Über Folgen analytischer Funktionen.

(Ergänzung zur Arbeit im 100. Band.)

Von

F. Hartogs in München und A. Rosenthal in Heidelberg.

In § 6 ihrer Arbeit im Band 100 der Mathematischen Annalen haben die Verfasser als „*α-Menge*" jede beschränkte, abgeschlossene Punktmenge der xy-Ebene bezeichnet, auf welcher x und daher auch jede stetige Funktion von x und y durch Polynome von $z\,(=x+iy)$ gleichmäßig approximiert werden kann[1]), andrerseits als „*β-Menge*" jede Punktmenge der xy-Ebene, auf welcher jede Funktion von x und y der Klasse 0 oder 1 (im Baireschen Sinne) durch Polynome von z (gleich- oder ungleichmäßig) approximiert werden kann, und haben daselbst zu der Frage, wie diese beiden Arten von Mengen geometrisch (bzw. mengentheoretisch) charakterisiert werden können, einige Untersuchungen beigesteuert. Nach Abschluß ihrer Arbeit ist es ihnen weiterhin gelungen, nachzuweisen, daß *jede beschränkte, abgeschlossene Punktmenge M, welche die Ebene nicht zerlegt*[2]) *und das Flächenmaß Null hat, eine α-Menge sein muß.* Aber auch durch dieses Ergebnis wurde die Frage nach dem Charakter der α-Mengen nicht abschließend beantwortet, wie schon daraus hervorgeht, daß jede ungeschlossene Jordansche Kurve, einerlei ob ihr Flächenmaß Null ist oder nicht, eine α-Menge darstellt. Herr M. Lavrentieff, auf dessen in den Comptes Rendus erschienene

[1]) Erwähnt sei, daß (wie leicht nachzuweisen) in dieser Definition, ohne ihre Tragweite zu ändern, die Worte „beschränkte, abgeschlossene" sowie „x und daher auch" gleichzeitig fortgelassen werden dürfen (wobei unter „stetige Funktion von x und y" nach wie vor eine *auf der betreffenden Punktmenge* stetige Funktion zu verstehen ist).

[2]) Wird diese Voraussetzung fortgelassen, so ist eine gleichmäßige Approximation von x durch Polynome von z selbstverständlich nicht mehr möglich (vgl. Fußnote 36 der früheren Arbeit), wohl aber eine solche durch *rationale* Funktionen von z; siehe im Folgenden Nr. 3.

Note[3]) die Verfasser schon in ihrer damaligen Arbeit hingewiesen hatten und dem einer der Verfasser auf dem Kongreß in Bologna von dem obigen Resultat Kenntnis gab, hat diesem inzwischen unter Übersendung einer Skizze seines Beweises mitgeteilt, daß (wie die Verfasser bereits vermutet hatten) die Einschränkung bezüglich des Flächenmaßes der Menge M ersetzt werden könne durch die, daß M ein *linienhaftes Kontinuum* sei. Hierdurch erhält dann die Frage nach dem mengentheoretischen Charakter der α-Mengen tatsächlich ihre abschließende Beantwortung; denn mit Anwendung des Satzes von S. 233[4]) folgt daraus, daß die α-Mengen identisch sind mit den *nirgends dichten, beschränkten, abgeschlossenen Mengen, welche die Ebene nicht zerlegen*[5]). Da nun aber die Untersuchungen des Herrn Lavrentieff auf ganz anderen Methoden beruhen und viel weitergehende und kompliziertere Hilfsmittel benötigen, so schien den Verfassern eine Veröffentlichung ihres eigenen, früheren und auf äußerst einfachem Wege sich ergebenden Resultats doch noch gerechtfertigt zu sein.

Bezüglich der β-Mengen sei in diesem Zusammenhang noch folgendes bemerkt: Sobald nachgewiesen ist, daß jedes linienhafte, die Ebene nicht zerlegende Kontinuum eine α-Menge darstellt, läßt sich auf Grund der Untersuchungen der Verfasser (siehe die Sätze S. 235 und 260) auch die Frage nach dem mengentheoretischen Charakter der *abgeschlossenen*[6]) *β-Mengen* sofort beantworten, und zwar sind diese letzteren dann charakterisiert als diejenigen *abgeschlossenen Mengen, die als Vereinigungsmengen von (höchstens) abzählbar vielen α-Mengen dargestellt werden können*[7]).

