# Bestimmung einer quadratischen Differentialform aus der Riemannschen und den Christoffelschen Differentialinvarianten mit Hilfe von Normalkoordinaten.

Von

H. Vermeil in Göttingen.

## Einleitung.

In einem $n$-dimensionalen Raume, dessen Maßverhältnisse durch das Linienelement $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ gegeben seien, kann man, wie Riemann*) angedeutet hat, die von einem Punkte $O$ auslaufenden geodätischen Linien als gerade Linien ansehen. Legt man dann ein orthogonales isometrisches $n$-Bein mit dem Anfangspunkt $O$ zugrunde, so sind die Riemannschen Normalkoordinaten $y_1, y_2, \cdots, y_n$ eines Punktes $P$ bezüglich dieses $n$-Beines einfach die Produkte des geodätischen Radiusvektors $OP = R$ in die Richtungskosinus des Anfangselementes von $OP$ gegen die Anfangselemente des $n$-Beines, so daß also $\sum y_i^2 = R^2$ ist. Durch Einführung dieser Riemannschen Normalkoordinaten läßt sich bekanntlich**) in der Umgebung von $O$ das Bogenelement, das vom Punkte $(y_i)$ zum Punkte $(y_i + dy_i)$ führt, in die Gestalt setzen:

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dy_i^2 + \sum_{ik,\, rs} \mathfrak{P}_{ik,rs}(y_1, y_2, \cdots, y_n)\, p_{ik}\, p_{rs},$$

wo $p_{ik} = y_i dy_k - y_k dy_i$ ist und die zweite Summe eine quadratische Form der $\binom{n}{2}$ Verbindungen $p_{ik}$ ist, deren Koeffizienten $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ Potenzreihen der $y_i$ sind.

*Schreibt man beliebig ein Linienelement von der Gestalt* (1) *hin*, wo die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ der einzigen Bedingung genügen, in einer gewissen Umgebung

*) Habilitationsvortrag Werke, 2. Aufl., S. 276 f.

**) Webers Anmerkungen in Riemanns Werken, 2. Aufl., S. 405—411 und F. Schur, Math. Ann. 27, S. 537—567.

von $O$ zu konvergieren, *so sind die* $y_i$ *stets die Riemannschen Normalkoordinaten eines n-dimensionalen Raumes.*

Setzt man das Bogenelement (1) in die Gestalt:

$$ds^2 = \sum_{ik} b_{ik}(y)\, dy_i\, dy_k, \tag{2}$$

so kann man durch Einsetzen in die Formel sofort die Riemannsche Krümmungsform $K$ (d. h. den Zähler des Riemannschen Krümmungsmaßes) für die durch die Differentiale $(dy_i)$ und $(\delta y_i)$ festgelegte Flächenrichtung im Punkte $(y_i)$ berechnen, nämlich:

$$K = \sum_{ik, rs} (ik, rs)\, p'_{ik}\, p'_{rs}, \tag{3}$$

wo $p'_{ik} = \delta y_i dy_k - \delta y_k dy_i$ ist und die Summe eine quadratische Form der $\binom{n}{2}$ Verbindungen $p'_{ik}$ ist, deren Koeffizienten $(ik, rs)$, die Riemannschen Vierindizessymbole*), sich durch einfache Differentiationsprozesse aus den $b_{ik}$ und also auch aus den $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ als Potenzreihen in den $y_i$ ableiten lassen. Eine Abzählung der Glieder gleicher Dimension von (1) und (3) legt nun die Vermutung nahe, daß sich aus dem Ausdruck (3) auch umgekehrt wieder das Linienelement (1) herleiten läßt.

Der erste Teil dieser Arbeit hat nun in der Tat zum Ziel folgendes Theorem, auf das mich Herr Geheimrat Klein aufmerksam machte, zu beweisen:

*Ist der Zähler $K$ des Riemannschen Krümmungsmaßes bekannt, indem die $(ik, rs)$ als Potenzreihen der $y_i$ gegeben sind, so berechnen sich daraus die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$, nach gewissen Normierungen, eindeutig, indem sich die Glieder $m^{ter}$ Ordnung der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ jeweils durch die Glieder $0^{ter}$, $1^{ter}$, $2^{ter}$, $\cdots$, $m^{ter}$ Ordnung der $(ik, rs)$ bestimmen lassen.*

---

*) Geht man von dem Linienelement in der Gestalt $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ aus und bezeichnet mit $A$ seine Determinante und mit $A_{ik}$ das algebraische Komplement von $a_{ik}$ und benutzt noch die Christoffelschen Dreiindizessymbole erster Art

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right),$$

so ist das Riemannsche Vierindizessymbol

$$(ik, rs) = \frac{\partial^2 a_{ir}}{\partial x_k \partial x_s} + \frac{\partial^2 a_{ks}}{\partial x_i \partial x_r} - \frac{\partial^2 a_{is}}{\partial x_k \partial x_r} - \frac{\partial^2 a_{kr}}{\partial x_i \partial x_s} + 2\sum_{\mu,\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{A}\left(\begin{bmatrix} ir \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ks \\ \nu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} is \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kr \\ \nu \end{bmatrix}\right). \tag{4}$$

Hiermit wird zugleich folgender Satz aus dem Riemannschen Habilitationsvortrag:*)

„Wenn also das Krümmungsmaß in jedem Punkte . . . gegeben wird,
„so werden daraus die Maßverhältnisse der Mannigfaltigkeit sich be-
„stimmen lassen."

streng bewiesen sein. Ich bemerke gleich hier, daß mich Fräulein E. Noether bei der Abfassung des Beweises unterstützt hat; besonders die Grundgedanken von I § 3 verdanke ich einer schriftlichen Mitteilung von ihr. Während ich noch mit der Abfassung dieser Arbeit beschäftigt war, ist eine Note von ihr mit ähnlichen Beweismethoden und weitergehenden Resultaten in den Göttinger Nachrichten 1918 betitelt „Invarianten beliebiger Differentialausdrücke" in Druck gegeben, deren Korrekturbogen ich einsehen durfte.

Der zweite Teil meiner Abhandlung behandelt die Frage nach der *Äquivalenz zweier quadratischer Differentialformen (zweier Bogenelemente).* Die Riemannsche Krümmungsform $K$ eines Linienelementes hängt aufs engste mit der von Christoffel**) hergeleiteten Differentialform $G_4$ zusammen. Aus letzterer leitet Christoffel durch *kovariante Differentiation* eine Reihe weiterer Differentialformen $G_5, G_6, G_7, \cdots$ her, durch deren Untersuchung er das Äquivalenzproblem unter gewissen Einschränkungen lösen kann. Nun werde ich zeigen, daß, wenn man die $G_4, G_5, G_6, \cdots$ in Riemannschen Normalkoordinaten ausdrückt und ihre Werte für den Punkt $y_i = 0$ bildet, daß dann die Kenntnis von $(G_4)_0, (G_5)_0, \cdots, (G_{m+4})_0$ ausreicht, um die Glieder $0^{\text{ter}}$ bis $m^{\text{ter}}$ Ordnung der Krümmungsform und somit nach Teil I auch die Glieder $0^{\text{ter}}$ bis $m^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ *eindeutig* zu berechnen. Dieser Umstand wird im wesentlichen hinreichen, um ohne weitere Rechnung das Christoffelsche Äquivalenztheorem zu beweisen.

Dieses Ergebnis ist als Mutmaßung bereits von Herrn Geheimrat Klein in einer nur in wenigen Exemplaren vorhandenen Ausarbeitung seiner Vorlesung von S.-S. 1917 über „Invariantentheorie allgemeiner kontinuierlicher Transformationsgruppen" ausgesprochen.

## Teil I.

### § 1. Normierung des Linienelementes.

Die Gestalt des Linienelementes (1) ist noch nicht eindeutig bestimmt. Man kann nämlich zu der zweiten Summe noch identisch verschwindende Ausdrücke hinzufügen, die die Potenzreihen $\mathfrak{P}$ (aber nicht

*) Werke, 2. Aufl., S. 280 oben.

**) Crelles Journal 70 (1869), S. 46—70.

das Linienelement selbst) ändern. Daher werden, um Eindeutigkeit der Darstellung zu erhalten, Normierungen notwendig.

Entwickelt man nämlich die identisch verschwindende vierreihige Determinante $(y\,dy\,y\,dy)_{ikrs}$, wo $i, k, r, s$ alle verschieden sind, nach zweireihigen Unterdeterminanten, so erhält man bekanntlich $\binom{n}{4}$ Identitäten

$$2(p_{ik}p_{rs} + p_{ir}p_{sk} + p_{is}p_{kr}) = 0. \tag{5}$$

Wenn man diese mit beliebigen Potenzreihen der $y$ multipliziert und zu (1) addiert, so wird dadurch (1) in der angegebenen Weise abgeändert, und ich will dann (1) so normieren, daß

$$\mathfrak{P}_{ik,rs} + \mathfrak{P}_{ir,sk} + \mathfrak{P}_{is,kr} = 0 \tag{5a}$$

wird.

Ferner liefert die Entwicklung der identisch verschwindenden dreireihigen Determinante $(y\,y\,dy)_{rst}$, wo $r, s, t$ alle verschieden sind, die $\binom{n}{3}$ Identitäten

$$y_r p_{st} + y_s p_{tr} + y_t p_{rs} = 0.$$

Multipliziert man diese mit einem beliebigen der $\binom{n}{2}$ $p_{ik}$, so erhält man $\binom{n}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{4}$ unabhängige*) (d. h. solche, die nicht durch lineare Kombination von Identitäten (5) mit Faktoren $y$ entstehen) Identitäten

$$y_r p_{ik} p_{st} + y_s p_{ik} p_{tr} + y_t p_{ik} p_{rs} = 0. \tag{6}$$

Wenn man diese mit beliebigen Potenzreihen der $y$ multipliziert und zu (1) addiert, hat man wieder Umänderungsmöglichkeiten für die zweite Summe in (1). Ich will dann so normieren, daß

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_{ik,st}}{\partial y_r} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik,tr}}{\partial y_s} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik,rs}}{\partial y_t} = 0 \tag{6a}$$

wird. Von diesen Bedingungen sind auch nur $\binom{n}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{4}$ unabhängig (d. h. nicht durch Differentiation und Kombination von Bedingungen (5) ableitbar).

