Über Jordansche Mannigfaltigkeiten.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

§ 1.

Die Erreichbarkeit.

Die im § 1 des vorstehenden Aufsatzes im Gebiete I konstruierte Pseudomannigfaltigkeit γ besitzt die Eigenschaft, daß je zwei Punkte ihrer linken Seite sich durch einen in beliebiger Nähe von γ verlaufenden, $J+\gamma$ außerhalb seiner Endpunkte nicht treffenden Weg verbinden lassen, und daß jeder Punkt ihrer rechten Seite sich durch einen außerhalb seiner Endpunkte $J+\gamma$ nicht treffenden Weg mit dem Punkte P verbinden läßt. Mithin wird I von γ in höchstens zwei Gebiete zerlegt.

Nach § 4 des vorstehenden Aufsatzes muß jedes Polygon, von dem kein Eckpunkt und keine Teilstrecke in $\mathcal{F}_\nu + J_\nu''$ liegt und keine Seite eine $(n-2)$-dimensionale Grundseite von $\mathcal{F}_\nu + J_\nu''$ trifft, mit $\mathcal{F}_\nu + J_\nu''$ eine gerade Zahl von Kreuzungspunkten aufweisen, sodaß die linke und die rechte Seite von $\mathcal{F}_\nu$ durch $\mathcal{F}_\nu + J_\nu''$ voneinander getrennt werden. Dann aber werden auch die linke und die rechte Seite von γ durch $\gamma + J''$ voneinander getrennt, sodaß von $\gamma + J''$ ein endliches, die rechte Seite von γ enthaltendes Gebiet I_r bestimmt wird. Dieses Gebiet I_r ist ein Teilgebiet von I, und nach der im vorstehenden Aufsatze „Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets" angewandten Methode läßt sich zeigen, daß die Grenze von I_r mit $J'' + \gamma$ identisch ist.

Ebenso wird von $\gamma + J'$ ein die linke Seite von γ enthaltendes Teilgebiet I_l von I bestimmt, dessen Grenze mit $J' + \gamma$ identisch ist.

In diese zwei Gebiete I_r und I_l wird I von γ zerlegt.

Sei Q ein willkürlicher Punkt von J; ${}_1J'$, ${}_2J'$, ${}_3J'$, $\cdots$ eine solche Folge von Q enthaltenden, gegen Q konvergierenden Grundsimplexen von J, deren jedes im Innern des vorangehenden enthalten ist. Zu jedem ${}_pJ'$ konstruieren wir eine Mannigfaltigkeit ${}_p\gamma$, welche I in ${}_pI_r$ und ${}_pI_l$ zerlegt, und wir sorgen dafür, daß einerseits die verschiedenen ${}_p\gamma$ einander nicht treffen, sodaß ${}_{p+1}I_l$ in ${}_pI_l$ enthalten ist, und andererseits ${}_pI_l$ für unbeschränkt wachsendes p gleichmäßig gegen Q konvergiert.

In jedem Gebiete ${}_pI_l$ verbinden wir ${}_p\gamma$ und ${}_{p+1}\gamma$ durch einen Weg ${}_p\sigma$, und in jedem ${}_p\gamma$ verbinden wir den Endpunkt von ${}_{p-1}\sigma$ und den Anfangspunkt von ${}_p\sigma$ durch einen Weg ${}_p\varrho$. Alsdann bilden die ${}_p\sigma$ und ${}_p\varrho$ zusammen einen in I nach Q führenden einfachen Kurvenbogen, sodaß wir bewiesen haben:

Satz 1. *Jeder Punkt einer Jordanschen Mannigfaltigkeit ist sowohl für das innere wie für das äußere Gebiet erreichbar.*

Die Schoenfliessche Erweiterung des Jordanschen Satzes bleibt mithin im n-dimensionalen Raume in Kraft. Sie verliert hier aber ihre in der Ebene bestehende Umkehrbarkeit, denn diese Umkehrung würde folgendermaßen lauten:

Eine geschränkte abgeschlossene Punktmenge, welche im R_n zwei Gebiete bestimmt, und von der jeder Punkt für jedes dieser Gebiete erreichbar ist, ist eine Jordansche Mannigfaltigkeit.