Daraus folgt dann noch, daß dem Ausspruch auf S. 236 der früheren Arbeit nunmehr die folgende abschließendere Form gegeben werden kann: „*Γ_0 ist dann und nur dann eine β-Menge, wenn (für die Menge der*

---

[3]) *Sur un problème de M. P. Montel.* Par. C. R. 184 (1927), p. 1634.

[4]) Die angegebenen Seitenzahlen beziehen sich, wenn nicht anders bemerkt, stets auf die frühere Arbeit der Verfasser.

[5]) Oder auch mit denjenigen nirgends dichten, beschränkten, abgeschlossenen Mengen, deren einzelne „Stücke“ (Encykl. d. math. Wiss. II C 9a, S. 902) die Ebene nicht zerlegen.

[6]) Allgemeiner lassen sich (wie aus dem Satze des Textes sofort folgt, da jede abgeschlossene Teilmenge einer β-Menge wieder eine β-Menge ist) diejenigen *β-Mengen, welche zugleich „F_σ-Mengen“* (d. h. Vereinigungsmengen von höchstens abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen) *sind*, charakterisieren als die *Vereinigungsmengen von (höchstens) abzählbar vielen α-Mengen.* [Daß keineswegs jede β-Menge (auch nicht jede auf der x-Achse gelegene) eine F_σ-Menge zu sein braucht, ergibt sich leicht bei Benutzung eines Satzes von Hausdorff (Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 309, letzter Satz für $\alpha = 1$)].

[7]) Daß es nirgends dichte, beschränkte, abgeschlossene Mengen (und sogar solche, die mit der Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Gebietes identisch sind) gibt, welche diese Eigenschaft *nicht* besitzen (also nicht β-Mengen sind), ist auf S. 258—259 der früheren Arbeit bemerkt. (Vgl. daselbst auch S. 238 sowie Fußnote 47.)

zu $\Gamma_0 + C$ komplementären Gebiete $\mathfrak{J}_\nu$) die ‚Bedingung B' erfüllt ist.“ Denn ist die Bedingung B für die Gebiete $\mathfrak{J}_\nu$ erfüllt, so ist gemäß der auf S. 258 angegebenen Umformung der Bedingung B[8]) Γ_0 darstellbar als Vereinigungsmenge von (höchstens) abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen, welche die Ebene nicht zerlegen, also (da Γ_0 nirgends dicht) von α-Mengen und daher nach S. 235 selbst eine β-Menge.

---

1. Unter Benutzung der mittels der Gleichungen

$$x = \varrho \cos\varphi, \qquad y = \varrho \sin\varphi$$

eingeführten Polarkoordinaten ϱ, φ werde das über ein beliebiges quadrierbares[9]) Flächenstück f der xy-Ebene erstreckte Doppelintegral $\iint d\varrho\, d\varphi$ zur Abkürzung als *„Pseudoinhalt“* f^* dieses Flächenstücks bezeichnet. Dasselbe hat stets einen positiven (von der Wahl des Nullpunkts abhängigen) Wert. Für den Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius r ist $f^* = 2\pi r$. Für ein Flächenstück f, das außerhalb dieses Kreises liegt, hat man (wenn f zugleich den Inhalt desselben bezeichnet)

$$f = \iint \varrho\, d\varrho\, d\varphi \geqq \iint r\, d\varrho\, d\varphi = r f^*$$

und somit

$$f^* \leqq \frac{f}{r}.$$

Für jedes beliebige Flächenstück f gilt (unabhängig von der Wahl des Nullpunktes) *die Beziehung*

$$f^* < 6\sqrt{f}.$$

Denn beschreibt man um den Nullpunkt einen Kreis mit dem Radius $r = \sqrt{\frac{f}{2\pi}}$ und bezeichnet mit f_1 den innerhalb, mit f_2 den außerhalb desselben gelegenen Bestandteil von f, so ist

$$f^* = f_1^* + f_2^* \leqq 2\pi r + \frac{f_2}{r} \leqq \sqrt{2\pi f} + \sqrt{2\pi f} < 6\sqrt{f}.$$

2. Für einen beliebigen, von endlich vielen rektifizierbaren Kurven begrenzten Bereich[9]) $\mathfrak{B}$ der xy-Ebene gilt, wenn die Funktionen $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ in $\mathfrak{B}$ stetig sind, die bekannte Beziehung

$$\int\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(\mathfrak{B})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

---

[8]) Wegen der Ersetzbarkeit von Γ durch Γ_0 vgl. das in Fußnote 95 der früheren Arbeit Gesagte.

