Der Dimensionsbegriff und der analytische Bau physikalischer Gleichungen.

Von

T. Ehrenfest-Afanassjewa in Leiden.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist aus den üblichen Redewendungen über die „Dimensionen" und die „Homogeneität" physikalischer Gleichungen den rein mathematischen Inhalt herauszuschälen und zu systematisieren.

Es stellt sich heraus, daß gewisse analytische Einschränkungen, welche man, von den Dimensionsbetrachtungen ausgehend, allen physikalischen Gleichungen zumutet, in vielen Fällen gar nicht bestehen.

Da diesbezügliche unrichtige Behauptungen auf der Verwechslung gewisser Begriffe beruhen, so soll vor allem für eine terminologische Trennung dieser Begriffe gesorgt werden.

§ 1.

Einleitende Aussagen und Terminologie.

Wir legen folgende terminologische Festsetzungen (1, 2, 3, $\cdots$) und Aussagen (A, B, C, $\cdots$) zugrunde:

1. Eine Größe *messen* heißt, ihr Verhältnis zu der Einheit feststellen.

2. Unter *Einheit* wird ein Spezialwert derselben Größe verstanden.

(A) Weiß man eine gewisse Größenart in einer bestimmten Einheit zu messen, so kann man sie in jeder beliebigen Einheit messen.*)

3. Das Resultat der Messung einer Größe nennen wir eine *Größenzahl.*

(B) Eine Größenzahl kann aus zwei verschiedenen Gründen variieren:

*) Hat man einen Spezialwert G einer Größe durch die Einheit E' gemessen und dabei den Wert g_1 erhalten, und will man nun eine andere Einheit E'' gebrauchen, so hat man dieselbe zunächst durch die Einheit E' zu messen und dann durch die so erhaltene Zahl e_1'' die g_1 zu dividieren. Der Quotient

$$\frac{g_1}{e_1''} = g_2$$

gibt den Wert der Größe G in der Einheit E'' ausgedrückt.

wegen Änderung der zu messenden Spezialwerte der Größe und wegen Änderung der Einheit.

4. Änderung der Größenzahl wegen Änderung der Größe nennen wir *materielle Änderung.*

5. Änderung einer Zahl wegen Änderung der Einheiten nennen wir *formelle Änderung.*

(C) In einer physikalischen Gleichung treten außer den Größenzahlen noch andere Zahlen auf, welche von den materiellen Änderungen der Zahlen nicht abhängen.

(D) Bei willkürlicher Änderung der Einheiten hört eine physikalische Gleichung, im allgemeinen auf, gültig zu sein. Durch passende gleichzeitige Änderung der in (C) erwähnten Zahlen kann sie aufrecht erhalten werden. Diese Zahlen unterliegen also formellen Änderungen.*)

6. Eine Zahl, welche formelle Änderungen erleidet ohne eine Größenzahl zu sein, nennen wir *formelle Variable.*

7. Das Verhältnis $\frac{x_2}{x_1} = \xi$ zweier Spezialwerte einer Variablen nennen wir *Übergangsfaktor.*

8. Einen Übergangsfaktor, welcher eine materielle Änderung definiert, nennen wir *materiellen Faktor.*

9. Einen Übergangsfaktor, welcher eine formelle Änderung definiert, nennen wir *formellen Faktor.*

(E) Man kann die Einheiten verschiedener Arten voneinander abhängig machen.

(F) Es ist zu unterscheiden zwischen folgenden zwei Arten von „Abhängigkeit" der Einheiten voneinander:

a) Definition einer einzelnen Einheit einer Größenart durch bestimmte Einheiten anderer Größenarten.**)

b) Abhängigkeit des formellen Faktors einer Größe von den formellen Faktoren anderer Größen.***)

Bestehen zwischen den formellen Faktoren $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \xi_{k+1}, \cdots, \xi_{k+r}, \cdots$ der Zahlen $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+r}, \cdots$ folgende Beziehungen:

*) Vgl. § 9.

**) Beispiele: 1. Definition der Masseneinheit als Masse eines Kubik*zentimeters* Wasser.

2. Definition der Flächeneinheit als Fläche eines Quadrates, deren Seite einen Zentimeter beträgt.

***) Beispiele: 1. Wenn man die Masseneinheit als Masse der Kubik*einheit* Wasser definierte.

2. Wenn man, aus beliebiger Flächeinheit und Zentimeter als Längeneinheit ausgehend, sich verabredete, die anderen Flächeneinheiten so an die Längeneinheiten anzupassen, daß die Beziehung zwischen den Übergangsfaktoren stets dieselbe wäre: $\varphi = \lambda^2$, wo φ — formeller Faktor der Fläche, λ — formeller Faktor der Länge wäre.

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
\xi_{k+1} &= \xi_1^{\alpha_{11}}\, \xi_2^{\alpha_{12}} \ldots \xi_k^{\alpha_{1k}}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\xi_{k+r} &= \xi_1^{\alpha_{r1}}\, \xi_2^{\alpha_{r2}} \ldots \xi_k^{\alpha_{rk}} \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

wo $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ als unabhängig betrachtet werden, und α_{ih} beliebige konstante Zahlen sind, so nennen wir:

10. Die Zahlen $x_1, x_2, \cdots, x_k$ — *Grundvariable.*

11. Die Zahlen $x_{k+1}, \cdots, x_{k+r}, \cdots$ *abgeleitete Variable.*

12. Die Gleichungen (1) — *Dimensionsgleichungen.*

13. Eine Zahl α_{ih} — *Dimension* der Zahl x_i in bezug auf die Grundvariable x_h.

14. Die Gesamtheit der Einheiten, welche simultan gebraucht werden, — *Einheitenwahl.*

15. Das System der Verabredungen über eine bestimmte ursprüngliche Einheitenwahl und über die Regeln für den Übergang zu einer anderen Einheitenwahl (d. h. über die nähere Form der Dimensionsgleichungen) — *Einheitensystem.*

16. Die Gesamtheit der Dimensionsgleichungen (ohne Verabredung über die ursprüngliche Einheitenwahl) — *Dimensionssystem.*

Wir haben die Begriffe vom Messen, Dimension, Einheitensystem ... möglichst abstrakt und allgemein eingeführt, ohne uns um die reellen Bedingungen des Messens und des Verleihens von Dimensionen an verschiedene Größen zu bekümmern. Wir wollen uns auch weiter an diese Allgemeinheit halten und erst später zusehen, ob das faktisch angenommene Einheitensystem durch ein einheitliches Prinzip aus allen möglichen durch uns definierten Systemen auszuzeichnen sei.

