# Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen.

Von

Paul Funk in Prag.

## Inhalt.



## 1. Teil.

### Die Kugelfunktionen als Lösungen von homogenen Integralgleichungen 2. Art, mit einer willkürlichen Funktion der Entfernung zweier Punkte auf der Kugel als Kern.

Es soll hier die Frage behandelt werden, wie man im Anschluß an die allgemeine Theorie der Integralgleichungen die Theorie der Kugelfunktionen entwickeln kann, wenn man homogene Integralgleichungen 2. Art betrachtet, bei denen eine beliebige Funktion*) der Entfernung zweier Punkte auf der Kugel als Kern auftritt. Dabei wollen wir uns der Einfachheit halber auf stetige Funktionen der Entfernung beschränken; es sind aber auch dann dabei gleich alle diejenigen Fälle miterledigt, bei

*) Vgl. das von Hilbert angegebene Beispiel: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen. Gött. Nachr. 1904, S. 241.

denen eine endliche Iteration des ursprünglichen Kerns eine stetige Funktion der Entfernung ist.

Um im folgenden die Ausdrucksweise zu erleichtern, führen wir zunächst für einen seit jeher in der Theorie der Kugelfunktionen gebrauchten Begriff eine eigene Bezeichnung ein. Sei $A$ ein beliebiger Punkt auf der Kugel. Wir denken uns ihn als Pol eines Koordinatensystems, das aus Meridianen und Parallelkreisen besteht. Sei $u$ die Poldistanz, $v$ die geographische Länge, $\Phi(u,v)$ eine beliebige integrable Funktion des Ortes auf der Kugel. Die Funktion

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(u,v)\,dv$$

bezeichnen wir als die *„Versteifung der Funktion in bezug auf den Punkt A"*. Im Punkt $A$ ist der Wert der Funktion und der Wert ihrer Versteifung derselbe.

Ist eine Funktion bereits so beschaffen, daß sie längs aller Parallelkreise, die zu einem Punkt $A$ als Pol gehören, konstant ist, so wollen wir von einer *„für den Punkt A steifen Funktion"* sprechen.

Es sei nun $F(x)$ eine beliebige stetige Funktion im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ und deuten wir $x$ als den Kosinus der sphärischen Entfernung zweier Punkte auf der Kugel mit den Koordinaten $uv$ bzw. $u'v'$. Wir stellen uns die Aufgabe, die Eigenschaften des Systems der Eigenfunktionen der Integralgleichungen

$$(\mathrm{I})\qquad \Phi(u,v) = \lambda \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} F(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v-v'))\, \Phi(u',v')\, dv' \right\} \sin u'\, du'$$

zu ermitteln.

Nach Erledigung eines kleinen Hilfssatzes werden wir unter I. zeigen: Das normierte Orthogonalsystem der steifen Eigenfunktionen, die zu dieser Integralgleichung gehören, kann stets aus solchen Funktionen zusammengesetzt werden, die einer gewissen Funktionalgleichung genügen, die besagt, daß sich die Funktionen durch den Prozeß der Versteifung bis auf einen konstanten multiplikativen Faktor reproduzieren. Unter II. wird bewiesen, daß diese Funktionen Polynome sind, wenn man als Variable den Kosinus der sphärischen Entfernung nimmt; unter III., daß diese Polynome der Differentialgleichung der Kugelfunktionen genügen, woraus die Identität dieser Polynome mit den Legendreschen Polynomen hervorgeht. Unter IV. wird bewiesen: das normierte Orthogonalsystem aller Eigenfunktionen kann aus solchen Funktionen zusammengesetzt werden, die als Eigenfunktionen von Integralgleichungen auftreten, in denen der Kern ein Legendresches Polynom des Kosinus der Entfernung zweier Punkte ist.

Hilfssatz: Seien $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ definierte integrable Funktionen von $x$, dann gilt stets die folgende Gleichung:

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x') \left\{ \int_0^{2\pi} f(xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos v)\, dv \right\} dx'$$

$$= \int_{-1}^{+1} f(x') \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi(xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos v)\, dv \right\} dx'.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der folgenden geometrischen Deutung. Es bedeute auf der linken Seite der Gleichung $x'$ den Kosinus der Poldistanz, $v$ die geographische Länge in einem Koordinatensystem mit dem Punkt $A$ als Pol. Auf der rechten Seite der Gleichung habe $x'$ und $v$ dieselbe Bedeutung in einem Koordinatensystem mit dem Punkt $B$ als Pol. $x$ sei der Kosinus der sphärischen Entfernung der Punkte $A$ und $B$. Wir deuten $\varphi$ als eine für den Punkt $A$, $f$ als eine für den Punkt $B$ steife Funktion des Ortes auf der Kugel. Nun stellt sowohl die linke als auch die rechte Seite das über die ganze Kugel erstreckte Integral des Produktes der Funktionen $f$ und $\varphi$ dar, woraus die Richtigkeit der Gleichung erhellt.