*) Um diese Anzahl zu erhalten, unterscheiden wir drei Fälle: entweder kommen beide Indizes von $p_{ik}$ in dem Tripel der drei verschiedenen Indizes $r, s, t$ vor, oder nur ein Index, oder kein Index. Für ein bestimmtes Tripel kommt der erste Fall 3 mal, der zweite $3(n-3)$ mal, der dritte $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ mal vor. Im ersten Falle erhält man also $3 \times \binom{n}{3}$ Identitäten, im zweiten Falle nur $2(n-3) \times \binom{n}{3}$ unabhängige, im dritten Falle nur $\frac{(n-3)(n-4)}{5} \times \binom{n}{3}$ unabhängige Identitäten (6). Diese Zahlen für den zweiten und dritten Fall findet man, indem man für irgend 4 bzw. 5 feste, verschiedene Indizes alle möglichen Identitäten (6) hinschreibt und untersucht, wie viele von ihnen nicht durch Kombination von Identitäten (5) folgen.

Wir wollen nun zeigen, daß alle anderen möglichen Identitäten aus den Identitäten (5) und (6) durch Kombination mit Faktoren, die Funktionen von $y$ sind, entstehen. Dazu beweisen wir zunächst, daß *alle Identitäten in $y$ und $dy$ von der Form* $\quad g(y_i, p_{kl}) = 0,$

*wo $g$ in den $p_{kl}$ homogen vom Grade $\mu$ ist, dem Modul der dreireihigen* (identisch verschwindenden) *Determinanten*

$$(y\,y\,dy)_{ikl} = y_i p_{kl} + y_k p_{li} + y_l p_{ik}$$

*angehören.* Offenbar genügt es, sich bei diesem Nachweis auf die einzelnen in den $y_i$ homogenen Bestandteile von $g$ zu beschränken, und es werde daher $g$ homogen vom Grade $\nu$ in den $y_i$ vorausgesetzt. (Auch die Identität (5) gehört diesem Modul an; denn entwickelt man die vierreihige Determinante $(y\,dy\,y\,dy)_{ikrs} = -(dy\,y\,y\,dy)_{ikrs}$ nach der ersten Zeile, so erhält man als Faktoren der $dy$ die dreireihigen Determinanten des Moduls.)

Ich setze nun für das Folgende $dy_i = z_i$ und für die $y_i$, welche in $p_{ik}$ auftreten, $x_i$, so daß $p_{ik}$ übergeht in $q_{ik} = x_i z_k - x_k z_i = (xz)_{ik}$. (Kommt jedoch $y$ in $g$ nicht explizit, sondern nur in den Verbindungen $p_{ik}$ vor, so lasse ich in je einem $p_{ik}$ jedes Terms von $g$ die $y$ unverändert stehen. Für diesen Fall sind im folgenden Beweis *nur* die Grade der Homogenität in den Variabelnreihen $x$, $y$, $z$ abzuändern.) Dadurch geht $g$ über in eine Funktion: $\quad g(y_i, q_{kl}) = f(x, y, z),$

die in den $x$ wie in den $z$ homogen vom $\mu^{\text{ten}}$ Grade, in den $y$ homogen vom $\nu^{\text{ten}}$ Grade ist. Diese Funktion $f(x, y, z)$ hat die Eigenschaft, zu verschwinden, erstens, wenn man $x_i = y_i$ setzt. Denn dann geht $f$ über in $g(y_i, \bar{p}_{kl})$, wo $\bar{p}_{kl} = (yz)_{kl}$, nur eine andere Schreibweise für $p_{kl} = (y\,dy)_{kl}$ ist; und dies ist nach Voraussetzung gleich Null. Also ist

$$f(y, y, z) = 0.$$

Und zweitens verschwindet $f(x, y, z)$ allgemein, wenn man $x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i$ setzt. Es ist nämlich

$$\left[(xz)_{k_1 l_1} \cdots (xz)_{k_\mu l_\mu}\right]_{x = \lambda_1 y + \lambda_2 z} = \left(\lambda_1 (yz)_{k_1 l_1} + \lambda_2 (zz)_{k_1 l_1}\right) \cdots$$
$$\cdots \left(\lambda_1 (yz)_{k_\mu l_\mu} + \lambda_2 (zz)_{k_\mu l_\mu}\right) = \lambda_1^\mu (yz)_{k_1 l_1} \cdots (yz)_{k_\mu l_\mu}$$

und daher $\quad f(\lambda_1 y + \lambda_2 z, y, z) = \lambda_1^\mu f(y, y, z) = 0.$

Enthalten nun zunächst die Variabelnreihen $x$, $y$, $z$ nur je drei Variable, so kann man hieraus bekanntlich*) schließen

$$f(x, y, z) \equiv 0 \pmod{\Delta} \qquad (\Delta = (xyz)).$$

*) Vgl. etwa E. Noether, Math. Ann., Bd. 77, S. 100, Hilfssatz $\alpha$.

Kommen jedoch in jeder der drei Reihen $x, y, z$ $n (n > 3)$ Variable vor, so bedienen wir uns zum Nachweis der Reihenentwicklung in der von E. Noether (l. c. S. 101) angegebenen Form. Wir setzen

$$x_i = \xi_1 u_i + \xi_2 v_i + \xi_3 w_i, \quad y_i = \eta_1 u_i + \eta_2 v_i + \eta_3 w_i, \quad z_i = \zeta_1 u_i + \zeta_2 v_i + \zeta_3 w_i.$$

Dadurch geht $g(y_i, q_{kl}) = f(x, y, z)$ über in eine Funktion $\mathsf{Z}(\xi, \eta, \zeta)$ der drei ternären Variabelnreihen $\xi, \eta, \zeta$, die in $\xi$ und $\zeta$ homogen vom $\mu^{\text{ten}}$, in $\eta$ homogen vom $\nu^{\text{ten}}$ Grade ist. (Sie enthält außerdem die Variabelnreihen $u, v, w$ als Parameter.) Für $\mathsf{Z}$ haben wir dann die Reihenentwicklung (l. c. Formel (3))

$$\mathsf{Z} = \sum P\mathsf{H} + \Delta \cdot \sum P\mathsf{H}_1 + \Delta^2 \cdot \sum P\mathsf{H}_2 + \cdots + \Delta^\sigma \sum P\mathsf{H}_\sigma,$$

wo $\Delta = (\xi\eta\zeta)$ ist. Hier bedeuten die Zeichen $P$ Polarenprozesse. Ferner sind die $\mathsf{H}$ durch ganz bestimmte Polarenprozesse aus $\mathsf{Z}$ abgeleitet, während die $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \cdots, \mathsf{H}_\sigma$ durch ganz bestimmte Polarenprozesse aus $\Omega(\mathsf{Z})$, $\Omega^2(\mathsf{Z}), \cdots, \Omega^\sigma(\mathsf{Z})$ gewonnen werden. — Nun war $f(x, y, z)$ eine solche Funktion der Variabelnreihen $x, y, z$, welche verschwand, wenn man $x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i$ setzte. Es muß also in diesem Falle auch $\mathsf{Z}$ verschwinden; d. h. offenbar in Anbetracht der obigen Transformationsformeln: $\mathsf{Z}(\xi, \eta, \zeta)$ verschwindet, wenn man $\xi_i = \lambda_1 \eta_i + \lambda_2 \zeta_i$ setzt. Wendet man dies auf die Reihenentwicklung an, so folgt wie oben bei drei Variabeln

$$\sum P\mathsf{H} \equiv 0 \pmod{\Delta}$$

und weiter, da dieser Ausdruck bei Anwendung des $\Omega$-Prozesses verschwindet (vgl. l. c. Hilfssatz c)

$$\sum P\mathsf{H} = 0,$$

so daß die Reihenentwicklung lautet:

$$\mathsf{Z} = \Delta \cdot \sum P\mathsf{H}_1 + \Delta^2 \cdot \sum P\mathsf{H}_2 + \cdots + \Delta^\sigma \sum P\mathsf{H}_\sigma.$$

Nun erhält man offenbar für den $\Omega$-Prozeß

$$\Omega_{\xi\eta\zeta} = \sum_{i,k,l} \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\right)_{ikl} (uvw)_{ikl}$$

und für einen Polarenprozeß

$$\sum_1^3 \eta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \sum_1^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \cdots$$

Setzt man speziell $\xi_1 = \eta_2 = \zeta_3 = 1$, $\xi_2 = \xi_3 = \cdots = \zeta_2 = 0$, so wird $u_i = x_i$, $v_i = y_i$, $w_i = z_i$ und $\mathsf{Z}(\xi, \eta, \zeta)$ geht über in $f(u, v, w) = f(x, y, z)$. Da nun die Anwendung des $\Omega$ Prozesses auf $\mathsf{Z} = f$ die Determinantenfaktoren $(uvw)_{ikl} = (xyz)_{ikl}$ hervorbringt, und diese durch die Polarenprozesse $\sum y \frac{\partial}{\partial x}$ nicht beeinflußt werden, so hat man, weil die $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_\sigma$ durch spezielle Polarenprozesse aus $\Omega(Z), \cdots, \Omega^{\sigma}(Z)$ entstehen, aus der Reihenentwicklung gefunden

$$f(x, y, z) \equiv 0 \text{ (modd. } (xyz)_{ikl}).$$

Hiermit ist, wenn man für $x$ wieder $y$ und für $z$ wieder $dy$ schreibt, bewiesen, daß jede Identität $g(y_i, p_{kl}) = 0$ dem Modul der dreireihigen Determinanten $(y\,y\,dy)_{ikl}$ angehört.