Um einzusehen, daß dieser Satz schon im dreidimensionalen Raume nicht mehr zutrifft, betrachte man die Gesamtheit F der in zylindrischen Koordinaten durch folgende Formeln bestimmten Punktmengen:

$$(1) \qquad 1 > \varrho > 0 \qquad z = 2 + \cos\varphi + \left(1 - \sqrt{\cos^2\varphi}\right) \sin\frac{\pi}{\varrho}\cdot$$

$$(2) \qquad 1 > \varrho > 0 \qquad z = -2 - \cos\varphi - \left(1 - \sqrt{\cos^2\varphi}\right) \sin\frac{\pi}{\varrho}\cdot$$

$$(3) \qquad \varrho = 1 \qquad 2 + \cos\varphi \geqq z \geqq -2 - \cos\varphi.$$

$$(4) \qquad \varrho = 0 \qquad 3 \geqq z \geqq 1.$$

$$(5) \qquad \varrho = 0 \qquad -1 \geqq z \geqq -3.$$

Diese abgeschlossene Punktmenge F *zerlegt den Raum in zwei Gebiete, und jeder Punkt von F ist für jedes dieser Gebiete erreichbar.* Aber ein gegen den Punkt H ($\varrho = 0$, $z = 2$) konvergierender Punkt von F läßt sich in F nicht durch einen gegen H konvergierenden einfachen Kurvenbogen mit H verbinden, *sodaß F keine Jordansche Fläche ist.*

§ 2.

Die Unbewalltheit.

Sei G eine abgeschlossene Punktmenge des R_n, $\mathfrak{G}$ ein von G bestimmtes Gebiet, Q und Q' zwei erreichbare Punkte der Grenze von $\mathfrak{G}$, k ein Q und Q' innerhalb $\mathfrak{G}$ verbindender einfacher Kurvenbogen, M das Maximum der Entfernungen, welche die zu k gehörigen Punkte von Q

und von Q' besitzen, m das Minimum von M für die verschiedenen bei gegebenen Q und Q' möglichen Wahlen von k. Diese Größe m bezeichnen wir mit Schoenflies als die *Wegdistanz* von Q und Q' für das Gebiet $\mathfrak{G}$. Wenn diese Wegdistanz mit der Entfernung von Q und Q' gegen Null konvergiert, so werden wir G für das Gebiet $\mathfrak{G}$ *unbewallt* nennen.

Sei nun (Q_1, Q_1'), (Q_2, Q_2'), $\cdots$ eine solche Folge von in J liegenden Punktepaaren, daß der Abstand von Q_p und Q_p' für unbeschränkt wachsendes p gegen Null konvergiert. Zu jedem Paare (Q_p, Q_p') können wir ein dieses Paar in seinem Innern enthaltendes Grundsimplex J_p', und zu jedem J_p' ein γ_p in solcher Weise konstruieren, daß die Breiten sowohl von J_p' wie von γ_p für unbeschränkt wachsendes p unter jede Grenze herabsinken. Im Gebiete I_{tp} ziehen wir einfache Kurvenbogen χ_p resp. χ_p' von γ_p nach Q_p resp. Q_p', bezeichnen ihre Anfangspunkte mit φ_p resp. φ_p', und verbinden in γ_p die Punkte φ_p und φ_p' durch einen Weg ω_p.

Alsdann bilden χ_p, χ_p' und ω_p zusammen einen Q_p und Q_p' innerhalb I verbindenden einfachen Kurvenbogen, dessen Breite für unbeschränkt wachsendes p unter jede Grenze herabsinkt, d. h. es gilt:

Satz 2. *Eine Jordansche Mannigfaltigkeit ist sowohl für das innere wie für das äußere Gebiet unbewallt.*

Auch dieser Satz ist für die Ebene von Schoenflies bewiesen worden.

§ 3.

Die Zweiseitigkeit.