§ 2.

Allgemeine Begründung der Dimensionsgleichungen.

Da wir ganz allgemein vorgehen wollen, können wir versuchen die Beziehungen zwischen den formellen Faktoren noch allgemeiner zu fassen, als es durch die Gleichungen (1) angegeben ist.

Dabei stoßen wir aber sofort auf eine recht allgemeine Forderung, welche einem jeden einigermaßen vernünftigen Einheitensystem auferlegt werden muß und welche unbedingt zu der Gleichungsform (1) führt.

Es seien nämlich

$$
\frac{x_1''}{x_1'} = \xi_1'; \quad \frac{x_2''}{x_2'} = \xi_2'; \cdots,
$$
$$
\frac{x_1'''}{x_1''} = \xi_1''; \quad \frac{x_2'''}{x_2''} = \xi_2''; \cdots
$$

formelle Faktoren, welche durch Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \varphi_1(\xi_1, \cdots, \xi_k), \\ &\cdots\cdots \\ \xi_{k+r} &= \varphi_r(\xi_1, \cdots, \xi_k) \end{aligned} \tag{2}$$

miteinander verbunden sind, wobei die gleichen oberen Indexe die gleichzeitig gebrauchten Faktoren bezeichnen mögen.

Wir verlangen, daß wenn

$$\begin{gathered} \xi_1', \cdots, \xi_k', \\ \xi_1'', \cdots, \xi_k'' \end{gathered}$$

die zwei konsekutiven Serien der unabhängigen Übergangsfaktoren sind, welche von den Werten $x_1', \cdots, x_k'$ zu den Werten $x_1''', \cdots, x_k'''$ geführt haben, so daß

$$\xi_1^* = \xi_1' \xi_1''; \cdots; \xi_k^* = \xi_k' \xi_k''$$

ist, die Übergänge der abgeleiteten Variablen über die Faktoren

$$\xi_{k+1}', \xi_{k+1}''; \xi_{k+2}', \xi_{k+2}''; \cdots; \xi_{k+r}', \xi_{k+r}''; \cdots$$

von den Werten $x_{k+1}', x_{k+2}', \cdots, x_{k+r}', \cdots$ zu denselben Werten

$$x_{k+1}''', x_{k+2}''', \cdots, x_{k+r}''', \cdots$$

führen, wie der unmittelbare Übergang über die Fatoren

$$\xi_{k+1}^* = \varphi_1(\xi_1^*, \cdots, \xi_k^*); \cdots; \xi_{k+r}^* = \varphi_r(\xi_1^*, \cdots, \xi_k^*).$$

Dieses ist aber der Ausdruck dafür, daß die Gleichungen (2) es gestatten, daß die betreffenden Substitutionen eine Gruppe bilden. Wir verlangen also, daß

$$\xi_{k+1}^* = \xi_{k+1}' \xi_{k+2}''; \cdots; \xi_{k+r}^* = \xi_{k+r}' \xi_{k+r}''; \cdots$$

d. h. daß

$$\varphi_r(\xi_1' \xi_1'', \cdots, \xi_k' \xi_k'') = \varphi_r(\xi_1', \cdots, \xi_k') \, \varphi_r(\xi_1'', \cdots, \xi_k'')$$

sei, welches zu den Beziehungen führt:

$$\varphi_r(\xi_1, \cdots, \xi_k) = \xi_1^{\alpha_{r1}} \xi_2^{\alpha_{r2}} \cdots \xi_k^{\alpha_{rk}},$$

wo nur noch die Exponenten $\alpha_{r1}, \cdots, \alpha_{rk}$ willkürlich sind.

Wir können dieses Ergebnis folgendermaßen formulieren:

Satz I. *Als Begründung für die Dimensionsgleichungen kann die Forderung angesehen werden, daß die Substitutionen, welche dem Einheitenwechsel entsprechen, eine Gruppe bilden.*

§ 3.

Homogeneität.

Das folgende bezieht sich auf Übergangsfaktoren, deren Natur beliebig (sowohl formell als materiell) sein mag.

Wir nennen

17. *Homogene Funktion*, eine Funktion $H(x_1, \cdots, x_n)$, welche bei

Multiplizieren jeder Variable x_i mit einem Übergangsfaktor ξ_i der Bedingung genügt:

(3) $$H(x_1 \xi_1, \cdots, x_n \xi_n) = \varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) H(x_1, \cdots, x_n).$$

18. *Homogene Gleichung*, eine Gleichung, welche nach Übertragung aller ihrer Glieder auf eine Seite die Form annimmt

$$H = 0,$$

wo H eine homogene Funktion ist.

Satz II. *Im Falle, wo die sämtlichen Übergangsfaktoren* $\xi_1, \cdots, \xi_n$ *voneinander unabhängig sind, ist*

$$H = kP,$$

wo k *von den Variablen* $x_1, \cdots, x_n$ *unabhängig und* P *ein Potenzprodukt*

$$P = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ist.

Satz III.*) *Im Falle, wo zwischen den Übergangsfaktoren* $\xi_1, \cdots, \xi_n$ *Beziehungen bestehen, ist es notwendig, damit die Gleichung* (3) *erfüllt sei, daß diese Beziehungen auf die Form*

(1*) $$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \xi_1^{\alpha_{11}} \cdots \xi_k^{\alpha_{1k}}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \xi_{k+r} &= \xi_1^{\alpha_{r1}} \cdots \xi_k^{\alpha_{rk}} \end{aligned}$$

zurückführbar seien.