Wenn wir jetzt eine solche dreireihige Determinante mit $[y_i p_{kl}]_\varrho$ bezeichnen, wo der äußere Index $\varrho$ anzeigt, daß die inneren Indizes $i, k, l$ für andere $\varrho$ immer andere Tripel von verschiedenen Indizes bedeuten, so haben wir für jede Form $g'$ des Moduls die Darstellung

$$g(y_i p_{kl}) = Q_1(y, dy)\,[y_i p_{kl}]_1 + Q_2(y, dy)\,[y_i p_{kl}]_2 + \cdots + Q_N(y, dy)\,[y_i p_{kl}]_N$$
$$\left(N = \binom{n}{3}\right).$$

Nun können wir aber nur solche $g$ gebrauchen, die in den $p_{ik}$ homogen vom zweiten Grade sind; daher sind die $Q$ offenbar homogen vom ersten Grade in den $dy$. Wir müssen nun diese $dy$ mit den $y$ so vereinigen, daß Determinanten $p_{ik}$ entstehen; und dies ist nur auf *zwei* Weisen möglich. *Entweder* tritt ein $dy$ aus einem $Q$ heraus und vereinigt sich mit den $y$ in $[y_i p_{kl}]$. Dann wird man, etwa mit $dy_j [y_i p_{kl}]$ beginnend und passende Bestandteile aus vier $Q$ zusammenfassend, notwendig zu dem Ausdruck

$$2(p_{ij}p_{kl} + p_{kj}p_{li} + p_{lj}p_{ik}),$$

also zu einem Ausdruck (5) geführt. *Oder* ein $dy$ vereinigt sich mit einem $y$ in $Q$ und zu diesem Produkt tritt notwendig ein analoges Produkt aus demselben $Q$ hinzu, und dies führt offenbar zu einem Ausdruck (6). Also entstehen in der Tat *alle Identitäten* $g(y_i, p_{kl}) = 0$, *welche in den* $p_{ik}$ *homogen vom zweiten Grade sind aus den Identitäten* (5) *und* (6) *durch Zusammenfassung mit Multiplikatoren, die Funktionen von* $y$ *allein sind. Daher bilden die linken Seiten von* (5) *und* (6) *einen Modul für die Identitäten*

$$g(y_i, p_{kl}) = 0.$$

Nun können wir anknüpfend an eine Arbeit von Herrn Fischer*) sofort zeigen, daß durch die Normierungen (5a) und (6a) das Linienelement (1) eindeutig bestimmt ist. Bezeichnen wir nämlich mit $\varphi_\varrho(y, p)$ die Gesamtheit der Terme von (1), die in den $y$ homogen von $\varrho^{\text{ter}}$ Dimension sind, so gehört $\varphi_\varrho$ zur Restschar $\mathfrak{R}(\varrho)$, welche von den nach dem Modul $\mathfrak{M}(\varrho)$ der Identitäten $g_\varrho(y, p)$ kongruenten Formen je eine ausgezeichnete enthält. Die Identitäten $g_\varrho(y, p)$, die in den $y$ homogen von $\varrho^{\text{ter}}$, und also in den $\binom{n+1}{2}$ Variabeln $y$ und $p$ homogen von $(\varrho + 2)^{\text{ter}}$ Dimension sind,

*) Crelles Journal 140, S. 48—81 (besonders § 2 und das Theorem auf S. 53).

bilden nämlich einen Modul $\mathfrak{M}(\varrho)$, und zwar sind, wie wir sahen, für den Modul $\mathfrak{M}(0)$ die Formen der Basis

$$(5) \qquad \gamma_0(p) = p_{ik}p_{rs} + p_{ir}p_{sk} + p_{is}p_{kr}$$

und für den Modul $\mathfrak{M}(\varrho)$ $(\varrho \geqq 1)$ die Formen einer homogenen Basis

$$(5^*) \qquad \gamma_1(y, p) = y_j(p_{ik}p_{rs} + p_{ir}p_{sk} + p_{is}p_{kr})$$

$$(6) \qquad \gamma_2(y, p) = y_r p_{ik} p_{st} + y_s p_{ik} p_{tr} + y_r p_{ik} p_{rs};$$

aus (5*) und (6) werden alle Funktionen des Moduls $\mathfrak{M}(\varrho)$ $(\varrho \geqq 1)$ mit homogenen Funktionen $(\varrho - 1)$ Grades der $y$ zusammengesetzt. Weil nun wegen der Normierungen (5a) und (6a) die $\varphi_\varrho$ den Differentialgleichungssystemen

$$\gamma_0\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)\varphi_0(p) = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 0$$

und $\gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p}\right)\varphi_\varrho(y, p) = 0, \quad \gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p}\right)\varphi_\varrho(y, p) = 0 \quad$ für $\quad \varrho \geqq 1$

genügen, so gehören sie nach dem Fischerschen Theorem tatsächlich zur Restschar; und folglich ist jedes $\varphi_\varrho$ und also auch *das Linienelement durch die Normierungen* (5a) *und* (6a) *eindeutig bestimmt.*

Der Normierung (5a) entspricht folgende Identität*) zwischen den Vierindizessymbolen für beliebige Koordinaten $x_i$:

$$(5\text{b}) \qquad (ik, rs) + (ir, sk) + (is, kr) = 0.$$

Die Krümmungsform ist also hinsichtlich der den Gleichungen (5) entsprechenden Identitäten zwischen den $p'_{ik}$ schon normiert. — Der Normierung (6a) entspricht, wie wir in § 2 zeigen werden, folgende Identität: Bezeichnet man (vgl. Formel (4)) das Aggregat der vier zweiten Ableitungen im Vierindizessymbol $(ik, rs)$ mit $[ik, rs]$, so ist identisch

$$(6\text{b}) \qquad \frac{\partial[ik, st]}{\partial x_r} + \frac{\partial[ik, tr]}{\partial x_s} + \frac{\partial[ik, rs]}{\partial x_t} = 0. \text{**})$$

wie man durch Rechnung sofort bestätigen kann. — Übrigens enthält (5b) die Relation

$$(5\text{b}^*) \qquad [ik, rs] + [ir, sk] + [is, kr] = 0.$$

Es mögen hier noch gleich einige Beziehungen zwischen den $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ und $(ik, rs)$, welche aus der Umstellung oder Gleichsetzung der Indizes folgen, zusammengestellt werden. Aus der formalen Bildung von (1) folgt, daß

$$(7) \qquad \mathfrak{P}_{ik,rs} = \mathfrak{P}_{ki,sr} = \mathfrak{P}_{rs,ik} = \mathfrak{P}_{sr,ki} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_{ik,rs} = -\mathfrak{P}_{ki,rs} = -\mathfrak{P}_{ik,sr}$$

ist. Entsprechend folgt aus der Definition der $(ik, rs)$:

*) Christoffel l. c. S. 55, oder Lipschitz, Crelles J. 70, S. 101 f.

**) Dies ist ein Teil der Identität von Bianchi. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei (5) 11₁ (1902), S. 3.

$$(7\text{a})\qquad (ik, rs) = (ki, sr) = (rs, ik) = (sr, ki) \quad \text{und}$$
$$(ik, rs) = -(ki, rs) = -(ik, sr).$$

Endlich sollen die Größen $\mathfrak{P}_{ii,rs}$, $\mathfrak{P}_{ik,rr}$ und die $\mathfrak{P}$ mit 3 oder 4 gleichen Indizes, die zwar in (1) nicht auftreten, da, wo sie im folgenden vorkommen, 0 bedeuten — (hierdurch schreiben sich manche Formeln einfacher) —, während die entsprechenden Vierindizessymbole $(ii, rs)$, $(ik, rr)$ und die mit 3 oder 4 gleichen Indizes nach Definition sämtlich $= 0$ sind.

## § 2. Vorbereitende Untersuchungen.

Setzen wir das Linienelement (1) in die Gestalt:

$$(2)\qquad ds^2 = \sum b_{ik}\, dy_i\, dy_k,$$

so finden wir für die $b_{ii}$ und $b_{ik}$, indem wir von der Schlußbemerkung des § 1 Gebrauch machen,

$$(8)\qquad b_{ii} = 1 + \sum_{\varrho,\sigma} \mathfrak{P}_{i\varrho,i\sigma}\, y_\varrho y_\sigma, \qquad b_{ik} = \sum_{\varrho,\sigma} \mathfrak{P}_{i\varrho,k\sigma}\, y_\varrho y_\sigma,$$

wo in den Summen $\varrho$ und $\sigma$ unabhängig voneinander die Werte $1, 2, \cdots, n$ durchlaufen. Mit Hilfe dieser Formeln kann man die Vierindizessymbole $(ik, rs)$ als Potenzreihen der $y$ ausrechnen und feststellen, wie sich deren Koeffizienten aus den Koeffizienten der gegebenen Potenzreihen $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ zusammensetzen.

Zunächst ergibt sich für die Determinante $B$ des Linienelementes (2):

$$(9)\qquad B = 1 + (\mathfrak{P})_1(y)_2 + (\mathfrak{P})_2(y)_4 + \cdots + (\mathfrak{P})_n(y)_{2n}$$

und für die Unterdeterminanten

$$(9\text{a})\qquad B_{ii} = 1 + (\mathfrak{P})_1(y)_2 + \cdots + (\mathfrak{P})_{n-1}(y)_{2n-2},$$
$$B_{ik} = (\mathfrak{P})_1(y)_2 + \cdots + (\mathfrak{P})_{n-1}(y)_{2n-2}.$$

Hier soll, wie auch im folgenden, $(\mathfrak{P})_l(y)_m$ ein Polynom $m^{\text{ter}}$ Dimension in den $y$, dessen Koeffizienten in den Potenzreihen $\mathfrak{P}$ von $l^{\text{ter}}$ Dimension sind, bedeuten. Da nun ferner das Dreiindizessymbol

$$(10)\qquad \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = -\sum_\sigma \mathfrak{P}_{il,k\sigma}\, y_\sigma - \sum_\varrho \mathfrak{P}_{i\varrho,kl}\, y_\varrho$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\varrho,\sigma} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{P}_{l\varrho,k\sigma}}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{i\varrho,l\sigma}}{\partial y_k} - \frac{\partial \mathfrak{P}_{i\varrho,k\sigma}}{\partial y_l} \right\} y_\varrho y_\sigma$$

ist, also die Gestalt hat:

$$(10\text{a})\qquad \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = (\mathfrak{P})_1(y)_1 + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\right)_1 y_2,$$

so erhält man für den zweiten Teil

$$\{ik, rs\} = 2\sum_{\mu,\nu} \frac{B_{\mu\nu}}{B}\left(\begin{bmatrix} ir \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ks \\ \nu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} is \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kr \\ \nu \end{bmatrix}\right)$$

des Riemannschen Vierindizessymbols $(ik, rs)$, wenn man noch $\frac{B_{\mu\nu}}{B}$ nach Potenzen von $y$ entwickelt (eine Entwicklung, die für hinreichend kleine $y$ sicher konvergiert, weil für $y_i = 0$ $B = 1$ wird):

$$\text{(11)} \qquad \{ik, rs\} = (\mathfrak{P})_2(y)_2 + (\mathfrak{P})_1\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\right)_1(y)_3 + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\right)_2(y)_4$$
$$+ (\mathfrak{P})_3(y)_4 + (\mathfrak{P})_2\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\right)_1(y)_5 + (\mathfrak{P})_1\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\right)_2(y)_6 + \cdots.$$