Sei J_1', J_2', $\cdots$, J_1' eine solche geschlossene Kette von Elementen von J, in welcher je zwei aufeinanderfolgende eine $(n-2)$-dimensionale Seite gemeinsam haben. Wir bezeichnen die von J_p' und J_{p+1}' gebildete Punktmenge mit ${}_{p+1}J_p'$, den Umfang von J_p' resp. ${}_{p+1}J_p'$ mit j_p resp. ${}_{p+1}j_p$, wählen wir J_1', und dementsprechend nach Math. Ann. 71, S. 108 für j_1 und nach ibid. S. 101 für J_2' und ${}_2J_1'$ einen positiven Sinn der Indikatrix, und verbinden einen im Innengebiete I liegenden Punkt P_i und einen im Außengebiete E liegenden Punkt P_e durch solche Wege $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{t}_1$, daß jedes $\mathfrak{t}_p$ die Mannigfaltigkeit J nur in Punkten von $J_p' - j_p$ trifft. Für diese $\mathfrak{t}_p$ nehmen wir die Richtung von P_i nach P_e als die positive an, und wir bezeichnen das vom im positiven Sinne durchlaufenen $\mathfrak{t}_p$ mit dem im negativen Sinne durchlaufenen $\mathfrak{t}_{p+2}$ gebildete Polygon mit w_p.

Zu jedem J_p' resp. ${}_{p+1}J_p'$ konstruieren wir nach der Methode des vorstehenden Aufsatzes ein γ_p, ein $j_{\nu p}$ und ein $\mathfrak{F}_{\nu p}$ resp. ein ${}_{p+1}\gamma_p$, ein ${}_{p+1}j_{\nu p}$ und ein ${}_{p+1}\mathfrak{F}_{\nu p}$, wobei wir annehmen dürfen, daß $\mathfrak{t}_p$ von den γ nur γ_p, ${}_{p+1}\gamma_p$ und ${}_p\gamma_{p-1}$, und von den $\mathfrak{F}_\nu$ nur $\mathfrak{F}_{\nu p}$, ${}_{p+1}\mathfrak{F}_{\nu p}$ und ${}_p\mathfrak{F}_{\nu,p-1}$ trifft, daß kein Eckpunkt und keine Teilstrecke eines $\mathfrak{t}_p$ in einem der γ oder $\mathfrak{F}_\nu$ liegt, und daß keine Seite eines t_p eine $(n-2)$-dimensionale Grundseite von einem der γ oder $\mathfrak{f}_\nu$ trifft.

Alsdann ist die Differenz der Anzahlen der positiven und der negativen Kreuzungen mit ${}_2\gamma_1$ entweder sowohl für t_1 wie für t_2 gleich $+1$, oder sowohl für t_1 wie für t_2 gleich -1, sodaß für hinreichend großes ν der Grad von ${}_2j_{\nu 1}$ in bezug auf w_2 dasselbe Vorzeichen hat wie der Grad von ${}_2j_{\nu 1}$ in bezug auf w_1. Mithin hat für hinreichend großes ν auch der Grad von $j_{\nu 2}$ in bezug auf w_2 dasselbe Vorzeichen wie der Grad von $j_{\nu 1}$ in bezug auf w_1.

Wenn wir nun weiter die positive Indikatrix von J_3' aus der positiven Indikatrix von J_2' herleiten, so finden wir in derselben Weise, daß der Grad von $j_{\nu 3}$ in bezug auf w_3 dasselbe Vorzeichen hat wie der Grad von $j_{\nu 2}$ in bezug auf w_2. Indem wir so fortfahrend schließlich zu J_1' zurückkehren, wird einerseits für J_1' eine neue positive Indikatrix bestimmt, andererseits aber finden wir, daß der Grad von $j_{\nu 1}$ in bezug auf w_1 sein ursprüngliches Vorzeichen behalten hat. Mithin ist die neue positive Indikatrix von J_1' mit der ursprünglichen identisch.

Hiermit ist bewiesen:

Satz 3. *Eine Jordansche Mannigfaltigkeit ist eine zweiseitige Mannigfaltigkeit.*

§ 4.

Die Ordnung der Jordanschen Gebiete.