Satz IV.*) *Bestehen zwischen den Übergangsfaktoren Gleichungen von der Form* (1*) *und ist die Gleichung* (3) *erfüllt, so hat die Funktion* $H(x_1, \cdots, x_n)$ *die Form:*

(4) $$H(x_1, \cdots, x_n) = kP(x_1, \cdots, x_n)\, \Phi\left(\frac{x_{k+1}}{x_1^{\alpha_{11}} \cdots x_k^{\alpha_{1k}}}, \cdots, \frac{x_{k+r}}{x_1^{\alpha_{r1}} \cdots x_k^{\alpha_{rk}}}\right)$$

wo k *ein von den* x_i *unabhängiger Koeffizient,* $P(x_1, \cdots, x_n)$ *ein Potenzprodukt,* Φ *eine willkürliche Funktion ihrer Argumente ist.*

Folgerung. *Die Funktion* $\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ *in der Gleichung* (3) *hat die Form*

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = P(\xi_1, \cdots, \xi_n),$$

wo $P(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ *dieselbe Funktion ihrer Argumente ist, wie* $P(x_1, \cdots, x_n)$ *in Gleichung* (4).

19. Wenn nach Ersetzen der $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \cdots$ in der Funktion $\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ durch die unabhängigen Übergangsfaktoren $\xi_1, \cdots, \xi_k$, gemäß den Gleichungen (1*), in dem so erhaltenen Potenzprodukte der Faktor ξ_i in der Potenz α_i vorkommt, so sagen wir, daß die Funktion $H(x_1, \cdots, \xi_n)$ in bezug auf x_i *von der Ordnung* α_i sei.

*) Vgl. A. Federmann, Einige allgem. Methoden der Integr. part. Differentialgl. erster Ordnung. Iswestija St. Petersb. Polytechn. Inst. 16 (1911), S. 97 (russisch).

20. Gleichungen von der Form (1*) zwischen den Übergangsfaktoren nennen wir *bedingende Gleichungen.*

21. Eine Funktion, resp. Gleichung, welche homogen ist unter Berücksichtigung der bedingenden Gleichungen, nennen wir *bedingt homogen.*

Bemerkung. Was in den mathematischen Untersuchungen gewöhnlich eine „homogene Funktion" genannt wird, ist ein Spezialfall von bedingt homogener Funktion, welcher folgender spezieller Form der Gleichungen (1*) entspricht:

$$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n.$$

Satz V. *Bleibt eine Gleichung*

$$f(x_1, \cdots x_n) = 0$$

invariant gegenüber der Substitution

$$(5) \qquad \begin{aligned} x_1' &= \xi_1 x_1, \\ x_2' &= \xi_2 x_2, \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

*wobei zwischen den ξ_i Beziehungen bestehen, so läßt sie sich stets auf eine bedingt homogene Funktion zurückführen.**)

Folgerung. *Soll die Substitution* (5) *irgend welche Gleichung invariant lassen, so können zwischen den entsprechenden Substitutionsfaktoren $\xi_1, \cdots, \xi_n$ keine anderen Beziehungen bestehen außer den Gleichungen* (1*).

Bemerkung I. Wir sehen hieraus, daß die Forderung, daß die *formellen* Änderungen eine Gleichung zwischen den Variablen $x_1, \cdots, x_n$ invariant lassen sollen, auch als *Grundlage für die Dimensionsgleichungen* betrachtet werden kann. Die Gesamtheit der Sätze III und V führt also zu derselben Form von Beziehungen zwischen den formellen Faktoren, wie der Satz I. Dieser letztere ist aber allgemeiner, denn er läßt die

---

*) Es müssen die Beziehungen bestehen:

$$(2^*) \qquad \begin{aligned} \xi_{k+1} &= \varphi_1(\xi_1, \cdots, \xi_k), \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_n &= \varphi_{n-k}(\xi_1, \cdots, \xi_k). \end{aligned}$$

Lösen wir die Gleichung $f = 0$ in bezug auf x_n:

$$\text{(a)} \qquad x_n = F(x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

Soll sie invariant bleiben bei der Substitution (5), so haben wir

$$\xi_n x_n = F(\xi_1 x_1, \cdots, \xi_{n-1} x_{n-1})$$

oder, gemäß (2*) und (a):

$$\varphi_{n-k}(\xi_1, \cdots, \xi_k) F(x_1, \cdots, x_{n-1}) = F(\xi_1 x_1, \cdots, \xi_{n-1} x_{n-1}),$$

welches nichts anderes als eine Gleichung von der Form (3) ist. Also ist (a) eine homogene Gleichung.

Exponenten α_{ik} vollkommen frei, indem die Forderung der Invarianz einer *gegebenen* Gleichung, natürlich, auch die Exponenten präzisiert.

Bemerkung II. Mit dem Satze V ist noch nicht gesagt, daß die gegebene Gleichung selber schon die homogene Form haben muß:

Beispiel. Die linke Seite der Gleichung

$$\frac{A}{GB_1} + 1 - \frac{GB_2}{GB_1} = 0 \tag{a}$$

wo A und $\frac{B_1}{B_2}$ irgend welche bedingt homogene Funktionen *nullter* Ordnung sind, B_1 und B_2 einzeln genommen aber dieser Bedingung nicht genügen, ist offenbar nicht homogen.

Sie ist aber folgenden Gleichungen äquivalent:

$$A + GB_1 - GB_2 = 0, \tag{b}$$

$$A + G\frac{B_1}{B_2} = 0 \tag{c}$$

welche beide bedingt homogen sind.