Dagegen ergibt sich für den ersten Teil

$$[ik, rs] = \frac{\partial^2 b_{ir}}{\partial y_k \partial y_s} + \frac{\partial^2 b_{ks}}{\partial y_i \partial y_r} - \frac{\partial^2 b_{is}}{\partial y_k \partial y_r} - \frac{\partial^2 b_{kr}}{\partial y_i \partial y_s}$$

des Vierindizessymbols $(ik, rs)$*) mit Benutzung der Normierung (5a):

$$\text{(12)} \quad [ik, rs] = 6\mathfrak{P}_{ik,rs} + 3\sum_{\varrho}\left(\frac{\partial \mathfrak{P}_{ik,r\varrho}}{\partial y_s} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{rs,i\varrho}}{\partial y_k} - \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik,s\varrho}}{\partial y_r} - \frac{\partial \mathfrak{P}_{rs,k\varrho}}{\partial y_i}\right) y_\varrho$$
$$+ \sum_{\varrho,\sigma}\left\{\frac{\partial^2 \mathfrak{P}_{i\varrho,r\sigma}}{\partial y_k \partial y_s} + \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_{k\varrho,s\sigma}}{\partial y_i \partial y_r} - \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_{i\varrho,s\sigma}}{\partial y_k \partial y_r} - \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_{k\varrho,r\sigma}}{\partial y_i \partial y_s}\right\} y_\varrho y_\sigma$$

und also formal:

$$\text{(13)} \qquad [ik, rs] = (\mathfrak{P})_1 + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\right)_1 (y)_1 + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial y\, \partial y}\right)_1 (y)_2.$$

Wir nennen nun die Koeffizienten der Glieder $m^{\text{ter}}$ Ordnung in den Potenzreihen $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ kurz Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung, und bezeichnen das Glied $0^{\text{ter}}$ Ordnung mit $\alpha_{ik,rs}$. Dann können wir (11) und (13) auch so schreiben:

$$\text{(11a)} \qquad \{ik, rs\} = \{y\}_2 + \{y\}_3 + \{y\}_4 + \cdots,$$

wo $\{y\}_m$ ein Polynom $m^{\text{ten}}$ Grades in den $y$ ist, dessen Koeffizienten *Polynome aus Koeffizienten* $0^{\text{ter}}$ *bis* $(m-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung der* $\mathfrak{P}$ sind, — und ferner unter Beachtung von (12)

$$\text{(13a)} \qquad [ik, rs] = 6\alpha_{ik,rs} + [y]_1 + [y]_2 + [y]_3 + \cdots,$$

wo $[y]_m$ ein Polynom $m^{\text{ten}}$ Grades in $y$ ist, dessen Koeffizienten *aus Koeffizienten von genau* $m^{\text{ter}}$ *Ordnung der* $\mathfrak{P}$ *linear mit rationalen Zahlfaktoren gebildet* sind.

Seien nun die Riemannschen Vierindizessymbole als Potenzreihen der $y_i$ gegeben, deren Entwicklungskoeffizienten die mit bekannten rationalen

*) Es ist also $\quad (ik, rs) = [ik, rs] + \{ik, rs\}$.

Zahlfaktoren multiplizierten Ableitungen der $(ik, rs)$, gebildet für den Punkt $O(y_i = 0)$, sind. Dann lehren die Formeln (11a) und (13a) folgendes:

Das Glied $0^{\text{ter}}$ Ordnung von $(ik, rs)$ ist gleich $6\alpha_{ik,rs}$; denn setzt man $y_i = 0$, so verschwinden in (13a) und (11a) alle übrigen Glieder. — $m$-malige Differentiation und Nullsetzen der $y_i$ liefert links in (11a) und (13a) einen Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung von $(ik, rs)$, rechts eine lineare Verbindung von Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$ (aus (13a)), vermehrt um ein Polynom aus Koeffizienten $0^{\text{ter}}$ bis $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$ (aus (11a)). Nimmt man letztere als bekannt an, so erhält man ein System von linearen Gleichungen mit rationalen Zahlkoeffizienten für die Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$, deren „rechte" Seiten sich aus den Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung der $(ik, rs)$ und den Koeffizienten $0^{\text{ter}}$ bis $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$ zusammensetzen. Die Anzahl dieser linearen Gleichungen für die Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$ ist genau so groß, wie die Anzahl dieser Koeffizienten. Da sich nun (s. o.) die Koeffizienten $0^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ *eindeutig* bestimmen lassen, folgt aus dem Vorhergehenden, daß sich sukzessive die Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$ aus den Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ und $(m-2)^{\text{ter}}$ bis $0^{\text{ter}}$ Ordnung der $(ik, rs)$ *eindeutig* berechnen lassen werden, wenn man nachweisen kann, daß die Determinante des linearen Gleichungssystems $\neq 0$ ist. Dieser Nachweis aber ist auf dem bisher eingeschlagenen Wege nicht möglich, weil man sehr bald, wegen der immer größer werdenden Anzahl von Gliedern bestimmter Ordnung allen Überblick verliert. Ich werde deshalb im folgenden Paragraphen mich einer etwas veränderten Methode bedienen, jedoch die Hauptresultate dieses Paragraphen wieder benutzen.

Nur folgendes sei hier noch bemerkt. Die Zahlfaktoren der „linken" Seiten der linearen Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten der $\mathfrak{P}$ rühren allein aus (13a), nicht aus (11a) her. Die „linken" Seiten dieser Gleichungen sind aber in der Weise voneinander abhängig, wie es die Identitäten (6b) und die daraus durch Differentiation abgeleiteten anzeigen. Deshalb verschwinden die Determinanten und es könnte scheinen, als ob sich die Koeffizienten der $\mathfrak{P}$ nicht eindeutig bestimmen ließen. Nimmt man aber die aus den Normierungsbedingungen (6a) für die Koeffizienten der $\mathfrak{P}$ sich ergebenden Bedingungen statt der abhängigen Gleichungen hinzu und berücksichtigt, daß es ebenso viele unabhängige Bedingungen (6a) wie Identitäten (6b) gibt, so wird die Eindeutigkeit wieder hergestellt werden. Die Richtigkeit dieser Behauptung habe ich in den einfachsten Fällen direkt nachweisen können; allgemein folgt sie rückwärts aus dem Resultat von § 3. Dies ist das Entsprechen (6a) und (6b), von dem ich in § 1 sprach.

## § 3. Bestimmung des Linienelementes aus der Krümmungsform.

Ich schreibe zunächst das Linienelement in Riemannschen Normalkoordinaten für das Folgende zweckmäßiger in der Gestalt:

$$(14)\qquad ds^2 = \sum_i dy_i^2 + \sum_{\substack{(ik,rs)\lambda\\ m=0}}^{\infty} \frac{1}{m!}(\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m} y_{\lambda_1} y_{\lambda_2}\cdots y_{\lambda_m} (y\,dy)_{ik}(y\,dy)_{rs},$$

wo $(\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}$ die $m^{\text{te}}$ Ableitung von $\mathfrak{P}_{ik,rs}(y)$ nach $y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, \cdots, y_{\lambda_m}$, gebildet für $y_i = 0$, bedeutet und $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m$ alle Kombinationen der Elemente $1, 2, 3, \cdots, n$ zu je $m$ mit Wiederholung und Berücksichtigung der Anordnung durchläuft. $(\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}$ ist also konstant und bis auf einen Zahlfaktor ein Koeffizient $m^{\text{ter}}$ Ordnung von $\mathfrak{P}_{ik,rs}(y)$.

(14) ist eine quadratische Form der Differentiale $dy_i$ und werde mit $\varphi(dy, dy)$ bezeichnet. Dann bedeutet $\varphi(\delta y, \delta y)$ dieselbe quadratische Form in den Differentialen $\delta y_i$ und $\varphi(dy, \delta y)$ die Polarform beider. Jetzt kann man nach der Vorschrift Riemanns in seiner Pariser Preisarbeit*) die Krümmungsform $K$ für das Linienelement $ds^2 = \varphi(dy\,dy)$ unter Benutzung des Kalküls mit Differentialen oder Variationen**) so bilden:

$$(15)\qquad K = \delta^2\varphi(dy, dy) - 2d\delta\varphi(dy, \delta y) + d^2\varphi(\delta y, \delta y),$$

*mit der Forderung*, daß die zweiten Variationen $d\delta y_i$, $d^2 y_i$, $\delta^2 y_i$ aus den drei Bedingungen

$$(15\text{a})\qquad \begin{aligned} D\varphi(d, \delta) - \delta\varphi(d, D) - d\varphi(\delta, D) &= 0,\\ D\varphi(d, d) - 2d\varphi(d, D) &= 0,\\ D\varphi(\delta, \delta) - 2\delta\varphi(\delta, D) &= 0, \end{aligned}$$

wo $D$ eine *beliebige* Variation bezeichnet, bestimmt werden. (Die in (15) scheinbar auftretenden dritten Variationen heben sich gegenseitig weg.)

Bildet man nun (15) und (15a) für die quadratische Form

$$(2)\qquad ds^2 = \varphi(dy, dy) = \sum_{i,k} b_{ik}(y)\,dy_i\,dy_k,$$

so liefert, wie man sofort sieht, (15) erstens Glieder, welche *linear in den zweiten Ableitungen der $b_{ik}$ sind und als Faktoren nur erste Variationen $dy$ und $\delta y$ haben* und zweitens Glieder, welche *nur* erste und nullte Ableitungen der $b_{ik}$, aber *mindestens* eine zweite Variation enthalten, — während (15a) als nullzusetzende Faktoren der *willkürlichen* $Dy_i$ Aggre-

*) Werke, 2. Aufl., S. 402.

