\cos\theta - \frac{\eta^2}{2!}\sin\theta - \frac{\eta^3}{3!}\cos\theta \ldots\right] d\tau - \beta\sin t.$$

Nach E. Schmidt hat man jetzt die Integralgleichung

$$\text{(VI)} \qquad \eta + \alpha^2 \int_0^\pi K(t,\tau)\cos\theta(\tau)\,\eta(\tau)\,d\tau = f(t)$$

durch

$$\eta = f(t) + \int_0^\pi \Gamma(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

zu lösen und hier rechts zuerst $f(t) = -\beta\sin t$, dann schrittweise $-\beta\sin t - \alpha^2\int K\left(-\frac{\eta_1^2}{2}\sin\theta\right)d\tau$ usw. einzusetzen mit den vorstehenden Näherungen für η. So, wenn α^2 kein Eigenwert von (VI) ist. Ist aber α^2 ein Eigenwert von $K(t,\tau)\cdot\cos\theta(\tau)$, so führe man statt dieses Kernes einen neuen Kern $E = K\cdot\cos\theta + \varphi(t)\,\psi(\tau)$ ein, wo $\varphi(t)$, $\psi(\tau)$ noch in weiten Grenzen so gewählt werden können, daß jetzt α^2 kein Eigenwert von E ist, und verfährt nun ähnlich wie vorhin unter I. beschrieben. Für die Durchrechnung geht man auch hier wieder am besten von der Differentialgleichung aus, die man

$$\ddot{\eta} + \alpha^2\eta\cos\theta = \beta\sin t + \alpha^2\left[\frac{\eta^2}{2!}\sin\theta + \frac{\eta^3}{3!}\cos\theta \ldots\right]$$

schreibt und nun schrittweise integriert, indem man erst

$$\ddot{\eta}_1 + \alpha^2\eta_1\cos\theta = \beta\sin t,$$

dann

$$\ddot{\eta}_2 + \alpha^2\eta_2\cos\theta = \beta\sin t + \alpha^2\frac{\eta_1^2}{2!}\sin\theta$$

usw. löst. Kommt Resonanz nicht vor, so folgt aus den Untersuchungen E. Schmidts die Konvergenz des Verfahrens für hinreichend kleine β; ob sich die Schwierigkeit im Fall der Resonanz ebenso leicht wie im Falle I beheben läßt, müßte noch untersucht werden. Grundsätzlich ist aber auch jetzt nach dem oben geschilderten Verfahren zu handeln.

Mit Hilfe der Integralgleichungen beherrscht man also die Fälle 1. $\alpha < 1$, β beliebig; 2. β hinreichend klein, α beliebig, prinzipiell vollständig.

§ 5.

Eine neue Methode,

auf die ich hoffe an anderer Stelle ausführlicher zurückzukommen, verfährt folgendermaßen: Man interpoliere die rechte Seite der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 \sin x + \beta \sin t$$

in geeigneter Weise mit unbestimmten Koeffizienten, also etwa bei Beschränkung auf zwei Glieder durch

$$(1) \qquad -\alpha^2 \sin x + \beta \sin t \approx B \sin t + C \sin 3t.$$

Integration ergibt dann

$$(2) \qquad x \approx -B \sin t - \frac{1}{9} C \sin 3t.$$

Die beiden, im allgemeinen einander widersprechenden Gleichungen (1)

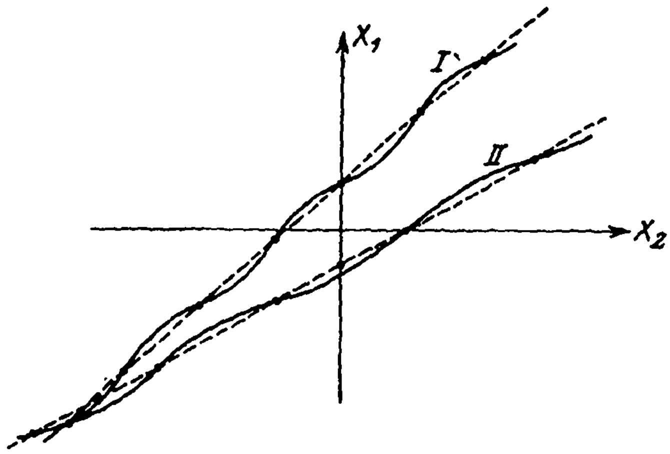

Fig. 2.

und (2) bringe man nun mit Hilfe der noch zur Verfügung stehenden Konstanten B und C an zwei Stellen zur Übereinstimmung, wo sie nicht schon von selber gleiche Werte haben, ($t = 0$ und $t = \pi$), etwa für $t = \frac{\pi}{4}$, wo $x = x_1$ sei, und für $t = \frac{\pi}{2}$, wo $x = x_2$ sei. Für $t = \frac{3\pi}{4}$ wird dann die Übereinstimmung von selber da sein.

Also

$$-\alpha^2 \sin x_1 + \beta \frac{1}{2}\sqrt{2} = B \frac{1}{2}\sqrt{2} + C \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$x_1 = -B \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{9} C \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$-\alpha^2 \sin x_2 + \beta = B - C,$$

$$x_2 = -B + \frac{1}{9} C.$$

Aus diesen vier Gleichungen sind x_1, x_2, B, C zu berechnen. Elimination von B und C gibt

$$x_1 = \frac{1}{8}\sqrt{2}\,\beta + \frac{5}{8}\sqrt{2}\,x_2 - \frac{1}{8}\sqrt{2}\,\alpha^2 \sin x_2,$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\beta + \frac{5}{4}\sqrt{2}\,x_1 - \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\alpha^2 \sin x_1.$$

Diese beiden Kurven lassen sich leicht zeichnen und zum Schnitt bringen.

Man sieht aus der Figur, daß die Kurven, die sich um zwei Geraden sinusförmig herumschlängeln, sicher immer mindestens einen Schnittpunkt gemein haben. Wenn α groß genug ist, können auch mehrere Schnittpunkte da sein. Es ist leicht zu beweisen, daß für $\alpha < 1$ nur ein Schnittpunkt möglich ist; denn für die erste, im Mittel steilere Kurve ist

$$\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)_I = \frac{5}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2}\,\alpha^2 \cos y_2 \geqq \frac{5}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2}\,\alpha^2,$$

für die zweite

$$\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)_{II} = \frac{1}{\frac{5}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\alpha^2 \cos y_1} \leqq \frac{1}{\frac{5}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\alpha^2} \qquad (\alpha^2 < 1).$$

Also ist $\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)_{II} > \left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)_I$, wie es für einen zweiten Schnittpunkt sein müßte, nur möglich, wenn

$$\frac{1}{\frac{5}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\alpha^2} > \frac{5}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2}\,\alpha^2,$$

woraus $\alpha^2 > 1$ folgte.

Berlin, im Oktober 1921.

(Eingegangen am 12. 10. 1921.)