Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche.

Von

Georg Pick in Prag.

1.

Das sogenannte Schwarzsche Lemma*) besagt, daß eine Funktion w von z, welche im Innern des Einheitskreises regulär und absolut kleiner als Eins ist, und für $z = 0$ verschwindet, für $|z| < 1$ die Relation

$$\left|\frac{w}{z}\right| < 1$$

befolgt.**) Mit anderen Worten: bei der von einer solchen Funktion bewirkten konformen Abbildung werden die Entfernungen vom Mittelpunkt verkürzt. Gründen wir nun auf den Einheitskreis eine kreisgeometrische Maßbestimmung, bei welcher die Orthogonalkreise des Einheitskreises kürzeste Linien sind, und die N.-E. Entfernung (nicht-Euklidische E.) in bekannter Weise als Logarithmus eines Doppelverhältnisses erklärt wird,***) so wird die N.-E. Entfernung eines Punktes mit dem Radiusvektor ϱ vom Nullpunkt gleich

$$\log\frac{1+\varrho}{1-\varrho},$$

und man sieht, daß das Schwarzsche Lemma auch äquivalent ist mit der Aussage, daß bei unserer konformen Abbildung die N.-E. Entfernungen vom Nullpunkt verkürzt werden.

*) Vgl. etwa Carathéodory, Math. Ann. 72, insb. S. 110.

**) Mit Ausnahme eines weiter unten bezeichneten Falles.

***) Wenn h, k die Schnittpunkte des durch z_1, z_2 bestimmten Orthogonalkreises mit dem Einheitskreis sind, so wird

$$\log\frac{(z_1-h)(z_2-k)}{(z_1-k)(z_2-h)}$$

als N.-E. Distanz von z_1, z_2 bezeichnet. Vgl. Poincaré, Acta Math. I, S. 1ff., wo eine derartige Maßbestimmung wohl zum erstenmal für funktionentheoretische Zwecke verwendet ist.

Im Ausnahmefall gilt Folgendes: Wenn für irgend einen Punkt z^* die Distanz vom Nullpunkt erhalten bleibt,

$$|w^*| = |z^*|,$$

so findet das für alle Punkte statt und die Funktion ist jene bestimmte lineare Funktion, welche das Innere des Einheitskreises schlicht auf sich selbst so abbildet, daß der Nullpunkt in den Nullpunkt und z^* in den vorgeschriebenen Punkt w^* übergeht. Auch in dieser Aussage kann für Distanz N.-E.-Distanz gesetzt werden.

Wir unterwerfen nun die z- und die w-Ebene unabhängig voneinander linearen Transformationen, ersetzen also z etwa durch $\frac{\gamma + \delta z}{\alpha + \beta z}$, und w durch $\frac{\gamma' + \delta' w}{\alpha' + \beta' w}$. Aus dem Einheitskreis werden dabei beliebige *Kreisscheiben* K_z, K_w; wir wollen diesen Terminus auch dann festhalten, wenn das Gebiet sich ins Unendliche erstreckt, also eine Halbebene oder das „Äußere" eines Kreises ist. Dem Nullpunkt des Einheitskreises können dabei beliebige Punkte im Inneren der Kreisscheiben K_z, K_w entsprechen. Bei solcher linearen Transformation bleiben die N.-E.-Entfernungen invariant, wobei natürlich nachher die Randlinien von K_z und K_w als Maßlinien zu nehmen sind. Die ursprüngliche Funktion verwandelt sich in eine Funktion, die innerhalb der Kreisscheibe K_z ohne wesentliche Singularität ist, und daselbst nur Werte annimmt, die innerhalb der Kreisscheibe K_w liegen. *Dabei werden also die N.-E.-Entfernungen irgend welcher Punkte verkürzt,* es sei denn, daß *eine* und folglich alle N.-E.-Entfernungen erhalten bleiben, und die Funktion dann die Kreisscheibe K_z schlicht auf die Scheibe K_w abbildet. Erleiden nun die N.-E.-Entfernungen Verkürzung, so gilt Gleiches von den unendlich kleinen solchen Entfernungen, das heißt von den N.-E.-Bogenelementen, und daher, indem man integriert, von der N.-E.-Länge irgend welcher Kurvenbogen. Also gilt folgender Satz:

Wenn die Funktion w von z innerhalb der Kreisscheibe K_z frei von wesentlichen Singularitäten ist und nur Werte annimmt, die innerhalb der Kreisscheibe K_w liegen, so werden alle N.-E.-Entfernungen, N.-E.-Bogenelemente und N.-E.-Bogenlängen bei der konformen Abbildung durch w verkürzt, es sei denn, daß irgend eine solche Abmessung ungeändert bleibt; in diesem Falle bleiben alle Maße ungeändert, und die Funktion ist linear und bildet K_z auf K_w schlicht ab.

Man kann zu den aufgezählten Maßen selbstverständlich auch das N.-E.-Flächenmaß hinzufügen, welches ja aus dem Linienmaß abgeleitet ist. Aus dem obigen Satz folgt außerdem:

Ordnet eine Funktion der bezeichneten Art dem Wert z_1 den Wert w_1 zu, so liegt der einem beliebigen z-Wert entsprechende Wert von w in einer

Kreisscheibe, welche w_1 *zum N.-E.-Mittelpunkt und die N.-E.-Entfernung von* z_1 *und* z *zum N.-E.-Radius hat. Liegt* w *auf dem Rand dieser Scheibe, so ist die Funktion linear.*

Daß zu jeder Lage von w_1 in der Kreisscheibe auch wirklich Funktionen gehören, schließt man leicht so. Es sei z_1 gemäß $|z_1| < 1$ beliebig gewählt, und w_1 beliebig gemäß $|w_1| \leqq |z_1|$. Dann ist $w = \frac{w_1}{z_1} z$ eine Funktion, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügt und für $z = z_1$ den Wert w_1 annimmt. Das überträgt man leicht auf den allgemeinen Fall.

Man kann diese Sätze statt aus dem Schwarzschen Lemma aus einem Satz von Carathéodory*) herleiten, welcher sich hierdurch als im Wesentlichen dem Schwarzschen Lemma äquivalent zeigt. Der Satz besagt, daß, wenn

$$w = \frac{1}{2} + \alpha_1 z + \cdots$$

im Einheitskreis konvergiert und daselbst positiven Realteil besitzt,

$$|\alpha_1| \leqq 1$$

sein muß, wobei das Gleichheitszeichen nur für gewisse lineare Funktionen statthat. Das Gebiet für w ist also hier die Halbebene der positiven Realteile, und α_1 ist $\frac{dw}{dz}$ für $z = 0$, $w = \frac{1}{2}$. Man erkennt leicht, daß die N.-E.-Bogenelemente für diese Punkte durch $2|dz|$, $2|dw|$ gegeben sind, und erfährt also zunächst, daß die Bogenelemente bei $z = 0$ verkürzt werden. Durch lineare Transformation von z und ebensolche von w gelangt man wieder zu beliebigen Kreisscheiben K_z und K_w, und es ergibt sich, daß *alle* Bogenelemente bei der Abbildung verkürzt werden. Hieraus aber folgt durch Integration das Gleiche für die Bogenlängen von Kurvenstücken, und dann auch für die Entfernungen. Man gewinnt so alle die obigen Sätze wieder. Gleichzeitig aber erkennt man, daß diese Sätze nur den Ersten aus einer nicht abbrechenden Folge von Sätzen ausmachen, die man erhalten wird, indem man die ganze Folge der Sätze von Carathéodory über die Reihenkoeffizienten positiver harmonischer Funktionen kreisgeometrisch verallgemeinert. Über den Erfolg dieser Verallgemeinerung möchte ich bei anderer Gelegenheit berichten.

Der Vorzug, welchen die entwickelten neuen Formulierungen besitzen, beruht, abgesehen von ihrer Invarianz gegenüber Kreisverwandtschaften (linearen Transformationen), in der guten Übersicht über Abschätzungen bei konformen Abbildungen, die sie dadurch gewähren, daß man ohne

*) Vgl. Carathéodory, Rend. d. Palermo 32, S. 193 ff.