I. Zunächst zeigen wir, wenn $\Phi(u,v)$ irgendeine Eigenfunktion der Integralgleichung (1) ist, so ist auch jede Versteifung von $\Phi(u,v)$ eine Eigenfunktion. In der Tat erhalten wir, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung nach $v$ integrieren, durch $2\pi$ dividieren und auf der rechten Seite die Integrationsfolge vertauschen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(u,v)\, dv$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} \Phi(u',v')\left[\int_0^{2\pi} F(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v-v'))\, dv\right] dv'\right\}\sin u'\, du'.$$

Nun ist aber das Integral in der eckigen Klammer von $v'$ unabhängig und somit erhalten wir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(u,v)\, dv$$

$$= \lambda \int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi} F(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v-v'))\, dv\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(u',v')\, dv'\right] \sin u'\, du'.$$

Nun vertauschen wir noch auf der rechten Seite der Gleichung die Buchstaben $v$ und $v'$, dann können wir diese Gleichung auch folgendermaßen anschreiben:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(u,v)\,dv$$

$$=\lambda\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{2\pi}F(\cos u\cos u'+\sin u\sin u'\cos(v-v'))\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(u',v)\,dv\right]dv'\right\}\sin u'\,du',$$

und in dieser Form der Gleichung ist in der Tat zu ersehen, daß die Versteifung von $\Phi$ ebenfalls der Integralgleichung (1) genügt.

Wenden wir uns nun der Betrachtung der steifen Eigenfunktionen zu und setzen wir $\cos u = x$, $\cos u' = x'$, $v - v' = \bar{v}$, so läßt sich die Integralgleichung, der die steifen Eigenfunktionen genügen, auch so schreiben:

$$\text{(1a)}\qquad \varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{+1}\left[\int_0^{2\pi}F\left(xx'+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right)d\bar{v}\right]\varphi(x')\,dx'.$$

Die Versteifung von $\varphi(x)$ für einen beliebigen Punkt der Kugel muß nach dem eben bewiesenen Satz ebenfalls eine zu (1a) gehörige Eigenfunktion sein, also es muß die Funktion

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(xx'+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right)d\bar{v}$$

ebenfalls der Gleichung (1a) genügen.

Es seien nun die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ ein vollständiges und normiertes Orthogonalsystem der zu einem bestimmten Eigenwert $\lambda$ gehörigen Eigenfunktionen. Es mögen also die Gleichungen gelten:

$$\int_{-1}^{+1}\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 1 \quad \text{für} \quad i = k,$$

$$\int_{-1}^{+1}\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k.$$

Die Versteifungen der $\varphi_i$ müssen sich nun als lineare Kombinationen der $\varphi_i$ darstellen lassen. Es muß sich also ein System von $m^2$ von $x$ unabhängigen Größen

$$A_{i\nu} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots, m \\ \nu = 1, 2, \cdots, m \end{matrix}$$

angeben lassen, so daß die Gleichungen

$$\text{(2)}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_i\left(xx'+\sqrt{1-x'}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right)d\bar{v} = \sum_{\nu=1}^{\nu=m}A_{i\nu}\,\varphi_\nu(x)$$

identisch in $x$ und $x'$ erfüllt sind. Multiplizieren wir nun von den Gleichungen (2) die $i^{\text{te}}$ Gleichung mit $\varphi_k(x)$ und die $k^{\text{te}}$ Gleichung mit $\varphi_i(x)$ und integrieren wir von $x = -1$ bis $x = +1$, so erhalten wir unter Berücksichtigung unseres Hilfssatzes

$$A_{ik} = A_{ki}.$$

Jetzt wenden wir auf die quadratische Form

$$\sum_1^m A_{ik}\varphi_i\varphi_k$$

das Hauptachsentheorem an. Es läßt sich demnach zu den Größen $A_{ik}$ ein System von Größen $\varepsilon_{ik}$ finden, die die Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{l=1}^{l=m} \varepsilon_{il}\varepsilon_{lk} = 1 \quad \text{für} \quad i = k,$$

$$\sum_{l=1}^{l=m} \varepsilon_{il}\varepsilon_{lk} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k$$

erfüllen und die Eigenschaft haben, daß die oben angeschriebene quadratische Form, wenn man für die $\varphi_i$

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{k=m} \varepsilon_{ik} P_k$$

einsetzt, in eine quadratische Form von der Gestalt

$$\sum_{k=1}^{k=m} \bar{A}_k P_k^2$$

übergeht. Durch diese Transformation geht das System der Gleichungen (2) über in

$$\text{(2a)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_k\left(xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right) d\bar{v} = \bar{A}_k P_k(x).$$