**) Dieser wurde außer von Riemann (l. c.) besonders von Lipschitz (Crelles Journal, Bd. 70, 71, 72, 82) benutzt.

gate liefert, deren Glieder *nur* erste und nullte Ableitungen der $b_{ik}$ enthalten. Daraus folgt: wenn man mit Hilfe von (15a) die zweiten Variationen aus (15) eliminiert, so bleiben dabei *die* Glieder von (15) vollkommen unverändert, welche die *höchsten* (zweiten) Ableitungen der $b_{ik}$ enthalten; und dies sind zugleich die Glieder von (15), welche, wenn man (15a) noch nicht angewandt hat, nur die ersten Variationen $dy$ und $\delta y$ enthalten. Man kann daher (15) und (15a) zusammenziehen, indem man unter Benutzung des Kongruenzzeichens schreibt:

$$(16)\qquad K \equiv \delta^2 \varphi(d, d) - 2\, d\, \delta\, \varphi(d, \delta) + d^2 \varphi(\delta, \delta) \quad \text{(mod niedrigere Glieder)},$$

wo unter *niedrigeren Gliedern* diejenigen verstanden sein sollen, welche niedrigere Ableitungen der $b_{ik}$ als die höchsten jeweils vorkommenden enthalten. Die niedrigeren Glieder haben, unter Berücksichtigung der Bildungsweise (15) allein, mindestens eine zweite oder höhere Variation der $y_i$ als Faktor, während die höchsten Glieder nur erste Variationen als Faktoren besitzen.

In demselben Sinne kann man für die $m^{\text{te}}$ kovariante Ableitung (vgl. Teil II, § 1) der Krümmungsform $K$ auch schreiben:

$$(17)\qquad K^{(m)} \equiv \delta^{m+2} \varphi(d, d) - 2\, d\, \delta^{m+1} \varphi(d, \delta) + d^2 \delta^m \varphi(\delta, \delta) \\ \text{(mod niedrigere Glieder)}.$$

Nun bilden wir diese $m^{\text{te}}$ kovariante Ableitung für das Linienelement (14), also für Riemannsche Normalkoordinaten und setzen $y_i = 0$. Wir finden:

$$(18)\qquad \begin{aligned} (K^{(m)})_{y=0} \equiv{} & \delta^{m+2} \sum_{(ik, rs)\lambda} \frac{1}{m!} (\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} y_{\lambda_1} \cdots y_{\lambda_m} (y\, dy)_{ik} (y\, dy)_{rs} \\ & - 2\, d\, \delta^{m+1} \sum_{(ik, rs)\lambda} \frac{1}{m!} (\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} y_{\lambda_1} \cdots y_{\lambda_m} (y\, dy)_{ik} (y\, \delta y)_{rs} \\ & + d^2 \delta^m \sum_{(ik, rs)\lambda} \frac{1}{m!} (\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} y_{\lambda_1} \cdots y_{\lambda_m} (y\, \delta y)_{ik} (y\, \delta y)_{rs} \\ & \text{(mod niedrigere Glieder)}, \end{aligned}$$

wo die Summe nur noch über $ik$, $rs$ und die $\lambda$ geht, aber $m$ fest ist. Denn die Glieder, welche in den $y_i$ von höherer als $(m+2)^{\text{ter}}$ Dimension sind, verschwinden wegen $y_i = 0$, weil nach Ausführung der Variationen mindestens ein $y_i$ mit keinem Variationszeichen versehen ist, und die Glieder, welche in den $y_i$ von niedrigerer als $(m+2)^{\text{ter}}$ Dimension sind, enthalten notwendig eine höhere als die erste Variation, sind also „niedrigere“ Glieder, so daß also nur noch die Glieder, welche in den $y_i$ von $(m+2)^{\text{ter}}$ Dimension sind, für uns von Belang sind.

Bei Ausführung der Differentiationen in (18) haben wir nur Glieder mit ersten Variationen zu berücksichtigen. Es kommen aber in der zweiten und dritten Summe solche Glieder, welche einen *freien* Faktor $dy_{\lambda_i}$ enthalten, nicht in Betracht, da dann notwendig ein verschwindender *Determinantenfaktor* $(\delta y\,\delta y)_{rs}$ auftritt; es können also nur Faktoren

$$\delta y_{\lambda_1}\cdots\delta y_{\lambda_m}(dy\,\delta y)_{ik}\,(dy\,\delta y)_{rs}$$

vorkommen. Hierbei dreht sich in der zweiten Summe das Vorzeichen um, da dort zunächst der Faktor

$$\delta y_{\lambda_1}\cdots\delta y_{\lambda_m}(\delta y\,dy)_{ik}\,(dy\,\delta y)_{rs}$$

auftritt und $(\delta y\,dy)_{ik}=-(dy\,\delta y)_{ik}$ ist. Also wird

$$(19)\quad (K^{(m)})_{y=0}\equiv\Big\{\sum_{(ik,rs)\lambda}(\alpha_{ik,rs,\lambda_1\ldots\lambda_m}\,\delta y_{\lambda_1}\cdots\delta y_{\lambda_m}(dy\,\delta y)_{ik}\,(dy\,\delta y)_{rs}\Big\}\frac{c_{1,m}+c_{2,m}+c_{3,m}}{m!}$$

(mod niedrigere Glieder),

wo $c_{1,m}$, $c_{2,m}$, $c_{3,m}$ *positive* Zahlkoeffizienten sind, welche angeben, wie oft in jeder der drei Summen von (18) durch $m$-malige Differentiation der Term $\delta y_{\lambda_1}\cdots\delta y_{\lambda_m}(dy\,\delta y)_{ik}(dy\,\delta y)_{rs}$ entsteht; ihre Summe kann also nicht verschwinden. Die Gleichung (19) enthält jetzt als rechts hingeschriebene Glieder *genau* die Glieder höchster Ordnung von $(K^{(m)})_{y=0}$; denn die $(m+2)^{\text{ten}}$ Ableitungen der $b_{ik}$ für $y_i=0$ sind lineare Verbindungen der Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}(y)$ (vgl. Formel (8)), und diese treten allein in (19) auf, und an den Gliedern höchster Ordnung ist bei unserem Verfahren nichts geändert worden, während die Glieder niedriger Ordnung verschwunden sind.

Ist nun andrerseits die Riemannsche Krümmungsform

$$(20)\qquad K=\sum_{(ik,rs)}(ik,\,rs)\,(dy\,\delta y)_{ik}\,(dy\,\delta y)_{rs}$$

dadurch gegeben, daß die $(ik,rs)$ als Potenzreihen der Normalkoordinaten $y_i$ bekannt sind, so kann man vollkommen eindeutig alle kovarianten Ableitungen von $K$ für $y_i=0$ berechnen; denn dazu sind nur Differentiationen nötig. Ist nämlich

$$(21)\qquad K=\sum_{\substack{(ik,rs)\lambda\\ m=0}}^{\infty}\frac{1}{m!}(k_{ik,rs})_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}\,y_{\lambda_1}y_{\lambda_2}\ldots y_{\lambda_m}(dy\,\delta y)_{ik}\,(dy\,\delta y)_{rs}$$

so folgt:

$$(22)\quad (K^{(m)})_{y=0}\equiv\Big\{\sum_{(ik,rs)\lambda}\frac{1}{m!}(k_{ik;rs})_{\lambda_1\ldots\lambda_m}\,\delta y_{\lambda_1}\cdots\delta y_{\lambda_m}(dy\,\delta y)_{ik}(dy\,\delta y)_{rs}\Big\}\frac{c_m}{m!}$$

(mod niedrigere Glieder),

wo $c_m$ analoge Bedeutung hat, wie oben $c_{1,m}\,c_{2,m}\,c_{3,m}$. Denn die mit höheren Variationen behafteten Glieder haben ja zunächst niedrigere als $m^{\text{te}}$ Ableitungen der Vierindizessymbole als Faktoren, und diese (vgl. Formel (4)) enthalten nicht die $(m+2)^{\text{ten}}$ Ableitungen der $b_{ik}$, wie es die hingeschriebenen Glieder tun.

Trotzdem kann man (22) noch nicht mit (19) vergleichen. Denn (22) ist aus (20) gewonnen, wo *in die Vierindizessymbole auch niedrigere Glieder* hinsichtlich der Ordnung der Ableitungen von $b_{ik}$ *eingegangen sind*; denn bei Bildung der Vierindizessymbole sind die Eliminationsbedingungen (15a) benutzt worden. *Es fragt sich nun, ob man diese niedrigeren Glieder,* welche also von niedrigeren als $(m+2)^{\text{ten}}$ Ableitungen der $b_{ik}$ herstammen, *aus* (22) *abspalten kann.*

Diese Frage werden wir bejahen und damit das in Rede stehende Theorem, wie folgt, beweisen: Angenommen die Koeffizienten nullter bis $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$ seien schon berechnet, dann lassen sich auch die Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung für ein als normiert vorausgesetztes Linienelement (1) eindeutig berechnen. Wir haben nämlich in § 2 bereits auseinandergesetzt, daß das Vierindizessymbol $(ik, rs)$ aus zwei Teilen $[ik, rs]$ und $\{ik, rs\}$ besteht, und folglich auch seine $m^{\text{ten}}$ Ableitungen für $y_i = 0$, also die $(k_{ik,rs})_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}$ aus zwei Teilen bestehen, von denen der erste nur Ableitungen $(m+2)^{\text{ter}}$ Ordnung der $b_{ik}$ enthält, während der zweite aus solchen $0^{\text{ter}}$ bis $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung gebildet ist. Zugleich haben wir damals nachgewiesen (Formel (11a)), daß die Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung dieses zweiten Teiles $\{ik, rs\}$ sich aus Koeffizienten $0^{\text{ter}}$ bis $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$ zusammensetzen. Diese zweiten Teile der Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung der $(ik, rs)$ und somit auch die in den $(k_{ik,rs})_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}$ noch enthaltenen, von Gliedern niedrigerer Ordnung herrührenden Bestandteile sind daher nach der Voraussetzung unseres jetzigen Induktionsschlusses bekannt. Spaltet man sie ab, so erhält man

$$(23)\quad (K^{(m)})_{y=0} \equiv \Big\{ \sum_{(ik,rs)\lambda} (k^{*}_{ik,rs})_{\lambda_1 \cdots \lambda_m} \delta y_{\lambda_1} \cdots \delta y_{\lambda_m} (dy\,\delta y)_{ik} (dy\,\delta y)_{rs} \Big\} \frac{c_m}{m!}$$

