Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen.

Von

M. Dehn in Kiel.

Das Problem, das uns im folgenden beschäftigen wird, ist eines der einfachsten der Topologie: *Gegeben sind zwei geschlossene Kurven auf einer geschlossenen zweiseitigen Fläche, es ist zu untersuchen, ob sie durch stetige Deformation ineinander übergeführt, „ineinander transformiert" werden können.* Die Lösung des Problems für Flächen mit einem Geschlecht $p > 1$ mit Hilfe der „Polygongruppen" und demgemäß auf Grund der Metrik der hyperbolischen Ebene ist naheliegend und z. B. von Poincaré (Rend. Circ. Mat. Pal. 1905) angedeutet, von mir in der Arbeit Math. Ann. 71 ganz genau entwickelt.*) In derselben Arbeit habe ich auch eine Methode angegeben, um ohne Hilfe der Metrik rein topologisch die Frage zu entscheiden. Bei der *Begründung* dieser Methode habe ich aber sehr wesentlich Eigenschaften von Figuren der hyperbolischen Ebene benutzt. — Für Flächen vom Geschlecht $p = 0$ und $p = 1$ ist die Lösung des Problems sehr einfach: im ersten Fall sind alle Kurven ineinander transformierbar, im zweiten Fall ist die „Fundamentalgruppe" abelsch, und jede Kurve ist transformierbar in eine Kurve, die durch das m-malige Durchlaufen einer festen Kurve C und darauf μ-malige Durchlaufen einer zweiten festen Kurve Γ entsteht, und zwar sind diese Zahlen m und μ unabhängig von der Art der Transformation, womit das Transformationsproblem gelöst ist.

Es ist nun eigentümlich und für die Unvollkommenheit der Durchforschung der Topologie charakteristisch, daß eine Lösung des Transformationsproblems für $p > 1$, die fast ebenso einfach ist wie die eben angeführte für den Fall $p = 1$, bisher unbekannt war: Führt man durch $2p$ Schnitte $a_1, b_1, \cdots, a_p, b_p$ die Fläche in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück über, dessen Berandung der Reihe nach von den Kurven

*) Vgl. hierzu die analytische Ausführung in der demnächst erscheinenden Dissertation von Gieseking.

$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}; a_2, \cdots, b_p^{-1}$ gebildet wird, dann läßt sich jede geschlossene Kurve L der Fläche transformieren in eine aus diesen „erzeugenden“ Kurven zusammengesetzte Kurve, etwa

$$a_1^{\alpha_1} \cdots b_p^{\beta_p} a_1^{\alpha_1'} \cdots \equiv A.$$

Gibt es dann, eventuell nach zyklischer Vertauschung der Glieder, einen Teil des Ausdruckes A, der mehr als $2p$, etwa q Glieder der Relation

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots b_p^{-1} = 1$$

in der Reihenfolge der Relation oder in der umgekehrten Reihenfolge enthält, dann ersetze man diesen Teil durch den ihm gleichen Ausdruck, der aus den $4p - q$ übrigen Gliedern zusammengesetzt ist, man streiche ferner, eventuell nach zyklischer Vertauschung, aufeinanderfolgende Glieder von der Form c und c^{-1} gegeneinander fort und setze diese beiden Reduktionsverfahren solange wie möglich fort. Dann ist A schließlich in einen Ausdruck K übergeführt, den wir einen reduzierten Ausdruck nennen wollen. K stellt eine Kurve dar, in die L transformierbar ist. Darauf lautet unser

Hauptsatz: *Abgesehen von* unschwer zu erledigenden *Ausnahmefällen bestimmt jede Kurve eindeutig bis auf zyklische Vertauschung der Glieder einen reduzierten Ausdruck.*

Abgesehen von den Ausnahmefällen sind zwei Kurven dann und nur dann ineinander transformierbar, wenn ihre reduzierten Ausdrücke bis auf zyklische Vertauschung der Glieder identisch sind.

Einige Ausnahmefälle sind sehr naheliegend, z. B. sind ja zwei Ausdrücke, die aus je einer Hälfte der Glieder der Relation bestehen, ineinander transformierbar, für $p = 2$:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \quad \text{und} \quad b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1}.$$

Weniger triviale Beispiele für Ausnahmefälle findet man im folgenden in dem ihrer Behandlung gewidmeten Absatz.