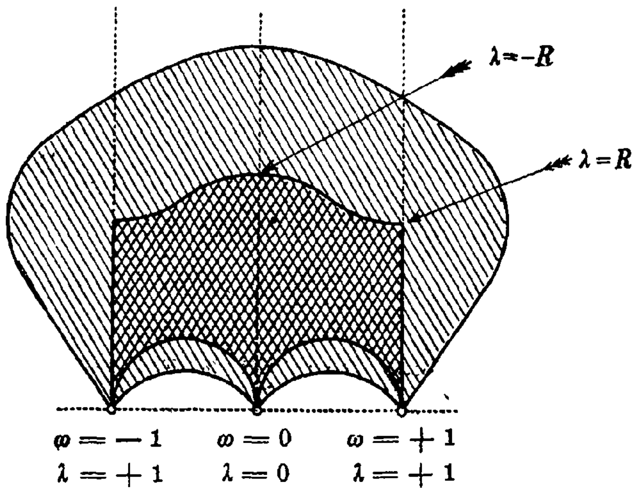
weitere Vorbereitung *gleichzeitig* an den verschiedenen Stellen des Gebiets von ihnen Gebrauch machen kann. Ein Beispiel der Anwendung wird diesen Vorzug deutlich machen.

2.

Schottky*) hat bewiesen, daß eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$, welche innerhalb des Einheitskreises die Werte Null und Eins nicht annimmt, für $|z| < \varrho$ $(\varrho < 1)$ absolut genommen unter einer nur von $|f(0)|$ und ϱ abhängigen Schranke bleibt. Landau**) hat gezeigt, daß eine solche Schranke noch besteht, wenn man auch $f(0)$ zu variieren erlaubt, und nur die Bedingungen

$$|f(0)| \leqq R, \qquad f(0) \neq 0, \qquad f(0) \neq 1,$$

festhält. Die Schranke ist dann durch den willkürlich angenommenen positiven Wert R und durch ϱ allein gegeben. Mit diesen Sätzen befassen sich die nachfolgenden Überlegungen.



Durch die Gleichung

$$\lambda(w) = f(z),$$

in welcher $\lambda(w)$ die elliptische Modulfunktion bedeutet, ist w für $|z| < 1$ als reguläre Funktion von z erklärt, wenn man noch über den Wert w_0 von w an irgend einer Stelle, etwa für $z = 0$, verfügt. Wir wollen annehmen, daß w_0 dem sogenannten Fundamentalraum***) angehört (vgl. Fig.). Die Werte von w gehören insgesamt der positiven Halbebene (Halbebene der positiven Imaginärteile) an. Also sind die Sätze von § 1 in der Form anzuwenden, daß K_z mit dem Einheitskreis, K_w mit der positiven Halbebene identifiziert wird. Es liegen somit die zu irgend einem z im Kreise mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt zugehörigen Werte von w in einem Kreis um w_0 mit dem N.-E. Radius $\log \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ in bezug auf die Achse der

*) Vgl. Schottky, Berl. Ber. 1904, S. 1244 ff.

**) Vgl. Bohr und Landau, Gött. Nachr. 1910, insb. S. 309.

***) Das unendliche Gebiet zwischen den beiden äußern vertikalen Geraden und oberhalb der Halbkreise. Es sei bemerkt, daß die Figur schematisch gezeichnet ist, in Wirklichkeit ist die obere Begrenzungslinie des doppelt schraffierten Gebietes T_0 viel stärker nach oben gewölbt, und entsprechend auch die obere Begrenzungslinie des schraffierten Gebietes T.

reellen Zahlen als Maßlinie. Dieser Kreis liegt ganz im Innern der positiven Halbebene, und folglich hat $|\lambda(w)|$ in ihm ein Maximum, welches auf der Peripherie stattfinden muß. *Die Auffindung der scharfen Schranke für den Schottkyschen Satz ist damit auf eine gewöhnliche Maximumaufgabe für eine Funktion einer reellen Variablen zurückgeführt*).*