(mod niedrigere Glieder),

wo wie in (19) die hingeschriebenen Glieder *genau* diejenigen höchster Ordnung in den Ableitungen von $b_{ik}$ sind. Nimmt man endlich noch die rechte Seite von (19) als so normiert an, wie es die Bedingungen (5a) und (6a), wenn man dort $y_i$ durch $\delta y_i$ ersetzt, verlangen, während (23) in sich normiert ist, weil es die höchsten Glieder der normierten Krümmungsform (vgl. die Formeln (5b*) und (6b)) unverändert enthält, — und betrachtet man dann (19) und (23) als *Formen**) der $\delta y_i$ und $dy_i$, so ergeben sich durch Koeffizientenvergleichung die $(\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}$ eindeutig aus den

*) Die von uns benutzten Differentialformen sind ja bekanntlich invariante Bildungen.

reduzierten $(k^*_{ik,rs})_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$. Erinnert man sich noch, daß wir in § 2 zeigten, daß sich die Koeffizienten nullter Ordnung der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ direkt bestimmen lassen, so ist unser Theorem bewiesen.

In Formeln ergibt sich aus (19) und (23)

$$(24) \quad (\alpha_{ik,rs})_{\lambda_1 \dots \lambda_m} = \frac{c_m}{c_{1,m} + c_{2,m} + c_{3,m}} (k^*_{ik,rs})_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$$
$$= \frac{c_m}{c_{1,m} + c_{2,m} + c_{3,m}} (k_{ik,rs})_{\lambda_1 \dots \lambda_m} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Polynom aus Koef-} \\ \text{fizienten nullter bis} \\ (m-2)^{\text{ter}} \text{ Ordnung} \\ \text{von } K. \end{array} \right.$$

*Es ist also ein Koeffizient $m^{\text{ter}}$ Ordnung von $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ gleich dem entsprechenden Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung von $(ik, rs)$, multipliziert mit einem positivem Zahlenfaktor, der für alle Koeffizienten $m^{\text{ter}}$ Ordnung derselbe ist, das Ganze vermehrt um ein Polynom aus Koeffizienten von höchstens $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Vierindizessymbole.* Für die Koeffizienten nullter und erster Ordnung fällt dies Polynom fort, und man hat einfach

$$(24\text{a}) \qquad \begin{aligned} \alpha_{ik,rs} &= \gamma_0 \cdot k_{ik,rs} \\ (\alpha_{ik,rs})_\lambda &= \gamma_1 \cdot (k_{ik,rs})_\lambda , \end{aligned}$$

wo $\gamma_0 = \frac{1}{6}$ und $\gamma_1 = \frac{1}{12}$ ist. Hieraus folgt sofort, daß, wenn der Raum das Krümmungsmaß 0 hat, das Linienelement (1) die Gestalt:

$$ds^2 = \sum_i dy_i^2$$

hat, also ein „Euklidisches" ist.

## Teil II.

### § 1. Die Christoffelschen Differentialkovarianten $G_4$, $G_5$, $G_6$ ....

Mit der Riemannschen Krümmungsform $K$ hängt aufs engste die von Christoffel in seiner Abhandlung „Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades"*) abgeleitete Differentialform $G_4$ zusammen. Führt man nämlich in

$$K = \sum (ik, rs)(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i)(dx_r \delta x_s - dx_s \delta x_r)$$

neue Differentiale $Dx$ und $\Delta x$ ein, und setzt voraus, daß alle vier Differentiale $dx$, $\delta x$, $Dx$, $\Delta x$ kogredient seien, so ist das Christoffelsche

$$G_4 = \sum (ik, rs)(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i)(Dx_r \Delta x_s - Dx_s \Delta x_r)^{**}),$$

*) Crelles Journal 70, S. 47 ff. u. S. 241 ff.

**) Genau genommen muß man noch mit $-\frac{1}{2}$ multiplizieren um Christoffels $G_4$ zu erhalten. Dieser Faktor $-\frac{1}{2}$ stammt daher, daß das von mir im Anschluß wo in der Summe sowohl $ik$ als auch $rs$ die $\binom{n}{2}$ verschiedenen Kombinationen zweier Indizes durchläuft. Hierfür kann man offenbar unter Beachtung der Schlußbemerkungen von I, § 1 auch schreiben

$$G_4 = \sum (ik, rs)\, dx_i\, \delta x_k\, Dx_r\, \Delta x_s,$$

wo in der Summe $i, k, r, s$ unabhängig voneinander von 1 bis $n$ laufen, oder indem man die Bezeichnung zwecks Verallgemeinerung in ersichtlicher Weise ändert:

$$(25) \qquad G_4 = \sum_{i_1 \cdots i_4} (i_1 i_2 i_3 i_4)\, \overset{1}{\delta} x_{i_1} \overset{2}{\delta} x_{i_2} \overset{3}{\delta} x_{i_3} \overset{4}{\delta} x_{i_4}.$$

Diese quadrilineare Differentialform der vier zu den $dx_i$ kogredienten Systeme von Differentialen: $\overset{1}{\delta} x_i, \overset{2}{\delta} x_i, \overset{3}{\delta} x_i, \overset{4}{\delta} x_i$ ist bekanntlich eine Differentialkovariante des Linienelementes $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$.

Aus (25) kann man bekanntlich nach folgendem Verfahren, welches dem von Riemann in seiner Preisaufgabe angegeben entspricht*) und einfacher ist als das Christoffelsche, eine unbegrenzte Reihe weiterer *multilinearer Differentialformen* herleiten. Sei

$$(26) \qquad G_m = \sum_{i_1 \cdots i_m} (i_1 i_2 \cdots i_m)\, \overset{1}{\delta} x_{i_1} \overset{2}{\delta} x_{i_2} \cdots \overset{m}{\delta} x_{i_m}$$

eine $m$-fach lineare Differentialform. Dann bilden wir

$$(27) \qquad \begin{aligned} \delta G_m = & \sum_{i, i_1 \cdots i_m} \frac{\partial (i_1 i_2 \cdots i_m)}{\partial x_i}\, \delta x_i \overset{1}{\delta} x_{i_1} \overset{2}{\delta} x_{i_2} \cdots \overset{m}{\delta} x_{i_m} \\ & + \sum_{l\, i_2 \cdots i_m} (l\, i_2 \cdots i_m)\, \delta \overset{1}{\delta} x_l\, \overset{2}{\delta} x_{i_2} \cdots \overset{m}{\delta} x_{i_m} \\ & + \sum_{i_1 l \cdots i_m} (i_1 l \cdots i_m)\, \overset{1}{\delta} x_{i_1}\, \delta \overset{2}{\delta} x_l \cdots \overset{m}{\delta} x_{i_m} + \cdots. \end{aligned}$$

Aus (27) eliminieren wir nun die zweiten Differentiale $\delta \overset{\nu}{\delta} x_l$ mittels der Bedingung:

---

an Riemann (l. c.) benutzte Vierindizessymbol $(ik, rs)$ gerade das $-\frac{1}{2}$ fache des von Christoffel benutzten Vierindizessymboles $(ik, rs)$ ist. — Da der Faktor $-\frac{1}{2}$ für die folgenden Untersuchungen ganz unwesentlich ist, werde ich die oben hingeschriebene Differentialform einfach mit $G_4$ und die daraus abgeleiteten mit $G_5, G_6, \cdots$ bezeichnen, wobei dann eben zu beachten ist, daß man noch mit $-\frac{1}{2}$ multiplizieren muß, um die Christoffelschen Bildungen zu erhalten.

*) Vgl. auch Lipschitz, Crelles Journal 72, S. 1ff.

$$(28)\quad D\sum a_{ii_\nu}\delta x_i \overset{\nu}{\delta} x_{i_\nu} - \overset{\nu}{\delta}\sum a_{ik}\delta x_i Dx_k - \delta\sum a_{i_\nu k}\overset{\nu}{\delta} x_{i_\nu} Dx_k = 0,$$

die genau der Bedingung (15a) entspricht und als nullzusetzende Faktoren der willkürlichen $Dx_k$ die Bedingungen liefert:

$$(29a)\qquad \sum_i a_{ik}\,\overset{\nu}{\delta}\delta x_i + \sum_{ii_\nu}\begin{bmatrix} ii_\nu \\ k \end{bmatrix}\delta x_i \overset{\nu}{\delta} x_{i_\nu} = 0$$

oder nach Multiplikation mit $\frac{A_{lk}}{A}$ und Summation nach $k$:

$$(29b)\qquad \overset{\nu}{\delta}\delta x_l + \sum_{ii_\nu}\begin{Bmatrix} ii_\nu \\ l \end{Bmatrix}\delta x_i \overset{\nu}{\delta} x_{i_\nu} = 0.$$

Setzt man nun die zweiten Differentiale aus (29b) in (27) ein, so erhält man die $(m+1)$fach lineare Differentialform

$$(30)\qquad G_{m+1} = \sum ((i i_1 i_2 \cdots i_m))\,\delta x_i \overset{1}{\delta} x_{i_1} \overset{2}{\delta} x_{i_2} \cdots \overset{m}{\delta} x_{i_m},\qquad \text{wo offenbar}$$

$$(31)\qquad ((i i_1 i_2 \cdots i_m)) = \frac{\partial (i_1 i_2 \cdots i_m)}{\partial x_i}$$
$$-\sum_l\left[\begin{Bmatrix} ii_1 \\ l \end{Bmatrix}(l i_2 \cdots i_m) + \begin{Bmatrix} ii_2 \\ l \end{Bmatrix}(i_1 l \cdots i_m) + \cdots + \begin{Bmatrix} ii_m \\ l \end{Bmatrix}(i_1 i_2 \cdots l)\right].^{*)}$$