Setzen wir $x = 1$, so erhalten wir

$$\text{(3)} \qquad P_k(x') = \bar{A}_k P_k(1).$$

Da die Funktionen $\varphi_\varkappa(x)$ das vollständige und normierte Orthogonalsystem der zu einem bestimmten Eigenwert $\lambda$ gehörigen Eigenfunktionen bilden, so gilt dies auch von den Funktionen $P_k(x)$, somit finden wir: *Das normierte Orthogonalsystem der steifen Eigenfunktionen der Integralgleichung* (1) *bzw. das normierte Orthogonalsystem der Eigenfunktionen der*

*Gleichung* (1a) *kann man stets aus solchen Funktionen zusammensetzen, die der folgenden Funktionalgleichung genügen:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right) d\bar{v} = \frac{P(x)\,P(x')}{P(1)}. \text{*)} \tag{4}$$

II. Um nun zu zeigen, daß die Funktionen $P(x)$ Polynome sein müssen, gehen wir folgendermaßen vor. Zu jeder der Funktionen $P(x)$, die ja als Eigenfunktion einer Integralgleichung mit stetigem Kern selbst stetig sein müssen, läßt sich offenbar eine solche ganze rationale $R(x)$ Funktion finden, so daß

$$\int_{-1}^{1} R(x)\,P(x)\,dx = c \neq 0. \text{**)}$$

Unter Berücksichtigung unseres Hilfssatzes und der Funktionalgleichung (3) erhalten wir dann für

$$\int_{-1}^{1} P(x')\left(\int_0^{2\pi} R\left(xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right) d\bar{v}\right) dx'$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2\pi\,P(x)\,P(x')}{P(1)}\,R(x')\,dx' = \frac{2\pi c}{P(1)}\,P(x),$$

---

*) Schon ohne einen analytischen Ausdruck für $P(x)$ zu kennen, kann man sofort aus dieser Gleichung entnehmen, daß für $|x| < 1$: $\left|\frac{P(x)}{P(1)}\right| < 1$ gelten muß, und zwar folgendermaßen: Wenn $P(x)$ keine Konstante ist, so haben $P(x)$ und

$$P\left(xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right) = \overline{P[x, x']}$$

für $|x| \neq 1$ auf der Kugel zwei verschiedene Systeme von Niveaukurven. Also gibt es keine zwei von Null verschiedene Größen $C_1$ und $C_2$, für die $C_1 Px + C_2 \overline{P[xx']}$ identisch gleich Null ist. Quadriert man nun diesen Ausdruck und integriert man dann über die ganze Kugel, so erhält man somit eine positiv definite quadratische Form der $C_1$ und $C_2$. Die Bedingung, die dann die Koeffizienten der Form erfüllen, liefert dann die behauptete Ungleichung.

**) Aus Gleichung (4) kann man auch unmittelbar entnehmen, daß $P(x)$ entweder eine gerade oder eine ungerade Funktion (d. h. $P(x) = \pm P(-x)$) sein muß. Setzt man nämlich $x' = -1$, so folgt: $\frac{P(x)}{P(1)} = \frac{P(-x)}{P(-1)}$ und indem man jetzt diese Gleichung quadriert und zwischen den Grenzen $-1$ und $+1$ integriert, folgt $(P(1))^2 = (P(-1))^2$ also $P(x) = \pm P(-x)$. Ferner folgt aus (3) unmittelbar $P(1) \neq 0$. Unter Benützung dieser beiden Tatsachen und der Stetigkeit von $P(x)$ kann man leicht zeigen, daß man für $R(x)$ eine Potenz von $x$ wählen kann. (Vgl. den Hilfssatz und Zusatz zu Beginn des zweiten Teiles.)

d. h. $P(x)$ genügt der Integralgleichung

$$(5)\quad P(x) = \frac{P(1)}{2\pi c}\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2\pi} R\left(xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right)d\bar{v}\right)P(x')\,dx'.\text{*)}$$

Wenn $R(x)$ eine ganze rationale Funktion von $x$ ist, so muß auch

$$\int_{0}^{2\pi} R\left(xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right)d\bar{v}$$

eine ganze rationale Funktion der Variablen $x$ und $x'$ sein. Um dies einzusehen, braucht man sich bloß zu erinnern, daß für jedes ungerade $n$

$$\int_{0}^{2\pi} (\cos\bar{v})^n\,d\bar{v} = 0$$

ist. Daher fallen bei der Integration die Glieder mit der Wurzel weg. Wenn aber

$$\int_{0}^{2\pi} R\left(xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right)d\bar{v}$$

eine ganze rationale Funktion in $x$ und $x'$ ist, dann ist die rechte und mithin auch die linke Seite der Gleichung (5) eine ganze rationale Funktion von $x$.