Erlaubt man jetzt $f(0)$ in der angegebenen Weise zu variieren, so ist w_0 auf einen Teil T_0 des Fundamentalraums eingeschränkt, welcher (siehe Figur) nach oben durch die Linie

$$|\lambda(w)| = R$$

abgeschlossen ist, während unten nur die drei Ecken selbst auszuschließen sind. (Wir wollen uns dabei auf die Annahme $R > 1$ beschränken.) Es ergibt sich der Variabilitätsbereich T für w, indem man das Gebiet konstruiert, das von sämtlichen Kreisen um die Punkte von T_0 mit dem N.-E. Radius $\log\frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ bedeckt wird. Man hat also nur zum Rand von T_0 die N.-E. Parallelkurve mit der Distanz $\log\frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ zu zeichnen, um die Begrenzung von T zu erhalten. Diese Parallelkurve besteht aus zwei Kreisbogen durch 0 und -1, bzw. durch 0 und $+1$, welche mit den beiden durch die gleichen Punkte hindurchgehenden Halbkreisen den Winkel φ bilden, der durch

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \varrho$$

bestimmt ist; ferner aus zwei durch -1 bzw. $+1$ hindurchgehenden Geraden, welche mit der Richtung der Achse des Imaginären denselben Winkel φ einschließen; schließlich aus der Parallelkurve des oberen Randes von T_0. In dem so begrenzten Gebiet T hat $|\lambda(w)|$ ein wirkliches Maximum. Da nämlich die in den unteren Ecken zusammenlaufenden Begrenzungsstücke die reelle Achse unter von Null verschiedenem Winkel treffen (es ist $\varphi < \frac{\pi}{2}$, weil $\varrho < 1$), so ist $\lambda(w)$ in genügender Nähe der unteren Ecken innerhalb T beliebig wenig von 0 bzw. von 1 verschieden. Da nun $R > 1$ vorausgesetzt ist, kann man die Umgebung dieser Ecken aus dem Gebiet ausschließen, ohne daß die obere Schranke von $|\lambda(w)|$ sich ändert, also das Gebiet durch ein abgeschlossenes ersetzen. Das Maximum von $|\lambda(w)|$ findet auf dem oberen Teil der Begrenzung statt, weil $|\lambda(w)|$ auf Parallelen zur Achse der imaginären Zahlen nach oben zunimmt. *Auch diese Schrankenbestimmung ist hiermit auf eine gewöhnliche Maximumaufgabe einer Funktion einer reellen Veränderlichen zurückgeführt.*

---

*) Der Wert von w, der das Maximum liefert, ist aus der Gleichung

$$\Re\left\{\frac{1}{\lambda}\,\frac{d\lambda}{dw}(w-w_0)(w-\overline{w}_0)\right\} = 0$$

zu bestimmen, wie man leicht ausrechnet.

Eine Annäherung an dieses Maximum, das heißt eine unscharfe obere Schranke, kann man auf folgende bequeme Weise erhalten. Die Kurve $|\lambda(w)| = R$ hat im Fundamentalraum ihren höchsten Punkt auf der imaginären Achse. Man ziehe durch diesen eine Parallele zur reellen Achse. Sie begrenzt einen Teil des Fundamentalraumes, den wir T_0^* nennen wollen, und der T_0 ganz enthält. Die Parallelkurve für die N.-E.-Distanz $\log \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ von der Berandung von T_0^* begrenzt ein Gebiet T^*, welches nach oben geradlinig abgeschlossen ist und zwar von einer zweiten Parallelen zur reellen Achse, deren Ordinate das $\frac{1+\varrho}{1-\varrho}$-fache der Ordinate der ersten ist. Auf dieser Geraden findet das Maximum von $|\lambda(w)|$ in T^* statt, und zwar in ihren Schnittpunkten mit den geradlinigen Begrenzungsteilen des Fundamentalraumes. Um das Maximum zu finden, hat man also zunächst w_0 aus der Gleichung

$$\lambda(w_0) = -R$$

als rein imaginäre Zahl zu bestimmen und dann

$$\lambda\left(1 + \frac{1+\varrho}{1-\varrho} w_0\right)$$

auszurechnen. Dies ist die gesuchte Schranke.

Prag, 26. Februar 1915.