Die so erhaltenen Differentialformen $G_5\,G_6 \cdots$ sind zufolge ihrer Bildungsweise, ebenso wie $G_4$, Differentialkovarianten. Das Gesetz, nach dem die Koeffizienten $((i i_1 i_2 \cdots i_m))$ aus den Koeffizienten $(i_1 i_2 \cdots i_m)$ gebildet werden, nennt man *kovariante Differentiation.*

Wir machen nun aus, daß man, bevor man aus $G_{m+1}$ den Ausdruck $G_{m+2}$ bildet, in $G_{m+1}: i$ durch $i_{m+1}$ und $\delta x_i$ durch $\overset{m+1}{\delta} x_{i_{m+1}}$ ersetzt, also:

$$(30a)\qquad G_{m+1} = \sum_{i_1 \cdots i_{m+1}} (i_1 \cdots i_m i_{m+1})\overset{1}{\delta} x_{i_1} \cdots \overset{m}{\delta} x_{i_m} \overset{m+1}{\delta} x_{i_{m+1}},$$

wo $(i_1 \cdots i_m i_{m+1}) = ((i_{m+1} i_1 \cdots i_m))$ ist, schreibt. Dann ist leicht zu sehen, daß, wenn man in $G_{m+4}: \overset{1}{\delta}$ und $\overset{3}{\delta}$ durch $d$ und die übrigen $\overset{\nu}{\delta}$ einfach durch $\delta$ ersetzt, man das erhält, was in I, § 3 als $m^{te}$ kovariante Ableitung der Krümmungsform $K$ bezeichnet wurde. Denn nach unserer Ausmachung über die Numerierung ist zunächst (vgl. auch Formel (7a)):

$$(i_1 i_2 i_3 i_4, i_5 \cdots i_{m+4}) = -(i_2 i_1 i_3 i_4, i_5 \cdots i_{m+4}) = (i_2 i_1 i_4 i_3, i_5 \cdots i_{m+4})$$
$$= -(i_1 i_2 i_4 i_3, i_5 \cdots i_{m+4})$$

*) Vgl. Christoffel, l. c. S. 56, 57.

und sonach kommen in $G_{m+4}$ die ersten vier Differentiale in der Verbindung vor:

$$(\overset{1}{\delta} x_{i_1} \overset{2}{\delta} x_{i_2} - \overset{1}{\delta} x_{i_2} \overset{2}{\delta} x_{i_1})(\overset{3}{\delta} x_{i_3} \overset{4}{\delta} x_{i_4} - \overset{3}{\delta} x_{i_4} \overset{4}{\delta} x_{i_3}).$$

Wenn man nun noch die $\delta$ in der angegebenen Weise umändert, hat man

$$(30\text{b})\quad G^*_{m+4} = \sum_{i_1 \cdots i_{m+4}} (i_1 i_2 i_3 i_4, i_5 \cdots i_{m+4})\, \delta x_{i_5} \cdots \delta x_{i_{m+4}} (d x_{i_1} \delta x_{i_2} - d x_{i_2} \delta x_{i_1}) \cdot \cdot (d x_{i_3} \delta x_{i_4} - d x_{i_4} \delta x_{i_3}) = K^{(m)}.$$

## § 2. Einführung von Normalkoordinaten und Bestimmung des Linienelementes aus den $(G_m)_{y_i=0}$.

Um den genauen Anschluß an I, § 3 zu gewinnen, wollen wir jetzt Riemannsche Normalkoordinaten einführen. Zunächst sieht man, daß in der Bezeichnungsweise von I, § 2 das Christoffelsche Dreiindizessymbol zweiter Art

$$\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} = \sum_r \frac{B_{lr}}{B} \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix}$$

die Gestalt hat

$$(32)\quad \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} = (\mathfrak{P})_1 (y)_1 + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\right)_1 (y)_2 + (\mathfrak{P})_2 (y)_3 + (\mathfrak{P})_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\right)_1 (y)_4 + \cdots$$

oder

$$(32\text{a})\quad \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} = \langle y \rangle_1 + \langle y \rangle_2 + \langle y \rangle_3 + \cdots,$$

wo $\langle y \rangle_m$ ein Polynom $m^{\text{ten}}$ Grades in $y$ bezeichnet, dessen Koeffizienten *aus einem in den Koeffizienten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$ linearen Teil und einem in den Koeffizienten nullter bis höchstens $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$ ganzen rationalem Teil bestehen.*

Nun unterscheidet sich unsere jetzige Bildung (30b), die wir ersichtlich auch schreiben können:

$$(33)\quad K^{(m)} = \sum_{(ik, rs)\lambda} (ikrs, \lambda_1 \cdots \lambda_m)\, \delta y_{\lambda_1} \cdots \delta y_{\lambda_m} (dy\, \delta y)_{ik} (dy\, \delta y)_{rs}$$

von der Bildung (22) dadurch, daß wir hier, von $K$ ausgehend, nach jeder Variation sofort die zweiten Differentiale mit Hilfe von (29b) eliminiert haben, während dies dort nicht geschah, sondern die höheren Differentiale zu den Gliedern niedriger Ordnung gerechnet wurden, — abgesehen davon, daß wir damals $y_i = 0$ setzten. Man kann aber, wenn die kovarianten Ableitungen $K, K^{(1)}, K^{(2)}, \cdots$ für $y_i = 0$ bekannt sind, sukzessive die auf der rechten Seite von (22) hingeschriebenen Terme finden, also *von* (33) *die Terme abspalten, die durch die Elimination der höheren Differentiale mittels* (29b) *hinzugekommen sind.*

Dies sieht man so ein: Bildet man vom Riemannschen Vierindizessymbol ausgehend nach Vorschrift (31) sukzessive die Klammersymbole bis zu $(ikrs; \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)$, indem man jedes Klammersymbol *nur* durch die Riemannschen Vierindizessymbole, die Christoffelschen Dreiindizessymbole zweiter Art und die Ableitungen beider ausdrückt, so findet man, wie man durch Induktionsschluß sofort bestätigt,

$$(34)\qquad (ik, rs; \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m) = \frac{\partial^m (ik, rs)}{\partial y_{\lambda_1}\partial y_{\lambda_2}\cdots\partial y_{\lambda_m}} + \Phi\left(R, \frac{\partial R}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^{m-1}R}{\partial y^{m-1}}; C, \frac{\partial C}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^{m-1}C}{\partial y^{m-1}}\right),$$

wo $\Phi$ eine ganze rationale Funktion seiner Argumente: der Riemannschen Vierindizessymbole $R$ und ihrer Ableitungen bis zu den $(m-1)^{\text{ten}}$ und der Christoffelschen Dreiindizessymbole $C$ und ihrer Ableitungen bis zu den $(m-1)^{\text{ten}}$ ist; und zwar ist *jedes Glied von $\Phi$ linear in einer der nullten bis $(m-1)^{ten}$ Ableitungen der Vierindizessymbole $R$.* Speziell hat jedes $\frac{\partial^{m-1}R}{\partial y^{m-1}}$ gerade ein $C$ als Faktor. Setzt man noch $y_i = 0$, so findet man wegen (32a) mit der Bezeichnung von Formel (21)

$$(35)\quad (ik, rs; \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)_{y=0} = (k_{ik,rs})_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m} + \Psi(R_0, R_1, \cdots, R_{m-2}; \mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_{m-2}),$$

wo $\Psi$ eine ganze rationale Funktion seiner Argumente bedeutet und $R_\nu$ bzw. $\mathfrak{P}_\nu$ Koeffizienten $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung der $R$ und $\mathfrak{P}$ bedeuten.

Hier steht nun links ein bekannter Koeffizient von $(K^{(m)})_{y=0}$, rechts ein gesuchter von Formel (22), vermehrt um ein Polynom aus Koeffizienten der $R$ und $\mathfrak{P}$ von niedrigerer als $m^{\text{ter}}$ Ordnung. Nimmt man daher zum Zwecke eines Induktionsbeweises an, daß bereits alle Koeffizienten der Vierindizessymbole bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung aus den Koeffizienten von $(K^{(m-1)})_{y=0}$ bis $(K)_{y=0}$ bestimmt sind, und somit nach I, § 3 auch alle Koeffizienten der $\mathfrak{P}$ bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bekannt sind, so lehrt Formel (35), daß man aus den Koeffizienten von $(K^{(m)})_{y=0}$ bis $(K)_{y=0}$, d. h. aus den Koeffizienten von $(G_{m+4})_{y=0}$ bis $(G_4)_{y=0}$ alle Koeffizienten von (22) eindeutig bestimmen kann. Für $m = 0$ hat man einfach:

$$(35\text{a})\qquad (ik, rs)_{y=0} = k_{ik,rs}.$$

Hiermit ist der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Formenreihe $G_4, G_5, G_6, \cdots$, gebildet für $y_i = 0$ und zwischen den Koeffizienten nullter, erster, zweiter $\cdots$ Ordnung der Riemannschen Krümmungsform aufgedeckt. — *Man kann also aus der Formenreihe $G_4, G_5, G_6, \cdots$, gebildet für $y_i = 0$, sowohl die Riemannsche Krümmungsform, als auch das Linienelement in Riemannschen Normalkoordinaten eindeutig berechnen, und zwar die Glieder nullter bis $m^{ter}$ Ordnung, wenn $(G_4)_0$ bis $(G_{m+4})_0$ bekannt sind.*

Wir knüpfen hier gleich noch folgende Bemerkung an: *Sind* statt $(G_4)_0 (G_5)_0 \cdots$ ad inf. *die Formen*

$$(G_4)_0,\ (G_5)_0,\ \cdots,\ (G_{m+4})_0 \quad und \quad G_{m+5},$$

und zwar $G_{m+5}$ nicht nur für $y_i = 0$, sondern für alle Werte $y_i$ *gegeben, so kann man gleichfalls die Riemannsche Krümmungsform $K$ und das Linienelement eindeutig berechnen.* In der Tat: Aus $(G_4)_0$ bis $(G_{m+4})_0$ kann man, wie wir oben sahen, die Glieder nullter bis $m^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$ und von $K$ berechnen. Ferner kann man aus $G_{m+5}$ sukzessive $(G_{m+5})_0, (G_{m+6})_0, (G_{m+7})_0, \cdots$ mit Hilfe von Formel (31) berechnen. Denn man kennt ja nach Voraussetzung die $(m+5)$-Indizessymbole als Potenzreihen der $y_i$ vollständig und wegen (32a) auch die Entwicklungen der Christoffelschen Dreiindizessymbole, soweit man sie braucht: Um nämlich etwa $G_{(m+5)+p}$ für $y_i = 0$ aus $G_{m+5}$ sukzessive für $p = 1, 2, \cdots$ zu berechnen, braucht man die Glieder nullter bis $p^{\text{ter}}$ Ordnung von $G_{m+5}$ und die Glieder nullter bis $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Dreiindizessymbole oder wegen (32a) die Glieder nullter bis $(p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{P}$; und diese sind ja nach dem wiederholt schon angewandten Induktionsschluß bereits bekannt.