III. Nun wollen wir zeigen, daß die Funktionen $P(x)$ der Differentialgleichung der Kugelfunktionen genügen müssen. Wir stützen uns dabei auf folgende bekannte geometrische Bedeutung des zweiten Differentialparameters. Legen wir um einen Punkt $A$ einer Kugel einen kleinen Kreis $k$, dessen Punkte von $A$ die sphärische Distanz $\delta$ haben. Bilden wir nun den Mittelwert einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi$ längs $k$ und subtrahieren wir hiervon den Wert von $\Phi$ in $A$, dividieren diese Differenz durch $\delta^2$ und machen wir dann den Grenzübergang zu $\delta = 0$. Der so gebildete Grenzwert ist ein Viertel des zweiten Differentialparameters von $\Phi$ in $A$.**)

---

*) Die Tatsache, daß es keine stetige Funktion $h(x)$ geben kann, so daß für alle $P(x)$ die Gleichung $\int_{-1}^{1} P(x)\,h(x) = 0$ gelten würde, ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß der Kern $\int_{0}^{2\pi} h\left(xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v}\right)d\bar{v}$ mindestens einen Eigenwert hat.

**) Würde man diese Eigenschaft des zweiten Differentialparameters als Definition für ihn benutzen, so gäbe es auch Funktionen, die nicht in jedem Punkt der Kugel zweimal stetig differenzierbar sind, trotzdem überall einen zweiten Differentialparameter besitzen.

Bilden wir nun nach dieser Vorschrift den zweiten Differentialparameter von $P(x)$ in einem Punkt, für den $x = x'$ ist. Setzen wir $\cos\delta = \xi$, dann erhalten wir unter Berücksichtigung von $\lim\limits_{\delta=0} \frac{\sin^2\delta}{\delta^2} = 1$

$$(\Delta P(x))_{x=x'} = 4 \lim_{\xi=1} \frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(\xi x' + \sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\bar{v})\, d\bar{v} - P(x')}{1-\xi^2},$$

und wegen der Funktionalgleichung für $P(x)$ erhalten wir, wenn wir annehmen $P(x') \neq 0$:

$$\frac{(\Delta P(x))_{x=x'}}{P(x')} = 4 \lim_{\xi=1} \frac{\frac{P(\xi)}{P(1)} - 1}{1-\xi^2}.$$

Da $P(x)$ eine ganze rationale Funktion ist, ergibt sich der gesuchte Grenzwert durch Differenzieren von Zähler und Nenner

$$\frac{(\Delta P(x))_{x=x'}}{P(x')} = -2\left(\frac{d}{d\xi}\left(\frac{P(\xi)}{P(1)}\right)\right)_{\xi=1},$$

also ein von $x'$ unabhängiger Wert, den wir mit $-K$ bezeichnen wollen. Wenn $P(x') = 0$ ist, so ist, wie wir aus der Gleichung (4) schließen können, auch die Versteifung von $P(x)$ für $x = x'$ gleich Null und mithin ist auch der Wert des zweiten Differentialparameters für $x = x'$ gleich Null.

In beiden Fällen gilt also:

$$\Delta(P(x)) + KP(x) = 0$$

oder ausführlich

$$(6) \qquad \frac{d(1-x^2)\frac{dP(x)}{dx}}{dx} + KP(x) = 0.$$

Aus den Überlegungen des vorigen Abschnittes wissen wir, daß $P(x)$ ein Polynom sein muß. Wenn nun $n$ der Grad des Polynomes ist, so folgt, indem man den Koeffizienten von $x^n$ in (6) gleich Null setzt:

$$K = n(n+1).$$

Hierdurch ist die Identität der Funktionen $\frac{P(x)}{P(1)}$ mit den Legendreschen Polynomen nachgewiesen.

IV. Was nun die nicht steifen Eigenfunktionen der Integralgleichung (1) betrifft, so wollen wir folgendes zeigen:

Man kann das vollständige normierte Orthogonalsystem der Eigenfunktionen der Integralgleichung (1) aus solchen Funktionen $Y_{in}(u, v)$ zusammensetzen, die der Integralgleichung

$$(7) \qquad Y_{in}(u, v) = \lambda \int P_n(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v - v')) \, Y_{in}(u', v')\, dk'$$

genügen, wobei $dk'$ das Flächenelement auf der Kugel bedeutet und das Integral auf der rechten Seite über die ganze Kugel zu erstrecken ist. Mit anderen Worten: Jede Eigenfunktion $\Phi$ der Integralgleichung (1) erweist sich als eine endliche Summe von Funktionen, die den Integralgleichungen (7) und (1) genügen. Aus I. wissen wir bereits, daß sich die Versteifung jeder Eigenfunktion von (1) in eine endliche nach Funktionen $P_\nu(\cos u)$ fortschreitende Reihe entwickeln läßt. Da die Funktionen $P_\nu(\cos u)$ die Orthogonalitätsrelation erfüllen, so bestimmen sich die Koeffizienten der Reihe nach Fourierscher Art und wir erhalten somit für jede Eigenfunktion die folgende Identität:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(u,v)\,dv = \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\left(\int \Phi(u,v)\,P_\nu(\cos u)\,dk\right) P_\nu(\cos u).$$