Für das folgende wird die Kenntnis der einfachsten Eigenschaften der Abbildung der zweiseitigen Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf ein Netz von $4p$-Ecken, die zu je $4p$ an einer Ecke zusammenstoßen, vorausgesetzt. Man findet diese in Kapitel I, § 1, Absatz 1—5 und § 5 meiner Arbeit Math. Ann. 71. Ich erinnere hier nur daran, daß dieses Netz das Bild einer unendlichen Gruppe, der zu der Fläche gehörenden Fundamentalgruppe, ist, die $a_1, b_1, \cdots, b_p$ als Erzeugende hat und durch die Relation

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots b_p^{-1} = 1$$

definiert ist. Allen Kurven der Fläche, die ineinander transformierbar sind, entsprechen Elemente der Gruppe, die ineinander transformierbar sind, speziell den Kurven, die auf einen Punkt zusammenziehbar sind, der Identität gleiche Elemente der Gruppe, die durch geschlossene Streckenzüge des Netzes repräsentiert werden.

§ 1.

Das Identitätsproblem.

Satz 1: *Es sei das Element $a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} \cdots a_1^{\alpha_1'} \cdots$ der Fundamentalgruppe gleich der Identität, dann ist dieser Ausdruck reduzierbar,* d. h. nach dem oben Auseinandergesetzten kommen in dem Ausdrucke q Glieder ($q > 2p$) in derselben Reihenfolge vor wie in der definierenden Relation und sind also durch $4p - q$ Glieder ersetzbar, oder es kommen zwei Glieder von der Form s und s^{-1} in dem Ausdruck hintereinander vor und sind also weglaßbar.

Zum Beweise haben wir bloß zu zeigen, daß jeder geschlossene Streckenzug in dem Gruppenbild, also in dem $4p$-Ecknetz, mit einem Netzpolygon mehr als $2p$ Seiten gemein hat oder zweimal in entgegengesetztem Sinne und nacheinander durchlaufene Strecken besitzt.

Wir betrachten zunächst die Gesamtheit G_1 von Netzpolygonen, die aus einem einzigen Netzpolygon besteht, dann die Gesamtheit G_2, die entsteht, wenn man zu G_1 alle Netzpolygone hinzufügt, die eine Ecke mit dem Rand von G_1 gemeinsam haben, dann G_3, das aus G_2 durch Hinzufügung aller Polygone entsteht, die mit dem Rand von G_2 eine Ecke gemeinsam haben, usw. — Jeder geschlossene Streckenzug in G_1 hat gewiß die verlangte Eigenschaft, aber auch jeder geschlossene Streckenzug von G_2. In der Tat, jeder Punkt von G_2, der nicht zu G_1 gehört, ist ein Randpunkt der einfach zusammenhängenden Gesamtheit G_2 und von ihm geht höchstens eine Strecke nach dem Inneren, und in diesem Fall gehen zwei reduzierbare Streckenzüge von ihm aus, die ganz dem Rande angehören. Ein geschlossener Streckenzug, der keine hintereinander im entgegengesetzten Sinne durchlaufene Strecken besitzt, ist also entweder ganz in G_1 enthalten oder enthält notwendig einen der reduzierbaren Streckenzüge des Randes von G_2. Genau derselbe Schluß gestattet den Beweis von den in G_2 auf die in G_3, G_4 usw. verlaufenden geschlossenen Streckenzüge sukzessive auszudehnen, womit unser Satz bewiesen ist.

Unser *Beweis* benutzt wesentlich die Eigenschaften des Gruppenbildes, dagegen liefert der Satz selbst ein Verfahren, um ohne Konstruktion des Gruppenbildes direkt zu entscheiden, ob ein Ausdruck ein der Identität gleiches Element darstellt oder nicht. Das ist ein Vorteil gegenüber der Methode, gemäß welcher man zu dieser Entscheidung zuerst das Gruppenbild konstruiert und diesem entnimmt, ob der Ausdruck einen geschlossenen Streckenzug liefert oder nicht.