Wir wählen sowohl für J wie für den R_n einen positiven Sinn der Indikatrix, schlagen um einen nicht in J liegenden Punkt A eine Kugel $\varkappa_A$, welche wir zur Bestimmung ihrer positiven Indikatrix als Grenze ihres Innern betrachten, und bilden J durch Projektion aus A eindeutig und stetig auf $\varkappa_A$ ab. Den Grad dieser Abbildung nennen wir die *Ordnung von A in bezug auf J.* Sie ist für hinreichend großes ν identisch mit der Differenz der Anzahlen der positiven und der negativen Kreuzungen mit J_ν eines aus dem Unendlichen nach A gezogenen Weges, von dem kein Eckpunkt und keine Teilstrecke in J_ν liegt und keine Seite eine $(n-2)$-dimensionale Grundseite von J_ν trifft. Sie kann sich bei stetiger Bewegung von A in endlicher Entfernung von J nicht ändern, sodaß wir von einer *Ordnung des Innengebietes* und von einer *Ordnung des Außengebietes in bezug auf J* sprechen können*).

Liegt A im Innengebiete, so können wir nach A aus dem Unendlichen einen Weg ziehen, der von J nur $J'-j$ trifft. Dieser Weg liefert für die Ordnung des Innengebietes sofort ± 1.

*) Vgl. J. Hadamard in dem auf S. 97 und 305 dieses Annalenbandes zitierten Buche.

Im Außengebiete aber kann man A leicht in solcher Weise bestimmen, daß die Bildmenge von J *nicht überall dicht* in $\varkappa_A$ liegt. Die Ordnung des Außengebietes ist somit gleich Null, und wir sprechen aus:

Satz 4. *In bezug auf eine Jordansche Mannigfaltigkeit hat das Innengebiet die Ordnung ± 1, das Außengebiet die Ordnung Null**).

§ 5.

Die verallgemeinerte Indikatrix.

Sei α eine eineindeutige und stetige Abbildung einer geschlossenen zweiseitigen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit μ_1 auf eine geschlossene zweiseitige n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ_2, c der Grad dieser Abbildung, S_1 ein solches Grundsimplex von μ_1, dessen Bild S_2 innerhalb des Innensimplexes (vgl. Math. Ann. 71, S. 102) eines Elementes $\mathfrak{s}$ von μ_2 liegt, J_1 der Umfang von S_1, J_2 das Bild von J_1, α_ν eine simpliziale Approximierung von α, $J_{2\nu}$ die entsprechende simpliziale Approximierung von J_2, P_1 ein zum Innern von S_1 gehöriger Punkt, P_2 das Bild von P_1.

Wenn dann α durch α_ν mit einem hinreichenden Grade der Genauigkeit approximiert wird, so wird für einen aus P_2 nach der Grenze von $\mathfrak{s}$ gezogenen Weg, von dem kein Eckpunkt und keine Teilstrecke in $J_{2\nu}$ liegt und keine Seite eine $(n-2)$-dimensionale Grundseite von $J_{2\nu}$ trifft, die Differenz der Anzahlen der positiven und der negativen Kreuzungen mit $J_{2\nu}$ gleich $\pm c$ sein. Dieselbe Zahl ist aber nach § 4 gleich ± 1, sodaß sich herausstellt:

Satz 5. *Eine eineindeutige und stetige Beziehung zwischen zwei geschlossenen zweiseitigen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten besitzt entweder den Grad $+1$ oder den Grad -1***).

Wir bezeichnen nunmehr mit J_1 eine willkürliche in einem Elemente von μ_1 enthaltene und sich innerhalb eines Elementes $\mathfrak{s}$ von μ_2 abbildende Jordansche Mannigfaltigkeit, konstruieren zu ihr dem vorstehenden Aufsatze gemäß ein j_1 und ein γ_1, wählen im Innengebiete von $\gamma_1 + J_1''$ ein

*) Dieser Satz wird bei Hadamard l. c. ohne Beweis ausgesprochen.

**) Dieses Theorem wird von Herrn Lebesgue bei der Herleitung seines Existenzsatzes der „variétés enlacées“ (C. R., 27 mars 1911) stillschweigend vorausgesetzt.