Setzen wir nun hierin $u = 0$, so erhalten wir:

$$(\Phi)_{u=0} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\left(\int \Phi(u,v)\,P_\nu(\cos u)\,dk\right) P_\nu(1).$$

Da wir aber nun jeden beliebigen Punkt auf der Kugel als Pol ansehen können, erhalten wir:

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\left(\int \Phi(u',v')\,P_\nu(\cos u\cos u' + \sin u\sin u'\cos(v-v'))\,dk'\right) P_\nu(1).$$

Nun ist leicht einzusehen, daß die einzelnen Glieder der Summe auf der rechten Seite den Integralgleichungen (7) und (1) genügen. In der Tat, multiplizieren wir die Funktionalgleichung (4) für $P_\nu(x)$ mit $P_\nu(x')$ und integrieren wir von $-1$ bis $+1$, so erhalten wir:

$$(8)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left\{\int_0^{2\pi} P_\nu\left(xx' + \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-x'^2}\cos\bar v\right) d\bar v\right\} P_\nu(x')\,dx' = \frac{P(x)}{P(1)}$$

oder

$$(8\text{a})\qquad P_\nu(\cos u) = \frac{P_\nu(1)}{2\pi}\int P_\nu(\cos u\cos u' + \sin u\sin u'\cos(v-v'))\,P_\nu(\cos u)\,dk'.$$

$P_\nu(\cos u)$ ist demnach Eigenfunktion von (7) und der Eigenwert ist $\frac{P(1)}{2\pi}$. Nach I. ist $P_\nu(\cos u)$ auch Eigenfunktion von (1). Wenn nun eine steife Funktion Eigenfunktion einer Integralgleichung ist, in der der Kern eine Funktion der Entfernung zweier Punkte ist, so ist sie es natürlich für jede beliebige Lage der Punkte, für die sie steif ist, d. h.

$$P_\nu(\cos u\cos u' + \sin u\sin u'\cos(v-v'))$$

ist für alle Werte $u', v'$ auch Eigenfunktion von (7) und (1) und mithin ist es auch

$$\int P_\nu(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v-v'))\,\Psi(u'v')\,dk,$$

wenn $\Psi(u', v')$ eine ganz beliebige integrable Funktion ist. Setzen wir $\Phi$ für $\Psi$ ein, so ist der gewünschte Nachweis erbracht.

$\frac{P_\nu(1)}{2\pi}$ ist übrigens der einzige Eigenwert von (7). Man kann nämlich den Inhalt der Gleichung (8) auch so ausdrücken: Die Iteration des Kernes der Integralgleichung (7) ist dem Kern selbst proportional und der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{2\pi}{P(1)}$. Wenn nun bei einem symmetrischen Kern der iterierte Kern zum ursprünglichen Kern proportional ist, dann ist immer nur ein Eigenwert vorhanden. Der größeren Übersichtlichkeit wegen zeigen wir dies nur für das eindimensionale Gebiet. In der Tat folgt aus

$$\lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(s),$$

$$\int_a^b K(r,s)\,K(s,t)\,ds = k \cdot K(r,t),$$

indem man die erste dieser Gleichungen mit $K(r,s)\,ds$ multipliziert und von $a$ bis $b$ integriert, unmittelbar

$$\lambda = \frac{1}{k}.$$

Mit diesen Feststellungen haben wir jetzt auch für die nicht steifen Kugelfunktionen den Anschluß an den üblichen Aufbau der Theorie der Kugelfunktionen erreicht. Wir deuten daher die Fortsetzung des Aufbaus nur kurz an. Indem man

$$P_\nu(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v-v'))$$

in eine Fouriersche Reihe in bezug auf die Variable $v$ entwickelt, erhält man, da jedes Glied für sich genommen eine Eigenfunktion von (7) darstellt, die bilineare Formel für diesen Kern. Wenn $n$ der Grad des Polynomes $P_\nu(x)$ ist, so ist die Zahl der Glieder der bilinearen Formel $2n+1$. Indem man die beiden Seiten der Gleichung der bilinearen Formel quadriert und hinsichtlich der Variablen $u, v$ und $u', v'$ über die Kugel integriert, ergibt sich:

$$8\pi^2 = \frac{2n+1}{\left(\frac{P(1)}{2\pi}\right)^2}$$

und somit

$$P(1) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}.$$

## 2. Teil.

## Über eine angenäherte Darstellung einer beliebigen stetigen Funktion des Ortes auf der Kugel durch eine endliche Reihe von Kugelfunktionen.