## § 3. Das Christoffelsche Äquivalenztheorem.

Sind zwei quadratische Differentialformen

$$F = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad \text{und} \quad F' = \sum a'_{\alpha\beta}\, dx'_\alpha\, dx'_\beta$$

mit nicht verschwindender Determinante ineinander transformierbar, so daß, wenn man

$$x_i = \varphi_i(x_1', x_2', \cdots, x_n') \tag{36}$$

und folglich

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1'} dx_1' + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n'} dx_n' = \sum_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} dx_\alpha' \tag{37}$$

setzt, $F$ in $F'$ übergeht, dann folgen, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} = u_\alpha^i \tag{38}$$

schreibt, aus der Gleichung $F = F'$, die identisch in den $x'$ und $dx'$ erfüllt sein muß, die *Transformationsrelationen*

$$\sum_{ik} a_{ik} u_\alpha^i u_\beta^k = a'_{\alpha\beta}. \tag{39}$$

Da die $G_m$ kovariante Differentialformen gegenüber der Transformation (36) (37) sind, folgen, wenn man das aus $F$ gebildete

$$G_m = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_m} (i_1 i_2 \cdots i_m)\, dx_{i_1}\, dx_{i_2} \cdots dx_{i_m}$$

und das aus $F'$ gebildete

$$G_m' = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m} (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)'\, dx'_{\alpha_1}\, dx'_{\alpha_2} \cdots dx'_{\alpha_m}$$

setzt, aus der Beziehung $G_m = G'_m$ die weiteren *Transformationsrelationen*:

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_m} (i_1 i_2 \cdots i_m) u_{\alpha_1}^{i_1} u_{\alpha_2}^{i_2} \cdots u_{\alpha_m}^{i_m} = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)'. \tag{40}$$

Die bisherigen Untersuchungen sind ganz allgemein gültig. Für das Folgende muß jedoch eine wesentliche *Einschränkung* gemacht werden. Man muß nämlich unterscheiden, ob eine quadratische Differentialform (d. i. ein Linienelement und somit auch der durch dieses definierte Raum) *Automorphien* gestattet oder nicht. — Die Automorphien nun können

1. in endlicher Zahl,
2. in unendlicher Zahl ohne kontinuierliche Gruppe,
3. in unendlicher Zahl mit kontinuierlicher Gruppe

sowie in Kombinationen dieser drei Fälle vorhanden sein.

Im Falle 1. (von endlich vielen Automorphien des $ds^2$) zerfallen die Punkte des Raumes bekanntlich in drei Klassen. Ein Punkt kann nämlich

a) Fixpunkt für alle Automorphien der Gruppe sein,

b) Fixpunkt für die Automorphien einer Untergruppe sein,

c) sich bei allen Automorphien (außer der identischen) ändern.

Auch im Falle 2. und 3. sind ähnliche Fallunterscheidungen möglich; doch bedürfen wir ihrer für das Folgende nicht. Es seien jedoch noch einige Literaturnachweise gegeben. Die möglichen *kontinuierlichen* Gruppen der Transformation eines Linienelementes in sich sind für den $R_2$ durch Christoffel*), von Mangoldt**) und Killing***), für den $R_3$ durch Bianchi†) aufgestellt worden.

Wir schließen nun für das Folgende, ebenso wie Christoffel, der jedoch nur an den Fall 3. zu denken scheint, alle quadratischen Differentialformen, welche eine Automorphie gestatten, von der Betrachtung aus. Dann beweisen wir folgendes von Christoffel in seiner Arbeit††) aufgestellte Theorem:

„*Wenn durch die Transformationsrelationen, welche zu den Gleichungen*

$$F = F', \; G_4 = G_4', \; G_5 = G_5', \; \cdots, \; G_p = G_p' \tag{41}$$

*gehören, die Werte der Unbekannten $x$ und $u$ ohne Widerspruch völlig bestimmt sind, und die nämlichen Werte der Unbekannten auch noch den Transformationsrelationen, welche sich aus der nächstfolgenden Gleichung*

$$G_{p+1} = G'_{p+1}$$

*) Abhandlungen der Berliner Akademie 1868, S. 119ff.

**) Crelles Journal 94, S. 27ff.

***) Crelles Journal 109, S. 121ff. bes. 149.

†) Memorie della Società Italiana delle Science (detta dei XL) (3) 11, S. 267.

††) Crelles Journal 70.

*ergeben, genügen, so sind zugleich alle für die Transformation von $F$ in $F'$ erforderlichen Integrabilitätsbedingungen erfüllt, und es wird allgemein*

$$u^{\iota}_{\alpha} = \frac{\partial x_{\iota}}{\partial x'_{\alpha}}.\text{“}$$

Den Beweis führt Christoffel durch Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen.

Wir führen ihn in folgender Weise: Hat man aus den Transformationsrelationen, die zu den Gleichungen (41) gehören, irgend zwei zusammengehörige Wertesysteme $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ ermittelt, so mache* man diese zu Nullpunkten von Riemannschen Normalkoordinatensystemen $O(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ und $O'(y_1', y_2', \cdots, y_n')$, deren Orientierung man beliebig wählen kann. Dann ist, wenn der Ursprung $O$ und die Orientierung des Normalkoordinatensystems einmal fest gewählt sind, der Übergang von den $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ zu den $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ eindeutig und eindeutig umkehrbar; das Gleiche gilt für den Übergang von den $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ zu den $(y_1', y_2', \cdots, y_n')$. Nun denke man sich alle auftretenden Differentialformen in Normalkoordinaten ausgedrückt, was ich durch Querstriche andeuten will. Errechnet man nun weiter aus den zu den Bedingungen:

$$(42)\qquad (\overline{F})_0 = (\overline{F}')_0,\ (\overline{G}_4)_0 = (\overline{G}_4')_0,\ (\overline{G}_5)_0 = (\overline{G}_5')_0, \cdots, (\overline{G}_p)_0 = (\overline{G}_p')_0$$

(für $y_\iota = 0$ bzw. $y_\alpha' = 0$) gehörigen Transformationsrelationen die Werte der $\overline{u}^{\iota}_{\alpha 0}$ welche, wenn die Transformation möglich ist, gleich $\frac{\partial y}{\partial y_\alpha'}$ sein müssen, und also die Orientierung der $y_\iota$ Achsen gegen die $y_\alpha'$ Achsen geben; dann kennt man unter der Annahme ihrer Möglichkeit diejenige *orthogonale Transformation**), welche, wenn man $O$ mit $O'$ vereinigt denkt, das System $O(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ mit dem System $O'(y_1', y_2', \cdots, y_n')$ zur Deckung bringt. Man kennt also auch die Beziehungen:

$$(43)\qquad y_\iota = \overline{\varphi}_\iota(y_1', y_2', \cdots, y_n') = \sum_\alpha \overline{u}^{\iota}_{\alpha} y_\alpha' \qquad \text{und}$$

$$(44)\qquad dy_\iota = \sum_\alpha \frac{\partial \overline{\varphi}_\iota}{\partial y_\alpha'} dy_\alpha' = \sum_\alpha \overline{u}^{\iota}_{\alpha}\, dy_\alpha'.$$

Zeigt sich nun, daß die Gleichung

$$(45)\qquad \overline{G}_{p+1} = \overline{G}_{p+1}',$$

wenn man (43) und (44) einführt, identisch in den $y'$ und $dy'$ erfüllt ist, dann ist die Transformation von $F$ in $F'$ möglich. Denn aus den linken

*) Die erste Gleichung (42) lautet nämlich $\sum_\iota dy_\iota^2 = \sum_\alpha dy_\alpha'^2$, und daher sind die $\overline{u}$ konstant.

bzw. rechten Seiten von (42) und (45) kann man, wie am Schlusse des vorigen Paragraphen festgestellt wurde, *eindeutig* die Linienelemente $\bar{F}$ bzw. $\bar{F}'$ berechnen und diese werden durch (43) (44) ineinander transformiert, und außerdem ist, wie wir sahen, der Übergang von $F$ zu $\bar{F}$ und ebenso der von $F'$ zu $\bar{F}'$ eineindeutig.

Dieser Satz behält, wenn man nur das Wort „völlig" durch „endlich vieldeutig" ersetzt, auch in den bisher ausgenommenen Fall 1. (wo das Linienelement endlich viele Automorphien gestattet) seine volle Bedeutung. Man hat sich dann nur für eine bestimmte der endlich vielen möglichen Transformationen zu entscheiden; alsdann bleibt der Beweis wörtlich derselbe, nur daß, falls $O$ zur Klasse b oder c gehört, die Zuordnung der Punkte $O$ und $O'$ und, wenn $O$ zur Klasse a oder b gehört, die orthogonale Transformation von $O(y_1, \cdots, y_n)$ zu $O'(y_1', \cdots, y_n')$ endlich vieldeutig ist.

Im Falle von unendlich vielen Automorphien verliert jedoch der Satz seine Bedeutung, da man nie auf b e s t i m m t e Transformationsrelationen kommt, wie weit man auch in der Gleichungskette (41) fortschreitet.

Göttingen, im Juli 1918.