Der Begriff des Abbildungsgrades c läßt sich unmittelbar auf eineindeutige und stetige Beziehungen zwischen einem zweiseitigen n-dimensionalen Gebiete μ_1 und einem n-dimensionalen Gebiete μ_2 übertragen. Auch hier kann c nur die Werte $+1$ und -1 besitzen. Falls aber μ_2 einseitig wäre, müßte c nach S. 106 dieses Annalenbandes gleich Null sein, sodaß hiermit die *Invarianz der Zwei- resp. Einseitigkeit* bewiesen ist.

solches Simplex S_1, von dem eine $(n-1)$-dimensionale Seite h_1 in γ_1 liegt, bezeichnen die von den übrigen $(n-1)$-dimensionalen Seiten von S_1 gebildete Punktmenge mit k_1, den vollen Umfang von S_1 mit s_1, und wählen im Innern von S_1 einen Punkt P_1.

Wir wählen die positive Indikatrix von J_1 in solcher Weise, daß die Ordnung von P_1 in bezug auf J_1 gleich $+1$ wird, bestimmen die positive Indikatrix von $\gamma_1 + J_1'$ mittels der von J_1', die von $\gamma_1 + J_1''$ mittels der von J_1'', die von s_1 mittels der von $\gamma_1 + J_1''$, die von $\gamma_1 - h_1 + k_1 + J_1''$ mittels der von J_1''.

Die Ordnung eines Punktes in bezug auf $\gamma_1 + J_1'$ läßt sich mittels der $\mathcal{F}_{1\nu} + J'_{1\nu}$, und die Ordnung in bezug auf $\gamma_1 - h_1 + k_1 + J_1''$ in analoger Weise definieren. In bezug auf s_1 ist alsdann die Ordnung von P_1 gleich $+1$, in bezug auf $\gamma_1 + J_1'$ resp. $\gamma_1 - h_1 + k_1 + J_1''$ gleich Null.

Die Bilder von P_1, J_1, γ_1, $\mathcal{F}_{1\nu}$, $J'_{1\nu}$, $J''_{1\nu}$, h_1, k_1, s_1 bezeichnen wir mit P_2, J_2, γ_2, $\mathcal{F}_{2\nu}$, $J'_{2\nu}$, $J''_{2\nu}$, h_2, k_2, s_2; als positive Indikatrizen von s_2, $\gamma_2 + J_2'$, $\gamma_2 - h_2 + k_2 + J_2''$ wählen wir die Bilder der positiven Indikatrizen von s_1, $\gamma_1 + J_1'$, $\gamma_1 - h_1 + k_1 + J_1''$; die Ordnung in bezug auf $\gamma_2 + J_2'$ resp. $\gamma_2 - h_2 + k_2 + J_2''$ definieren wir mittels der simplizialen Approximierungen von $\mathcal{F}_{2\nu} + J'_{2\nu}$ resp. $\mathcal{F}_{2\nu} - h_2 + k_2 + J''_{2\nu}$.

Wenn nun α den Grad $+1$ resp. -1 besitzt, so ist die Ordnung von P_2 in bezug auf s_2 ebenfalls gleich $+1$ resp. -1; in bezug auf $\gamma_2 + J_2'$ resp. $\gamma_2 - h_2 + k_2 + J_2''$ ist aber die Ordnung von P_2 gleich Null, denn vom Umfange von $\mathfrak{s}$ läßt sich ein $\gamma_2 + J_2'$ resp. $\gamma_2 - h_2 + k_2 + J_2''$ nicht treffender Weg nach P_2 ziehen. Mithin ist die Ordnung von P_2 in bezug auf J_2 gleich $+1+0+0=+1$ resp. gleich $-1+0+0=-1$, und wir haben folgende Eigenschaft bewiesen:

Satz 5a. *Bei einer eineindeutigen und stetigen Beziehung zwischen zwei geschlossenen zweiseitigen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind in bezug auf einander entsprechende hinreichend kleine Jordansche Mannigfaltigkeiten die Ordnungen der entsprechenden Innengebiete einander gleich oder entgegengesetzt, je nachdem der Abbildungsgrad* $+1$ *oder* -1 *beträgt.*

Wenn wir eine hinreichend kleine Jordansche Mannigfaltigkeit, in bezug auf die das Innengebiet die Ordnung $+1$ besitzt, als „Indikatrix" bezeichnen, können wir also im ersten Falle von einer Beziehung *mit invarianter Indikatrix*, im zweiten Falle von einer Beziehung *mit Umkehrung der Indikatrix* sprechen.