Für das Folgende ist es nötig, noch mehr Eigenschaften von geschlossenen Streckenzügen herauszufinden: wir wollen uns *zunächst* auf *singularitätenfreie* derartige *Züge* beschränken. Wir bezeichnen eine Reihe von Netzpolygonen $P_1, P_2, \cdots$, von denen jedes mit dem folgenden eine Strecke gemeinsam hat, sonst aber zwei Polygone keine gemeinsamen Elemente besitzen, als eine *Kette*. Beginnen wir unsere Betrachtungen der Einfachheit wegen mit einem Polygon, das dem von dem zu untersuchenden Zug Π eingenommenen Gebiet Γ angehört und nur *einen* ungeschlossenen Streckenzug mit Π gemeinsam hat. Dieses Polygon bezeichnen wir in der obigen Bedeutung mit G_1. Besteht Π nicht bloß aus der Berandung eines Polygons, dann gehören zu Γ sicher Polygone von G_2. Denn sonst müßte Π Doppelstrecken haben. Gehört aber zu Γ nur *ein* Polygon von G_2, dann bildet dies mit dem ersten zusammen eine Kette, auf deren Berandung zwei reduzible Züge von $4p-1$ Strecken liegen; gehören aber mehrere Polygone von G_2 zu Γ, dann hat der Rand des von diesen Polygonen und G_1 eingenommenen Gebietes mindestens drei reduzierbare Züge von mindestens $4p-2$ Strecken. Da nun ein Polygon von G_3 niemals zwei Strecken mit dem Rande von G_2 gemeinsam hat, andererseits nicht zwei Polygone von G_3 gleichzeitig miteinander und mit G_2 je eine Strecke gemeinsam haben, so kann durch die zu Γ gehörenden Polygone von G_3 keiner seiner reduzierbaren Züge zerstört werden, ohne daß gleich große neue reduzierbare Züge auftreten. Indem wir diese Schlußweise fortsetzen, erhalten wir das Resultat:

Eine geschlossene singularitätenfreie Kurve des Netzes hat mindestens drei reduzible Züge von mindestens $4p-2$ Strecken mit alleiniger Ausnahme des Falles, daß sie die Berandung einer Kette oder eines einzigen Polygons bildet.

Wir betrachten nun weiter Kurven mit Singularitäten, zunächst sollen dies bloß Punkte sein. Bei jeder solchen Kurve Π können wir von einem solchen singulären Punkt ausgehen, daß man, wenn man die Kurve Π in geeigneter Weise von ihm aus durchläuft, zu dem Punkte zurückkehrend, eine singularitätenfreie geschlossene Kurve beschrieben hat (eine Schleife). Diese Schleife hat dann und nur dann nicht mehr als zwei reduzierbare Streckenzüge, wenn sie die Berandung einer Kette ist; dadurch, daß Π sich nicht in dem singulären Punkt schließt wie die Schleife, kann höchstens *ein* reduzierbarer Streckenzug der Schleife nicht auf Π selbst liegen. Nun hat aber jede Kurve mit Singularitäten mindestens zwei Schleifen ohne gemeinsame Strecken. Wenn also Π keine drei reduzible Züge von mindestens $4p-2$ Seiten haben soll, so darf Π nur zwei Schleifen ohne gemeinsame Strecken haben und diese müssen je eine Kette begrenzen. Daraus folgt aber weiter, daß in diesem Fall keine der beiden Schleifen singuläre Punkte haben kann. Denn betrachte ich eine Schleife ABA, der Punkt B auf ihr sei ein singulärer Punkt für Π, dann sind zwei Fälle möglich: 1. (Fig. 1) Beide von A aus laufenden nicht zur Schleife ABA gehörenden Züge von Π laufen nach singulären Punkten etwa B und C der Schleife, ohne vorher selbst eine Schleife zu bilden, d. i. ohne Doppelpunkte; diese Züge seien etwa AXB und AYC. Begrenzt AXB mit BA zusammen eine Kette, so hat diese mit der von der Schleife $ABCA$ begrenzten Kette BA gemeinsam, folglich besteht BA aus einer einzigen Strecke. Also bleibt von den reduzierbaren Zügen von $AXBA$ mindestens einer ein reduzierbarer Zug von mindestens $4p-1$ Strecken für den Zug AXB auf Π. Begrenzt aber AXB mit BA keine Kette, so braucht zwar BA keine einzelne Strecke zu sein, aber dafür hat $AXBA$ mindestens drei reduzible Züge von $4p-2$ Seiten, von dem also einer mindestens auf dem Zug AXB oder auf dem Zug AB von Π liegt. Durch Betrachtung des anderen Zuges AYC folgt, daß auch auf diesem oder auf AC mindestens ein reduzibler Zug von mindestens $4p-2$ Seiten liegen müßte. Wenn wir dann berücksichtigen, daß sowohl auf der Schleife $AYCBA$ als auch auf der Schleife $AXCBA$ mindestens ein reduzibler Zug von Π mit $4p-2$ Seiten liegt, so ergibt sich sofort, daß in diesem Fall wieder drei reduzible Züge von mindestens $4p-2$ Seiten auf Π vorhanden sind. — 2. (Fig. 2.) Einer von den von A auslaufenden nicht zur Schleife ABA gehörenden Züge von Π bildet eine Schleife CYC, bevor er zu einem singulären Punkt auf ABA gelangt. Dann wird der andere, wenn Π nicht drei reduzierbare Züge haben soll, singularitätenfrei zu dem singulären Punkt B der Schleife ABA laufen müssen (sonst hätte man ja mindestens drei getrennte Schleifen); sein Vorhandensein bewirkt aber nach dem Obigen mindestens zwei reduzible Züge von $4p-2$ Seiten für Π, was zusammen mit dem von der Schleife CYC gelieferten Zug wieder drei solche Züge für Π ergibt. Also hat die Existenz eines singulären Punktes B auf der Schleife notwendig zur Folge, daß Π mindestens drei reduzible Streckenzüge von mindestens $4p-2$ Seiten besitzt. Soll dies also nicht der Fall sein, so teilt Π die Ebene in lauter Parzellen $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_m$, von denen jede mit der folgenden einen Punkt gemeinsam hat, und die je aus einer Kette oder aus einem einzigen Netzpolygon bestehen. Lassen wir auch Doppelstrecken zu, so ändert sich nichts Wesentliches in unserer Schlußweise. Wir erhalten zusammenfassend:

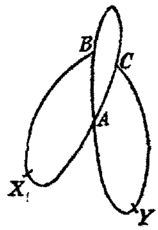

Fig. 1.

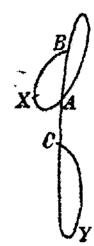

Fig. 2.

Satz 2. *Eine geschlossene Kurve* Π *des Netzes hat mindestens drei reduzible Streckenzüge von mindestens* $4p-2$ *Strecken, wenn sie nicht die Randkurve einer Kette resp. eines Netzpolygons oder eine Reihe von Ketten (resp. Netzpolygonen) ist, bei der jedes Glied mit dem folgenden durch einen gemeinsamen Punkt oder eine Doppelstrecke von* Π *verbunden ist.*

Hat Π also nicht drei reduzible Streckenzüge von mindestens $4p-2$ Strecken und ist es nicht die Berandung *eines* Netzpolygons, dann besitzt Π zwei reduzible Streckenzüge von mindestens $4p-1$ Strecken.

§ 2.

Das Transformationsproblem.

Mit Hilfe des Satzes 2 ist es nun leicht, das Transformationsproblem, d. i. das Problem der Reduktion der geschlossenen Kurven auf einer Fläche vom Geschlecht $p > 1$, in der beabsichtigten Weise zu lösen.

Es seien U und V zwei reduzierte Ausdrücke in der Bezeichnung der Einleitung, d. i. U und V enthalten auch nach zyklischer Vertauschung keine reduziblen Streckenzüge oder Streckenzüge von der Form SS^{-1}. (Diese Reduktion läßt sich ohne jede Benutzung des Gruppenbildes direkt mit einem gegebenen Ausdruck auf Grund der Fundamentalrelation vornehmen.) U und V seien nun ineinander transformierbar, d. i. bei geeigneter Wahl eines dritten Ausdruckes T sei der Streckenzug

$$TUT^{-1}V^{-1} = \Pi$$

geschlossen. Dann können wir zunächst durch zyklische Vertauschung der Glieder in U und V erreichen, daß Π keinen Streckenzug von der Form SS^{-1} enthält; ferner bewirken wir durch eventuelle Reduktion von T und T^{-1}, daß auf diesen Zügen keine reduziblen Streckenzüge liegen.

Wir *nehmen* nun zunächst *an, daß* Π *nicht die Berandung einer Kette oder einer Reihe von Ketten ist* (s. § 1). Dann hat Π nach § 1 mindestens drei reduzierbare Streckenzüge von nicht weniger als $4p-2$ Strecken. Da die Züge U, V und T selbst keine solchen Züge enthalten, so muß es zwei dieser Züge geben, die einen Teil mit U und keinen mit V gemeinsam haben, oder zwei, die einen Teil mit V und keinen mit U gemeinsam haben. Nehmen wir etwa die erste Möglichkeit als erfüllt an und seien tu und $t'u'$ diese beiden reduzierbaren Streckenzüge, wo t und t' zu T resp. T^{-1}, u und u' zu U gehören. Da t und t' zwei Endstreckenzüge desselben Streckenzuges T sind, so kann einer von ihnen bloß *eine* Strecke lang sein. Denn tu und $t'u'$ sollen je zu der Begrenzung einer Netzmasche gehören. Aber zwei Strecken kommen in derselben Reihenfolge nur einmal in der Netzmaschenbegrenzung vor. Haben also sowohl t als t' mehr als eine Strecke, so müßten u und u' den gleichen

