Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Mein in Bd. 71 der Mathematischen Annalen veröffentlichter Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets stützt sich auf die ihm vorausgeschickte Erledigung eines Hauptbestandteils des n-dimensionalen Jordanschen Satzes. Im folgenden gelangen wir auf viel direkterem Wege zum Ziele, nämlich in unmittelbarem Anschluß an die Invarianz der Dimensionenzahl, unter Heranziehung vom Begriffe des Abbildungsgrades.

Die Invarianz der Dimensionenzahl wurde gegründet auf folgenden Satz*):

Im n-dimensionalen Raume R_n' besitzt das eineindeutige und stetige Bild G' eines n-dimensionalen Gebiets G in beliebiger Nähe eines beliebigen seiner Punkte ein Gebiet.

Sei γ' ein solches zu G' gehöriges Gebiet, γ die in γ' abgebildete Punktmenge von G. Alsdann ist γ ein *Teilgebiet* von G, denn zu jedem Punkte von γ existiert in G eine gewisse Umgebung, deren Bild ganz in γ' enthalten ist, welche mithin zu γ gehört.

Sei M ein willkürlicher Punkt von G, M' sein Bild: *zur Begründung der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets haben wir zu zeigen, daß G' in R_n' eine volle Umgebung von M' enthält.*

Dazu beschreiben wir in G um M eine kleine, mit ihrem Innengebiete I in G enthaltene $(n-1)$-dimensionale Kugel K, bezeichnen das Bild von I mit I',[1] das Bild von K mit K', und dasjenige von K' in R_n' bestimmte Gebiet, welches M' enthält, mit $\mathfrak{G}'$. Die gegebene Abbildung von G auf R_n' bestimmt dann eine Abbildung von I auf $\mathfrak{G}'$, welche einen gewissen *Grad* c besitzt.

Zu I gehört nun sicher ein Gebiet γ, dem als Bild ein Teilgebiet γ' von $\mathfrak{G}'$ entspricht, und der Grad dieser Abbildung von γ auf γ' ist gleich ± 1.**)

---

*) Math. Ann. 70, S. 165.

**) ibid. 71, S. 598.

1) Dies ist auf Grund des Jordanschen Satzes definiert.

Dann aber muß auch der Grad c gleich ± 1 sein, denn zu einem willkürlichen Punkte P' von γ' gibt es eine simpliziale Approximierung der Bildmenge von γ und eine simpliziale Approximierung der Bildmenge von I, welche in einer gewissen Umgebung von P' miteinander identisch sind.

Wenn aber c gleich ± 1 ist, *so muß I' überall dicht in $\mathfrak{G}'$ liegen**), muß also in R_n' eine volle Umgebung von M' enthalten.

W. z. b. w.

*) ibid. 71, S. 106.