Satz VI. *Ist eine Gleichung oder ein System von Gleichungen bedingt homogen, ist*

$$x_r = \frac{d^n x_i}{dx_h^n},$$

und sind ξ_i, ξ_h, ξ_r die Übergangsfaktoren resp. von x_i, x_h, x_r, so muß unter den bedingenden Gleichungen notwendigerweise auch die folgende enthalten sein:

$$\xi_r = \frac{\xi_i}{\xi_h^n}. \tag{6}$$

§ 4.

Kann man zu einem gegebenen System von bedingenden Gleichungen die allgemeinste Form angeben, auf welche sich jede entsprechende bedingt homogene Gleichung zurückführen läßt, so kann man auch umgekehrt nach jenem System von bedingenden Gleichungen fragen, welches eine gegebene Gleichung invariant läßt.

Eine *speziellere* Forderung ist sofort zu erfüllen: solche bedingende Gleichungen aufzustellen, gegenüber welchen jedes einzelne Glied der gegebenen Gleichung eine homogene Funktion sei und zwar so, daß alle Glieder von derselben Ordnung seien. Fassen wir alle Potenzprodukte ins Auge, welche als einzelne Argumente in der gegebenen Gleichung auftreten. Bezeichnen wir mit

$$P_1(x),\ P_2(x),\ \cdots,\ P_m(x)$$

diejenigen unter ihnen, welche als Faktoren vor den einzelnen Gliedern stehen, (als Spezialfall davon muß auch die Einheit betrachtet werden), und mit

$$P_{m+1}(x),\ P_{m+2}(x),\ \cdots,\ P_{m+r}(x)$$

alle diejenigen, welche *irgend wie anders* auftreten.*)

Dann genügen unserer Forderung folgende bedingende Gleichungen:

$$P_1(\xi) = P_2(\xi) = \cdots = P_m(\xi), \tag{7}$$

$$P_{m+1}(\xi) = 1;\ P_{m+2}(\xi) = 1;\ \cdots;\ P_{m+r}(\xi) = 1. \tag{8}$$

Es kann vorkommen, daß das einzige Lösungssystem, welches diese Gleichungen zulassen, lauter *Eins* sind:

$$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 1.$$

Damit ist aber nicht gesagt, daß die gegebene Gleichung in bezug auf keine bedingenden Gleichungen invariant bleiben könne; es ist noch denkbar, daß sie auf eine andere Form reduzierbar wäre, welcher eine geringere Anzahl von Gleichungen (7) und (8) entsprechen.

Beispiel. Es seien im Beispiel zu der Bemerkung II des § 1 unter A, B_1 und B_2 *folgende Funktionen* verstanden:

$$A = x_1 x_2,\quad B_1 = x_2,\quad B_2 = x_3.$$

Dann entsprechen der Form (a) und auch der Form (b) folgende Gleichungen (7) und (8):

$$\xi_1 \xi_2 = 1,\quad \xi_2 = 1,\quad \xi_3 = 1,$$

welche das einzige Lösungssystem zulassen

$$\xi_1 = 1,\quad \xi_2 = 1,\quad \xi_3 = 1.$$

Hingegen der Form (c) entsprechen die Gleichungen

$$\xi_1 \xi_2 = 1,\quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = 1,$$

aus welchen die bedingenden Gleichungen

$$\xi_1 = \xi_2^{-1},$$
$$\xi_3 = \xi_2$$

mit einer unabhängigen Variablen (ξ_2) folgen. Es zeigt sich somit, daß unser Problem nicht immer leicht in seiner allgemeinsten Form zu beantworten ist.

---

*) Z. B. in der Gleichung:

$$x + x^2 e^{y^2} + y^2 \sqrt{x^2 - 1} + 2 = 0$$

sind

$$P_1 = x,\ P_2 = x^2,\ P_3 = y^2,\ P_4 = 1;\quad m = 4,$$
$$P_5 = y^2,\ P_6 = x^2;\quad r = 2.$$

§ 5.

Die entsprechenden Betrachtungen können uns dienen um den Überblick über die Herleitung neuer Gleichungen auf Grund von Dimensionierung ihrer Variablen zu verschaffen. Wir haben nur noch eine leicht zu beweisende Tatsache zu beachten:

Satz VII. *Ist eine Gleichung Folgerung eines bestimmten Gleichungssystems und sind alle ihre Konstanten durch dieses Gleichungssystem vollkommen definiert, so ist sie bedingt homogen in bezug auf dieselben bedingenden Gleichungen, wie das gegebene Gleichungssystem.*

Bemerkung I. Enthält die betreffende Folgerung solche Konstanten, welche nicht auf Grund von gegebenen Gleichungen zu berechnen sind (etwa Integrationskonstante), so kann es vorkommen, daß die Homogeneität dieser Gleichung durch die Mitvariation dieser Konstanten erreicht wird — dann aber kann man nicht beurteilen, wie die *Gesamtheit der Variablen allein* in ihr auftritt.

Beispiel. Es sei die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$$

gegeben und es sei ihr Integral gesucht. Die bedingende Gleichung hier ist:

$$\frac{\xi}{\tau^2} = \varkappa^2\xi.$$

Der Faktor ξ hebt sich heraus, und man erhält eine bedingende Gleichung

$$\frac{1}{\tau^2} = \varkappa^2, \quad \text{d. h.} \quad k\tau = 1,$$

welche auf gar keinen Zusammenhang zwischen der Variablen x und den Variablen t und k hinweist.

In Wirklichkeit besteht aber die Gleichung

$$x = A \operatorname{Sin} kt + B \operatorname{Cos} kt, \tag{9}$$

welche deshalb der Willkürlichkeit des Faktors ξ nicht widerspricht, weil bei seinem Einführen auch die Konstanten A und B mitvariieren.

Bemerkung II. Aus dem Satze IV, § 3, folgt, daß die unbestimmte Funktion Φ in der gesuchten homogenen Gleichung um so mehr Argumente enthält, je mehr bedingende Gleichungen man hat. Die gesuchte Gleichung wird also um so *mehr* umschrieben, je *weniger* bedingende Gleichungen man hat.*)

*) Man hat dann mehr Freiheitsgrade, nach welchen man die Abhängigkeit zwischen den Variablen prüfen kann.