In diesem und im 3. Teil der Arbeit wird folgender Hilfssatz ausgenützt:

Hilfssatz: Wenn $f(x)$ eine beliebige im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion bedeutet, so gilt stets die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} n \int_0^1 f(x)\, x^n \, dx = f(1).$$

Beweis: Die obige Behauptung ist gleichbedeutend damit, daß

$$\lim_{n=\infty} (n+1) \int_0^1 (f(x) - f(1))\, x^n \, dx = 0$$

ist. Es sei nun $\varepsilon$ eine beliebig klein gewählte positive Zahl, dann gibt es immer wegen der Stetigkeit von $f(x)$ eine positive Zahl $\eta$, so daß für alle $x$ im Intervall

$$1 - \eta \leqq x \leqq 1$$

$$|f(x) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es gilt somit auch für alle Werte von $n$

$$\left| (n+1) \int_{1-\eta}^1 (f(x) - f(1))\, x^n \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ist aber $|f(x) - f(1)|$ kleiner als eine feste Zahl $M$, so wird

$$\left| (n+1) \int_0^{1-\eta} (f(x) - f(1))\, x^n \, dx \right| < M(1-\eta)^{n+1}.$$

Wählt man nun $n$ so, daß

$$n + 1 > \frac{\lg \frac{\varepsilon}{2M}}{\lg (1-\eta)},$$

so wird

$$M(1-\eta)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und somit ergibt sich

$$\left|(n+1)\int_0^1 (f(x)-f(1))\, x^n\, dx\right| < \varepsilon.$$

Zusatz: Wenn $f(x)$ eine im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion bedeutet, erhält man:

$$\lim_{h=\infty} h \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\, x^{2h}\, dx = \lim_{h=\infty} 2h \int_0^1 \frac{f(x)+f(-x)}{2}\, x^{2h}\, dx = \frac{f(1)+f(-1)}{2},$$

$$\lim_{h=\infty} h \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)-f(-x)}{2}\, x^{2h+1}\, dx = \lim_{h=\infty} (2h+1) \int_0^1 \frac{f(x)-f(-x)}{2}\, x^{2h+1}\, dx$$

$$= \frac{f(1)-f(-1)}{2}$$

und wegen

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\, x^{2h+1}\, dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)-f(-x)}{2}\, x^{2h}\, dx = 0$$

ergibt sich

$$\lim_{h=\infty} h \int_{-1}^{+1} f(x)\, (x^{2h}+x^{2h+1})\, dx = f(1).$$

Führen wir nun bei der Berechnung des Integrals

$$\frac{1}{2\pi}\int \Phi(u', v')\, (\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v-v'))^\nu\, dk'$$

eine Koordinatentransformation durch, bei der der Punkt $u, v$ in den Pol übergeht, bezeichnen wir die neuen Koordinaten mit $\bar{u}, \bar{v}$ und ist

$$\Phi(u, v) = \overline{\Phi}(\bar{u}, \bar{v}),$$

so geht das obige Integral über in

$$\frac{1}{2\pi}\int \overline{\Phi}(\bar{u}, \bar{v})\, (\cos \bar{u})^\nu\, d\bar{k} = \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{v}\right] (\cos \bar{u})^\nu\, d(\cos \bar{u}),$$

wobei der Ausdruck im Innern der eckigen Klammer die Versteifung von $\Phi$ für den Punkt mit den Koordinaten $u, v$ ist und als eine stetige Funktion von $\cos \bar{u}$ aufgefaßt werden kann. Somit ergibt sich auf Grund des Hilfssatzes und Zusatzes:

$$\lim_{h=\infty} h \int \overline{\Phi}(\bar{u}, \bar{v})\, (\cos \bar{u}^{2h} + \cos \bar{u}^{2h+1})\, d\bar{k} = (\overline{\Phi})_{\bar{u}=0},$$

oder denken wir uns wieder das ursprüngliche Koordinatensystem eingeführt

$$\lim_{h=\infty} h \int \Phi(u', v') \{\cos \bar{u}^{2h} + \cos \bar{u}^{2h+1}\} dk' = \Phi(u, v), \tag{1}$$

wobei für $\cos \bar{u}$ sein Ausdruck in $uv$ und $u'v'$

$$\cos \bar{u} = \cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos (v - v')$$

einzusetzen ist.