Mithin können wir den Fixpunktsatz der eineindeutigen und stetigen Kugeltransformationen*) jetzt in folgender Form aussprechen:

*) Vgl. Math. Ann. 71, S. 114. Der hier aus der Betrachtung eines Vektorfeldes gewonnene Satz 3 läßt sich auch in unmittelbarem Anschluß an S. 105 begründen

Jede eineindeutige und stetige Transformation einer Kugel gerader Dimensionenzahl mit invarianter Indikatrix oder einer Kugel ungerader Dimensionenzahl mit Umkehrung der Indikatrix besitzt sicher einen Fixpunkt.

§ 6.

Die Invarianz des Abbildungsgrades.

Seien μ_1, μ_2, μ_3 geschlossene zweiseitige n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, α_{12} eine eindeutige und stetige Abbildung c_{12}^{ten} Grades von μ_1 auf μ_2, α_{23} eine eindeutige und stetige Abbildung c_{23}^{ten} Grades von μ_2 auf μ_3, α_{13} die durch α_{12} und α_{23} bestimmte Abbildung von μ_1 auf μ_3.

Wir betrachten die Grundsimplexe von μ_2 als ihre Elemente, und wählen die simplizialen Zerlegungen von μ_1 und die Innensimplexe von μ_2 und μ_3 in solcher Weise, daß in einem gewissen Innensimplexe von μ_3 ein nur von Innensimplexen von μ_2 bedecktes Gebiet existiert. In diesem Gebiete ist dann eine durch gewisse simpliziale Approximierungen von α_{12} und α_{23} bestimmte Bildmenge von μ_1 mit einer durch eine gewisse modifizierte simpliziale Approximierung von α_{13} bestimmten Bildmenge von μ_1 identisch. Mithin ist $c_{13} = c_{12} \times c_{23}$, d. h. *für eine Folge von Abbildungen ist der Grad des Produktes gleich dem Produkte der Grade.*

Jetzt läßt sich die auf S. 106 dieses Annalenbandes offen gelassene Frage nach der Invarianz des Abbildungsgrades, d. h. nach der Unabhängigkeit des Abbildungsgrades von der Wahl der Elemente und Messungsskalen, mit Hilfe des Resultates des § 5 erledigen.

Eine zweiseitige Mannigfaltigkeit *in anderer Weise messen* kommt nämlich darauf hinaus, daß zwischen dieser und *einer anderen* Mannigfaltigkeit eine eineindeutige und stetige Beziehung hergestellt wird. Diese Beziehung besitzt aber nach § 5 entweder den Grad $+1$ oder den Grad -1.

Sei nun α_{12} eine eindeutige und stetige Abbildung c_{12}^{ten} Grades einer geschlossenen zweiseitigen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit μ_1 auf eine geschlossene zweiseitige n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ_2, und sei c'_{12} der Grad von α_{12} für eine *neue* Messungsart von μ_1 und μ_2. Diese neue Messungsart bestimmt erstens eine Mannigfaltigkeit μ_3 und eine Abbildung

---

mittels der Bemerkung, daß eine Transformation ohne Fixpunkt sich in die antipodische Transformation der Identität stetig überführen läßt, nämlich durch Bewegung jedes Punktes auf dem kürzesten seine beiden Lagen verbindenden Großkreisbogen.

Ich benutze diese Gelegenheit, um darauf hinzuweisen, daß P. Bohl den durch Folgerung 2 ausgedrückten besonderen Fall von Satz 3 (S. 114) schon in Bd. 127 des J. f. Math. ausgesprochen hat, ohne freilich den Beweis auszuführen.

c_{31}^ten^ Grades von μ_3 auf μ_1 ($c_{31} = \pm 1$), zweitens eine Mannigfaltigkeit μ_4 und eine Abbildung c_{24}^ten^ Grades von μ_2 auf μ_4 ($c_{24} = \pm 1$), und wir haben dem Obenstehenden gemäß:

$$c'_{12} = c_{34} = c_{31} \times c_{12} \times c_{24} = \pm c_{12}.$$

Mithin gilt:

Satz 6. *Der Abbildungsgrad ist eine Invariante der Analysis Situs.*