Hat man also die gegebenen Gleichungen nicht genügend geschickt aufgeschrieben, so erhält man bei Anwendung der Methode des § 4 mehr als nötig bedingende Gleichungen (7) und (8).

Fügt man zu den bedingenden Gleichungen des gegebenen Systems noch weitere bedingende Gleichungen — aus irgend welchen anderen Gesichtspunkten — hinzu, so vermindert man wiederum die Bestimmtheit der Lösung.

§ 6.

Materielle und formelle Homogeneität.

Nun wollen wir die Übergangsfaktoren nach ihrem Ursprung unterscheiden.

22. Bedeutet die Transformation

$$\begin{aligned} x_1' &= \xi_1 x_1, \\ x_2' &= \xi_2 x_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

eine materielle Änderung, so nennen wir die bedingenden Gleichungen zwischen den Übergangsfaktoren — *Modellgleichungen.*

23. Eine den Modellgleichungen genügende Transformation — *Modelltransformation.*

24. Die Gesamtheit von Lösungen $x_1', x_2', \cdots$ welche durch eine Modelltransformation aus der Gesamtheit von Lösungen $x_1, x_2, \cdots$ erhalten wird — *Modell* dieser letzteren.

25. Eine Funktion, resp. Gleichung, welche bedingt homogen in bezug auf Modellgleichungen ist, nennen wir *materiell homogen.*

12*. Bedeutet die Transformation

$$\begin{aligned} x_1' &= \xi_1 x_1, \\ x_2' &= \xi_2 x_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

eine formelle Änderung, so sind die bedingenden Gleichungen zwischen den Übergangsfaktoren nichts anderes, als *Dimensionsgleichungen.*

26. Eine den Dimensionsgleichungen entsprechende Transformation nennen wir *formelle Transformation.*

27. Eine Funktion, resp. Gleichung, welche bedingt homogen in bezug auf Dimensionsgleichungen ist, nennen wir *formell homogen.*

§ 7.

Versteht man unter den ξ materielle Faktoren, so bildet der Satz VII, § 5, die Grundlage der *Modelltheorie*, von der der bekannte Satz von Froude eine Spezialisierung ist.

Versteht man unter den ξ formelle Faktoren, so kann der Satz VII die Grundlage für die Ableitung der Gleichungen aus der Betrachtung der Dimensionen bilden. Sind nämlich die Dimensionsgleichungen so gewählt, daß alle Gleichungen, von welchen die gesuchte Gleichung eine Folgerung ist, sich als formell homogen erweisen, so fallen offenbar die entsprechenden Modellgleichungen mit den betreffenden Dimensionsgleichungen — oder, wenigstens, mit einem Teil dieser Dimensionsgleichungen — zusammen. Und die Dimensionsbetrachtungen führen ebenso gut zu einem richtigen Resultate, wie die Modelltheorie.*)

Aus der Bemerkung II des § 5 folgt aber, daß man mit Rücksicht auf die Bestimmtheit des Resultates die überflüssigen bedingenden Gleichungen vermeiden muß. Der rechnerische Unterschied zwischen den Modell- und den Dimensionsgleichungen ist aber der, daß zu jeder Gruppe von Gleichungen zwischen den Größenzahlen eigene Modellgleichungen gehören, hingegen die Dimensionsgleichungen — ihrem Wesen nach — ein für allemal gegeben werden; sollen sie der formellen Homogeneität aller grundlegenden Gleichungen entsprechen, so werden sie offenbar sehr zahlreich sein, und werden somit, im allgemeinen eine unnötige Unbestimmtheit in das Resultat hineintragen.

§ 8.

Immerhin kann man, bei Berücksichtigung der Ausgangsgleichungen, fehlerfrei, wenn auch nicht mit dem größtmöglichen Erfolg, die Dimensionsbetrachtungen anstatt der Modelltheorie anwenden. (Natürlich mit dem Vorbehalt, der durch die Bemerkung I, § 5 ausgedrückt ist.)

Deshalb ist es angemessen nach einer solchen *Spezialisation* von Dimensionsgleichungen zu fragen, welche diesem Standpunkte entspräche.

Nehmen wir an, daß alle physikalischen Gleichungen sich auf eine bestimmte Gruppe von Gleichungen zurückführen lassen. Dann hätte man einfach die Modellgleichungen aufzustellen, welche dieser gesamten Gruppe entsprechen und die Dimensionsgleichungen identisch mit diesen Modellgleichungen zu machen.

Es können folgende *Hindernisse* im Wege stehen:

a) Man hat noch nicht so eine grundlegende Gruppe von Gleichungen gefunden.

b) Man hat keine Garantie, daß sie endlich sei, und auch daß die Anzahl der Grundvariablen endlich sei.

*) Gewöhnlich wird aber die formelle Homogeneität der Ausgangsgleichungen nicht untersucht, und man operiert so, als ob jede Gleichung an und für sich homogen sein sollte, was keine Begründung hat.

c) Sollte die betreffende Gruppe gefunden sein, so kann es sich ergeben, daß die entsprechenden Modellgleichungen entweder alle oder, wenigstens, einige der Faktoren ξ zu *Eins* machen. Dieses würde heißen, daß man die Einheiten der entsprechenden Größen nicht ändern dürfte ohne die Invarianz einiger Gleichungen zu zerstören. Mit anderen Worten, es ist denkbar, daß kein Dimensionssystem zu finden sei, gegenüber welchem alle physikalischen Gleichungen *ohne Ausnahme* formell homogen wären.

§ 9.

Die Rolle der formellen Variablen.