$x^n$ läßt sich nun bekanntlich folgendermaßen in eine endliche Reihe von Legendreschen Polynomen entwickeln:

$$x^n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots 2n+1} \Big((2n+1) p_n(x) + (2n-3) \frac{2n+1}{2} p_{n-2}(x) + (2n-7) \frac{(2n+1)}{2} \frac{(2n-1)}{4} p_{n-4}(x) \cdots\Big)$$

wobei

$$p_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_n(1)}$$

das Legendresche Polynom bedeutet. Ersetzen wir nun $(\cos \bar{u})^{2h}$ bzw. $(\cos \bar{u})^{2h+1}$ durch ihre Entwicklung nach Legendreschen Polynomen, so erhalten wir unter den Limeszeichen eine endliche Reihe von Laplaceschen Kugelfunktionen, die für passend groß gewähltes $h$ mit beliebig vorgegebener Genauigkeit die Funktion $\Phi$ angenähert darstellt.*)

Für den speziellen Fall, daß $\Phi$ die Variable $v$ nicht enthält, wollen wir für $\Phi$: $F(\cos u)$ setzen. Dann können wir die Gleichung (1) auch folgendermaßen anschreiben:

$$F(x) = \lim_{h=\infty} h \int_{-1}^{+1} F(x') \Big[\int_0^{2\pi} (xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2} \cos v)^{2h} dv\Big] dx'$$
$$+ \lim_{h=\infty} h \int_{-1}^{+1} F(x') \Big[\int_0^{2\pi} (xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2} \cos v)^{2h+1} dv\Big] dx'.$$

Da die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen Polynome (vgl. 1. Teil, III) sind, so liefert uns diese Formel auch einen Beweis des Weierstraßschen Satzes, daß sich jede stetige Funktion mit beliebig vorgegebener Genauigkeit durch ein Polynom angenähert darstellen läßt.

Wir wollen noch eine Angabe machen über den Grad der Genauigkeit, die die hier angegebene Annäherung einer beliebigen stetigen Funktion $\Phi$ des Ortes auf der Kugel durch eine endliche nach Laplace'schen Kugelfunktionen fortschreitenden Reihe besitzt. Dabei wollen wir aber

*) Die Konvergenz ist eine gleichmäßige, da man für die Größen $M$ und $\eta$ solche Werte wählen kann, die von $u$ und $v$ unabhängig sind.

außer der Stetigkeit von $\Phi$ noch eine zweite Voraussetzung machen. Wir wollen nämlich annehmen, daß für jeden beliebigen Punkt $A$ auf der Kugel jener Quotient, dessen Grenzwert für $\delta = 0$ mit 4 multipliziert (vgl. 1. Teil, III) den Wert des zweiten Differentialparameters von $\Phi$ in $A$ ergab, für alle Werte von $|\delta|$ die kleiner als eine feste positive Größe $\delta_0$ sind, eine endliche Schranke $K$ nicht überschreitet:

Wenn also $F(\cos\delta)$ die Versteifung von $\Phi$ für $A$ darstellt, so besagt diese Voraussetzung, daß für $|\delta| < \delta_0$

$$\frac{|F(1)-F(\cos\delta)|}{\delta^2} \leqq K$$

sein soll.

Vermöge des Taylorschen Lehrsatzes gilt aber die Ungleichung

$$\cos\delta < 1 - \frac{\cos\delta_0}{2}\delta^2,$$

$$\delta^2 < \frac{(1-\cos\delta)\,2}{\cos\delta_0}.$$

Es läßt sich also in diesem Fall auch stets eine Größe $\overline{K}$ finden, so daß für alle Werte $0 < \delta \leqq \delta_0$ die Ungleichung gilt:

$$\left|\frac{F(1)-F(\cos\delta)}{1-\cos\delta}\right| \leqq \overline{K}.$$

Somit erweist sich unsere Annahme als identisch mit der Voraussetzung, daß die Versteifung von $\Phi$ für einen beliebigen Punkt $A$, aufgefaßt als Funktion des Kosinus der sphärischen Entfernung von $A$, im Punkte $A$ die Lipschitzsche Bedingung erfülle. Demgemäß werden wir also bei der Betrachtung des in unserm Hilfssatz vorkommenden Integrals

$$(n+1)\int_0^1 (f(x)-f(1))\,x^n\,dx$$

außer der Stetigkeit von $f(x)$ voraussetzen, daß für alle positiven Werte $\eta$, die kleiner als ein bestimmtes $\eta_0$ sind, die Ungleichung gelte:

$$|f(1)-f(1-\eta)| \leqq k\eta.$$

Und indem wir das Integral wieder zerlegen,

$$\int_0^1 = \int_0^{1-\eta} + \int_{1-\eta}^1$$

erhalten wir die für alle Werte $0 < \eta \leqq \eta_0$ gültige Abschätzung

$$(n+1)\left|\int_0^1 (f(x)-f(1))\,x^n\,dx\right| \leqq k\eta + M(1-\eta)^{n+1}.$$

Wählen wir nun $\eta$ so, daß der Ausdruck auf der rechten Seite der obigen Ungleichung ein Minimum wird, dann erhält man für $\eta$

$$\eta = 1 - \sqrt[n]{\frac{k}{M(n+1)}}.$$

Es ist dann

$$\lim_{n=\infty} \eta = 0.$$

Also kann man sicher $n$ so groß wählen, daß $\eta$ kleiner als $\eta_0$ ausfällt. Für die Abschätzung des obigen Integrals erhält man dann:

$$(n+1)\left|\int_0^1 (f(x)-f(1))\,x^n\,dx\right| \leqq k\left(1-\sqrt[n]{\frac{k}{M(n+1)}}\right)+\left(\frac{k}{n+1}\right)^{1+\frac{1}{n}}\cdot M^{1-\frac{1}{n}}.$$