[9]) Es kommen bei der nachherigen Anwendung bloß Polygonflächen in Betracht.

wobei das erste Integral über die Begrenzung l des Bereiches $\mathfrak{B}$ im positiven Sinne zu erstrecken ist.

Wählt man

$$P = \frac{x}{x+iy}, \qquad Q = iP = \frac{ix}{x+iy},$$

so ergibt sich

$$\int\limits_{(l)} \frac{x}{x+iy}(dx + i\,dy) = i \iint\limits_{(\mathfrak{B})} \frac{dx\,dy}{x+iy}$$

zunächst unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ den Nullpunkt nicht enthält. Die Gleichung behält aber auch dann, wenn der Nullpunkt im Innern von $\mathfrak{B}$ liegt (oder auch auf dem Rande von $\mathfrak{B}$, was jedoch für die folgenden Betrachtungen belanglos ist), ihre Gültigkeit unverändert bei. Denn zerlegt man in diesem Falle $\mathfrak{B}$ in zwei Teilbereiche, deren erster ein Kreis um den Nullpunkt ist, so gilt die Gleichung für jeden der beiden Teilbereiche (und zwar sind für den ersteren beide Seiten der Gleichung, wie sich durch Anwendung von Polarkoordinaten sofort ergibt, gleich Null).

Allgemein hat man also, wenn man noch $x + iy = z$, $x_0 + iy_0 = z_0$ setzt, für jeden Bereich $\mathfrak{B}$ der z-Ebene die Beziehung

$$\int\limits_{(l)} \frac{x - x_0}{z - z_0}\,dz = i \iint\limits_{(\mathfrak{B})} \frac{dx\,dy}{z - z_0}.$$

3. Sei M eine in der $z(= x + iy)$-Ebene gelegene beschränkte, abgeschlossene Punktmenge, deren Flächenmaß gleich Null ist. Es existiert dann eine ein- oder mehrfach zusammenhängende Polygonfläche $\mathfrak{P}$, welche M ganz in ihrem Innern enthält und deren Inhalt kleiner ist als das Quadrat einer vorgeschriebenen positiven Größe ε.

Wird der Rand dieser Polygonfläche mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet, so stellt

$$\psi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\mathfrak{p})} \frac{x\,dz}{z - z_0}$$

infolge der Stetigkeit des Integranden eine im Innern von $\mathfrak{P}$ reguläre analytische Funktion von z_0 dar, und es gilt, wenn $z_0 = x_0 + iy_0$ einen beliebigen inneren Punkt von $\mathfrak{P}$ bezeichnet:

$$\psi(z_0) - x_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\mathfrak{p})} \frac{x - x_0}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{P})} \frac{dx\,dy}{z - z_0}$$

oder, indem man mittels der Gleichungen $x - x_0 = \varrho\cos\varphi$, $y - y_0 = \varrho\sin\varphi$ zu Polarkoordinaten übergeht:

$$\psi(z_0) - x_0 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{P})} e^{-i\varphi}\,d\varrho\,d\varphi.$$

Der absolute Betrag des letzteren Integrals ist aber höchstens gleich dem Pseudoinhalt von $\mathfrak{P}$, also $< 6\varepsilon$ und somit schließlich

$$|\psi(z) - x| < \varepsilon$$

für alle z innerhalb $\mathfrak{P}$.

Ist nun $\mathfrak{P}_0$ eine im Innern von $\mathfrak{P}$ gelegene Polygonfläche, welche M ebenfalls noch enthält, so existieren[10]) rationale Funktionen von z, deren Pole außerhalb $\mathfrak{P}_0$ liegen und die sich in $\mathfrak{P}_0$ von $\psi(z)$ um weniger als ε unterscheiden. Damit ist also bewiesen, daß x — *und daher*[11]) *auch jede auf M stetige Funktion von x und y — auf M durch rationale Funktionen von z gleichmäßig approximiert werden kann.*

Fügt man nun noch die weitere Voraussetzung hinzu, daß die Punktmenge M die Ebene nicht zerlege, so können die Polygonflächen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_0$ als einfach zusammenhängend angenommen werden, was zur Folge hat, daß in $\mathfrak{P}_0$ eine gleichmäßige Approximation von $\psi(z)$ durch *ganze rationale Funktionen* von z möglich ist. Damit ist dann nachgewiesen, daß *M in diesem Falle eine α-Menge ist.*

---

[10]) C. Runge, Acta Math. 6 (1885), S. 229.

[11]) Vgl. Fußnote 35 der früheren Arbeit.

(Eingegangen am 1. 12. 1930.)