Sind die Gleichungen zwischen den Größenzahlen nicht formell homogen in bezug auf ein gegebenes Dimensionssystem, so können sie noch immer formell homogen *gemacht werden,* wenn man sich entschließt zu dem System der formell veränderlichen Zahlen noch *passend gewählte formelle Variablen zu adjungieren.*

Dieses kann immer dadurch erreicht werden, daß man jene Potenzenprodukte ins Auge faßt, welche in § 4 besprochen worden sind, und die vor ihnen stehenden Koeffizienten formell variieren läßt.

Es sei

$$k_i P_i(x) = Q_i(x, k_i). \tag{10}$$

Setzt man dann in den Gleichungen (7) und (8) $Q_i(x, k_i)$ an Stelle von $P_i(x)$ und beachtet die noch so beliebig gegebenen Dimensionsgleichungen, so lassen sich die formellen Übergangsfaktoren $\varkappa_i$ der Koeffizienten k_i immer als Potenzprodukte der formellen Faktoren der Grundvariablen so berechnen, daß die Gleichungen (7) und (8) befriedigt werden.

Auf diese Manier wird eine Gleichung von *beliebigem analytischen Bau* bei einem *beliebigen Dimensionssystem* formell homogen.

Satz VIII. *Jeder Koeffizient k_i, welcher als Faktor irgend ein Potenzprodukt $P_i(x)$ begleitet, kann als Potenzprodukt von Spezialwerten der in die Gleichung eintretenden Größenzahlen dargestellt werden.**)

---

*) In der Tat, es sei $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ *irgend* ein System von Spezialwerten der Variablen $x_1, \cdots, x_n$. Es sei

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \Phi(k_1 P_1, k_2 P_2, \cdots, k_r P_r) = 0 \tag{11}$$

die gegebene Gleichung, wobei

$$P_i \doteqdot x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} \cdots x_n^{\alpha_{in}}$$

bedeute. Nennen wir

$$P_i' = x_1'^{\alpha_{i1}} x_2'^{\alpha_{i2}} \cdots x_n'^{\alpha_{in}},$$

$$y_h = \frac{x_h}{x_n'},$$

$$P_i(y) = y_1^{\alpha_{i1}} y_2^{\alpha_{i2}} \cdots y_n^{\alpha_{in}}.$$

§ 10.

Untersuchung des speziellen in der Physik hergebrachten Dimensionssystems.

Es herrscht die allgemeine Überzeugung, daß alle Gleichungen der Physik nicht anders als homogen sein können und daß die Dimension einer Größe in enger Beziehung zu ihrem Wesen und zu ihrer funktionellen Abhängigkeit von anderen Größen stehe. Daß das hergebrachte Dimensionssystem dieser Überzeugung nicht entspricht, können folgende Beispiele zeigen:

(a) $$f = k\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

wo f die Gravitationskraft, r Abstand zwischen den zwei anziehenden Punkten, m_1 und m_2 ihre Massen bezeichnen.

Da Länge, Masse und Zeit im hergebrachten System Grundvariable sind, so kann man in der Dimensionsgleichung

$$\varphi = \varkappa\,\frac{\mu^2}{\xi^2}$$

welche äquivalent ist zu der Gleichung

$$\frac{\xi}{\tau^2} = \varkappa\,\frac{\mu}{\xi^2}$$

den formellen Faktor $\varkappa$ des Koeffizienten k nicht gleich 1 setzen. Er muß vielmehr sein

$$\varkappa = \frac{\xi^3}{\tau^2 \mu},$$

Multiplizieren und dividieren wir jedes Argument $k_i P_i$ mit P_i', dann nimmt (11) die Gestalt an:

$$F(k_1 P_1' P_1(y),\ k_2 P_2' P_2(y),\ \cdots,\ k_r P_r' P_r(y)) = 0\,.$$

Ändert man die Einheitenwahl, so verändern sich die Ausdrücke P_i, P_i', k_i. Es bleiben aber unverändert die Ausdrücke $P_i(y)$. Also bleibt die Gleichung bestehen, wenn die Ausdrücke

$$u_i = k_i P_i'$$

dieselben Zahlenwerte behalten, die sie bei der ursprünglichen Einheitenwahl erhalten haben, d. h. wenn stets

$$k_i = U_i x_1'^{-\alpha_{i1}} x_2'^{-\alpha_{i2}} \ldots x_n'^{-\alpha_{in}}$$

ist.

Daraus folgt für die formellen Übergangsfaktoren $\varkappa_i$

$$\varkappa_i = \xi_1^{-\alpha_{i1}} \xi_2^{-\alpha_{i2}} \ldots \xi_n^{-\alpha_{in}}\,.$$

Wir haben somit k_i als eine formelle Variable und zugleich als Funktion der Spezialwerte der Größenzahlen dargestellt.

also ist k eine formelle Variable und die Gravitationsgleichung ist nicht homogen.

(b) $$w = k\frac{S}{r}$$

wo w Zentralwinkel, r Strahl des Kreises, S Bogenlänge bezeichnen.

Die entsprechende Dimensionsgleichung lautet:

$$\varphi = \varkappa$$

denn S und r, als Längen, haben beide denselben formellen Faktor, der sich kürzt. Somit muß der Koeffizient k notwendigerweise formell variabel sein. Und faktisch, obwohl man den Winkel als eine „reine Zahl" zu bezeichnen pflegt, *behandelt* man ihn als eine *Grundvariable*, denn man ändert seine Einheit, und zwar unabhängig von allen anderen!

(c) $$y = A \operatorname{Cos} \frac{2\pi n}{T}(t + B)$$

wo y Ablenkung eines schwingenden Punktes aus seiner Ruhelage, t Zeit bedeuten.

A und B sind nichts anderes als formelle Variablen, welche nur unmittelbar als Spezialwerte der Größenzahlen y und t gedeutet werden, gemäß dem Satz VIII des § 9.

T wird entweder unmittelbar als Spezialwert der Zeit gegeben oder, wenn man die Gleichung (c) als Integral erhält, auf Grund der entsprechenden Differentialgleichung als Funktion gewisser anderer Größenzahlen berechnet.