Nun ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{k\left(1-\sqrt[n]{\frac{k}{M(n+1)}}\right)+\left(\frac{k}{n+1}\right)^{1+\frac{1}{n}} M^{1-\frac{1}{n}}}{\frac{\lg(n)}{n}} = k.$$

Somit erhalten wir für hinreichend groß gewählte Werte von $n$ die Ungleichungen:

$$\left|f(1) - n\int_0^1 f(x)\,x^n\,dx\right| < (k+\varepsilon)\frac{\lg(n)}{n}.$$

Wenn nun $f(x)$ eine im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion ist und sowohl für $x=1$ als auch für $x=-1$ die Lipschitzsche Bedingung erfüllt, erhalten wir für hinreichend große Werte von $h$ die Ungleichungen:

$$\left|\frac{f(1)+f(-1)}{2} - h\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\,x^{2h}\,dx\right| < (k+\varepsilon)\frac{\lg(2h)}{2h},$$

$$\left|\frac{f(1)-f(-1)}{2} - h\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)-f(-x)}{2}\,x^{2h+1}\,dx\right| < (k+\varepsilon)\frac{\lg(2h)}{2h},$$

wobei $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet.

Hieraus ist zu ersehen, daß unter der gemachten Voraussetzung die Differenz der Funktion $\Phi$ und ihrer Annäherung durch die angegebene Reihe Laplacescher Kugelfunktionen für hinreichend groß gewählte Werte von $h$ kleiner als $(\overline{K}+\varepsilon)\frac{\lg(2h)}{2h}$ wird.

## 3. Teil.

## Beweis der Konvergenz der Entwicklung einer stetigen Funktion nach Legendreschen Polynomen, wenn die Koeffizienten der Entwicklung nicht negativ sind.

Ein von Mercer aufgestelltes Theorem besagt, daß die bilineare Formel stets dann konvergiert, wenn der Kern stetig ist und seine Eigenwerte positiv sind.*) Wenn nun bei der Entwicklung von einer Funktion $F(x)$ nach Legendreschen Polynomen alle Entwicklungskoeffizienten nicht negativ sind, so sind alle Eigenwerte von

$$F(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos (v - v'))$$

positiv, also muß die bilineare Formel für diesen Kern konvergieren und das ist damit identisch, daß die Entwicklung von $F(x)$ nach Legendreschen Polynomen konvergieren muß. Es mag jedoch einigermaßen umständlich erscheinen, wenn man sich beim Beweis dieser Behauptung auf den so allgemeinen Mercerschen Satz stützt, daher erscheint es mir nicht überflüssig, für diesen Satz einen einfachen direkten Beweis zu erbringen.

Aus der bereits angegebenen Reihenentwicklung für $x^n$ nach Legendreschen Polynomen können wir unmittelbar entnehmen: Wenn alle Koeffizienten der Entwicklung nach Legendreschen Polynomen nicht negativ sind, d. h. wenn für alle $\nu$ die Ungleichung gilt

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\, p_\nu(x)\, dx \geqq 0,$$

so muß auch für alle $h$

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\, (x^{2h} + x^{2h+1})\, dx \geqq 0$$

also muß auch nach dem Hilfssatz vom 2. Teil und dem Zusatz

$$\lim_{h=\infty} h \int_{-1}^{+1} F(x)\, (x^{2h} + x^{2h+1})\, dx = F(1) \geqq 0$$

sein. Da aber nun auch für die Funktion

$$F(x) - \sum_{1}^{m} \alpha_\nu\, p_\nu(x),$$

wobei

$$a_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} F(x)\, p_\nu(x)\, dx$$

---

*) Ein einfacher Beweis dieses Satzes wurde von A. Kneser gegeben. Rendiconti di Circulo di Palermo Bd. 37 (1914), S. 169.

ist, alle Koeffizienten der Entwicklung nicht negativ sind, so folgt:

$$F(1) - \sum_{1}^{m} a_{\nu} \geqq 0.$$

Und mit Rücksicht auf die bekannte (und im 1. Teil der Arbeit bewiesene) Ungleichung (vgl. die Anm. S. 141) $|p_{\nu}(x)| \leqq 1$ folgt, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Reihenentwicklung der Funktion $F(x)$ nach Legendreschen Polynomen absolut und gleichmäßig konvergiert.

---

Zum Schlusse möchten wir noch die Bemerkung hinzufügen, daß sich alle in dieser Arbeit angestellten Überlegungen sehr leicht auf die trigonometrischen Funktionen übertragen lassen.