Das hergebrachte Einheitensystem liefert also nicht dasjenige, was man ihm zumutet. Die physikalischen Gleichungen sind im hergebrachten Dimensionssystem durchaus nicht alle formell homogen.

§ 11.

Ist ein „wahres" Dimensionssystem möglich?

Es fragt sich, ob nicht doch ein solches System zu finden wäre, welches alle Gleichungen der Physik formell homogen macht. Im § 8 haben wir ein solches System charakterisiert.*) Abgesehen aber von den erstgenannten Hindernissen ((a) und (b)), welche, vielleicht, nur provisorisch wären, zeigt schon das Beispiel (b) des § 10, daß das letzte Hindernis (c) nicht zu beseitigen wäre: wir haben auch mit solchen Gleichungen zu tun, bei denen die formellen Variablen auf keine Weise zu beseitigen sind. Man kann die Anzahl solcher Gleichungen unbestimmt erweitern. So

*) So ein System würde wohl als das „wahre" anerkannt sein in dem Sinne, wie es z. B. Föppl meinte. Föppl: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, 1894, S. 119.

z. B. alle Gleichungen, durch welche eine Größe als mathematisch homogene Funktion nullter Ordnung von Größen einer und derselben Art definiert wird. Oder solche, wo mehrere Glieder verschiedener Ordnung von einer und derselben Größe vorkommen. Und da man immer solche Formen von physikalischen Objekten denken kann, die durch derartige Gleichungen zwischen den Koordinaten definiert werden, so hat man kein Recht Gleichungen von solchem Bau aus der Physik auszuschalten.

Beispiel. $y = ax + bx^2$, wo y und x rechtwinklige Koordinaten einer reellen gebogenen Messingstange sind.

Es ergibt sich also: *es ist kein Dimensionssystem möglich, bei welchem alle Gleichungen der Physik formell homogen wären.*

§ 12.

Zur Entstehung des hergebrachten Dimensionssystems.

Um die irrige Auffassung betreffs Dimensionen, von welcher in § 10 die Rede war, völlig zu überwinden, ist es zweckmäßig, ihrem Ursprung nachzugehen.

Das hergebrachte Einheitensystem ist entstanden, in Verband mit der praktischen Forderung: die meisten Größen *indirekt* zu messen und zwar auf Grund von Gleichungen, welche sie mit einer geringen Anzahl leicht meßbarer Größen verbinden.

Es ist daher zweckmäßig gewesen die elementarsten Gleichungen, welche zur *Berechnung* der abgeleiteten geometrischen und mechanischen Größen dienen, zugleich auch dazu zu gebrauchen, um deren *Einheiten festzulegen.* Dieses ist dadurch geschehen, daß die Dimensionsgleichungen für diese Größen mit den jenen Gleichungen entsprechenden Modellgleichungen zusammenfallen. Damit ist erreicht, einerseits die formelle Homogeneität dieser Gleichungen, andererseits, daß die Einheiten der abgeleiteten Variablen bei jeder Einheitenwahl stets auf dieselbe Weise durch die Einheiten der Grundvariablen beschrieben werden.*)

---

*) Beispiele: 1. Wenn l_1 und l_2 die zwei Längenabmessungen eines Rechteckes und s dessen Flächeninhalt bezeichnen, so ist bei dem allgemeinsten Einheitensystem

(*) $$s = k_1 l_1 l_2,$$

wo k eine formelle Variable ist.

Die Modellgleichung dazu lautet:

(a) $$\sigma = \lambda^2.$$

Die Dimensionsgleichung:

(b) $$\sigma = \varkappa_1 \lambda^2.$$

Da aber im hergebrachten Dimensionssystem $\varkappa_1 = 1$ gesetzt wird, so fallen die Gleichungen (a) und (b) zusammen. Es sei beachtet, daß in der Geometrie das Wort

Die Dimensionsgleichungen für die folgenden Größen werden konsekutiv mit dem Bestreben aufgebaut, daß die Gleichungen, in welchen man zum ersten Male auf sie stößt, wiederum formell homogen seien. Auch hier hängt es mit dem praktischen Zweck zusammen, die Einheiten dieser Größen möglichst *einfach* durch die Einheiten der Grundvariablen zu definieren. Auf diese Manier werden im Bewußtsein Vieler die Begriffe „Messen“ ... „Größenzahl berechnen“; „Einheitendefinition“ ... „Größendefinition“; „materielle Änderung der Größenzahl“ ... „formelle Änderung“; „Dimension“ ... „Wesen der Größe“ miteinander verschmolzen. Man erwartet, daß *in Analogie* zu den genannten elementaren geometrischen und mechanischen Größen auch für alle weiteren Größen außer Dimensionsgleichungen auch Modellgleichungen bestehen müssen und zwar von gleicher Form wie die Dimensionsgleichungen, welches auf die Existenz von entsprechenden Gleichungen zwischen den Größenzahlen hinweisen würde.

Daß diese Erwartung völlig unbegründet ist, sollte schon daraus ersehen werden, daß faktisch mehr als ein Dimensionssystem sich ohne jeden rechnerischen Widerspruch hat durchführen lassen — nämlich die beiden Systeme elektromagnetischer Einheiten.

Wir haben aber in § 9 gesehen, wie man auch ein beliebiges Einheitensystem ohne rechnerischen Widerspruch durchführen kann und dabei bei der illusorischen Überzeugung von der formellen Homogeneität aller physikalischen Gleichungen bleiben kann. (Satz VIII.)

Auch ist die Ansicht, als ob jede Größe, welche man augenblicklich noch nicht direkt zu messen versteht, überhaupt eine „Dimension“ besitzen müsse, ein Mißverständnis: Die Aussage (A) des § 1 konstatiert, daß wie man auch eine gegebene Größe faktisch ausgemessen haben mag, man ihre Größenzahl doch immer in bezug auf eine *willkürliche* Einheit umrechnen kann. Diese letztere Einheit braucht also in keinem Verband mit den übrigen zu stehen.

„Dimension“ noch einen anderen Sinn hat, welcher eben nicht zu den formellen, sondern zu den materiellen Änderungen Beziehung hat.

2. Wenn v Geschwindigkeit, x Länge, t Zeit bezeichnet, so ist

(**) $$v = k_2 \frac{dx}{dt}.$$

Die entsprechende Modellgleichung ist:

(a) $$\varphi = \frac{\xi}{\tau}.$$

Die Dimensionsgleichung *im allgemeinen* System:

(b) $$\varphi = \varkappa_2 \frac{\xi}{\tau}.$$

Im hergebrachten System $\varkappa_2 = 1$ und somit fallen auch hier die Gleichungen (a) und (b) zusammen.

§ 13.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die sehr verbreitete Methode die Form noch unbekannter Gleichungen zwischen Größen, deren Dimension schon festgelegt ist, auf Grund der Homogeneitätsforderung festzustellen, keine Basis hat und im allgemeinen zu Fehlern führen kann. Daß man trotzdem so oft gute Resultate erhält, hängt zum Teil damit zusammen, daß viele Gleichungen Folgerungen jener sind, auf welchen man das Einheitensystem aufgebaut hat, welche also formell homogen sind; zum Teil aber beruht es darauf, daß man auf eine geschickte Weise, unbewußt von den im Satz VIII erwähnten Spezialwerten der Variablen Gebrauch macht.*)

---

*) Beispiele: 1. Man nimmt nie Anstoß daran, daß die Konstanten A und B in der Gleichung (c) des § 10 formell variabel sind, weil man sie leicht auf eine physikalische Manier deuten kann. Wie wäre es aber, wenn man so eine Gleichung allein auf Grund von Dimensionsbetrachtungen zu erraten hätte?

2. Man kommt zu einem richtigen Resultat, wenn man die Schwingungszeit T eines schweren Pendels als Funktion seiner Länge l und der Beschleunigung des Schwerefeldes g auf Grund von Dimensionsbetrachtungen feststellen will — aber nur im hergebrachten Dimensionssystem (siehe Appell: Mécanique rationnelle, p. 91, T. I). Sollte zwischen den formellen Faktoren τ von T, λ von l und γ von g z. B. folgende Dimensionsgleichung bestehen:

$$\gamma = \frac{\lambda}{\tau},$$

(anstatt von

$$\left.\gamma = \frac{\lambda}{\tau^2}\right),$$

und wollte man eine gleiche Modellgleichung daraus erschließen, so würde man auf folgende Beziehung kommen:

(a) $$\mathrm{T} = k_1 \frac{l}{g}$$

anstatt auf

(b) $$\mathrm{T} = k_2 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Der Fehler würde nicht in der Annahme einer anderen Dimensionsgleichung, sondern in dem Identifizieren der Modell- mit der Dimensionsgleichung bestehen.

Es ist aber auch ein solches schwingendes System nicht ausgeschlossen, in welchem die Schwingungsperiode T mit einer Länge l und einer Beschleunigung g gerade durch die Gleichung (a) verbunden wäre. Dann aber wäre *im hergebrachten* System der Koeffizient k_1 formell variabel.

3. Es sei von einem festen Abstande a eine absolut elastische Kugel auf eine absolut elastische Ebene fallen gelassen. Sie wird periodische Schwingungen ausüben. Die Schwingungsperiode T wird offenbar Funktion folgender Größen sein: a, r (Abstand des Systems vom Erdzentrum), m (Masse der Erde). Man versuche diese Beziehung auf Grund von Dimensionsbetrachtungen festzustellen.

§ 14.

Zusammenfassung.

Wir kommen zu folgenden Behauptungen:

1. Die allgemein verbreitete Überzeugung, daß alle physikalischen Gleichungen homogen (in unserer Terminologie „formell homogen“) seien, ist unrichtig: in vielen Gleichungen kommen solche Zahlen vor, welche ohne Funktionen von *Größenzahlen* zu sein, bei *Einheitenwechsel* variieren müssen.

2. Dieses wird oft deshalb übersehen, weil jede derartige Zahl als Funktion von Spezialwerten der Größenzahlen gedeutet werden kann.

3. Adjungiert man zu dem System von Größenzahlen noch diese formellen Variablen, so kann die Forderung der formellen Homogeneität keine Schranken mehr auf die Form der physikalischen Gleichungen auferlegen.

4. Die Überzeugung, daß die Dimension einer Zahl auf ihre funktionelle Abhängigkeit von irgend welchen Größenzahlen hinweisen könne, ist ebenfalls unrichtig.

5. Sie beruht auf Verwechslung der Begriffe, die wir mit den Worten „materielle“ und „formelle“ Homogeneität bezeichnen.

6. Nur insofern die Modellgleichungen der gesuchten Gleichung mit den Dimensionsgleichungen übereinstimmen, können diese letzteren zur Feststellung dieser Gleichung dienen.

7. Aber auch dann gibt im allgemeinen die Modelltheorie bestimmtere Resultate.

8. Sowohl Dimensions- als auch Modellbetrachtungen laufen auf nichts hinaus, wenn die gesuchte Gleichung Konstante enthält, die nicht aus den Gleichungen zu berechnen sind, von denen die gesuchte eine Folgerung ist.

9. Es ist kein Einheitensystem möglich, bei welchem alle Gleichungen der Physik frei von formellen Variablen wären.*)

10. Es ist gar nicht notwendig die Variationen der Einheiten verschiedener Größen voneinander abhängig zu machen (den Größen „Dimensionen“ zuzuschreiben).*)

11. Geschieht es doch, so können die Beziehungen zwischen diesen Variationen nicht anders als durch Potenzproduktgleichungen (Dimensionsgleichungen) ausgedrückt werden.

Leiden, den 15. März 1915.

---

*) Vgl. T. Ehrenfest-Afanassjewa, Über die Willkürlichkeit bei Dimensionierung phys. Größen. Math. Naturwissensch. Bl. 1905.