Anfang haben. Dann wären die letzte und die erste Strecke von U gleiche aber im entgegengesetzten Sinne durchlaufene Strecken und U könnte durch zyklische Vertauschung der Glieder und Weglassung eines Streckenzuges von der Form SS^{-1} gegen die Voraussetzung reduziert werden. Besteht aber etwa t nur aus einer Strecke, so muß, weil der Zug tu mindestens $4p-2$ Strecken hat, u mindestens $4p-3$ Strecken haben. Also besitzt U einen Zug von $4p-3$ Strecken, der reduzibel ist, weil $p>1$ sein soll. Es wäre also U gegen die Voraussetzung kein reduzierter Ausdruck.

Wir haben also das Resultat:

Zwei reduzierte ineinander transformierbare Ausdrücke bilden stets mit Hinzunahme eines geeigneten transformierenden Ausdruckes die Berandung einer Kette oder einer Reihe von Ketten.

Für ein allgemeines Element ist es aber unmöglich, Elemente T und V zu finden, sodaß $TUT^{-1}V^{-1}\equiv\Pi$ die Berandung einer wirklichen Kette bildet, sondern vielmehr wird Π aus einem doppelt in entgegengesetztem Sinne durchlaufenen Streckenzug bestehen.

In der Tat, wenn diese Berandung nicht derartig ausarten soll, so müssen U und V je, abgesehen von doppelt durchlaufenen Zügen in Π, in Streckenzüge von nicht weniger als $2p-2$ Strecken zerfallen, die je auf *einer* Netzmasche liegen: In diesem Falle haben wir auf Π zwei reduzierbare Züge von mindestens $4p-1$ Strecken. Diese können beide gleichzeitig auf U und V liegen, dann folgt ebenso wie oben, daß T höchstens aus einer einzigen Strecke besteht. Oder der eine liegt etwa auf TU, der andere auf $T^{-1}V^{-1}$. Es sei wieder der eine mit tu, der andere mit $t'v'$ bezeichnet, in der oben angewandten Bedeutung. Dann kann man nach Voraussetzung t in T ersetzen durch cu^{-1} (c ist eine Erzeugende) resp. u^{-1}, je nachdem tu aus $4p-1$ oder $4p$ Strecken besteht. Wir können aber das Glied u^{-1} in der Transformierenden weglassen, wenn wir die zugehörige zyklische Vertauschung der Glieder in U ausführen und erhalten je eine neue Transformierende $\overline{T}$, die mindestens $2p-2$ Glieder weniger hat als T. So können wir fortfahren, so lange T nicht erst zusammen mit U und V reduzierbare Streckenzüge bildet. Wir erhalten also das Resultat:

Zusatz zum Hauptsatz: *Bilden U und V mit einer geeigneten Transformierenden zusammen die Berandung einer Kette usw., dann kann man durch geeignete zyklische Vertauschung der Glieder in U und V erreichen, daß U gleich V ist oder durch Transformation mit einer einzigen Erzeugenden in V übergeht.*

Dieses Resultat genügt zunächst, um in diesem *Ausnahmefall* das Transformationsproblem auf das im vorigen Paragraphen erledigte Identitätsproblem zurückzuführen. In der Tat: *sollen U und V ineinander transformierbar sein, so muß also*

$$c\overline{U}c^{-1}\overline{V}^{-1} = 1$$

oder

$$\overline{U}\,\overline{V}^{-1} = 1$$

sein, wo c irgend eine der $2p$ Erzeugenden und $\overline{U}$ resp. $\overline{V}$ ein aus U resp. V durch geeignete zyklische Vertauschung der Glieder entstandener Ausdruck ist. — Wir haben also jetzt das Transformationsproblem vollständig erledigt. Der von uns als Ausnahmefall bezeichnete Fall ist in der Tat, wie schon oben bemerkt, etwas ganz Spezielles: Damit er eintreten kann, ist nötig, daß in U sowohl wie in V Züge von mindestens $2p - 2$ Strecken vorkommen, die zu einem Netzpolygon gehören. Wir können demgemäß z. B. sofort schließen: *Zwei Ausdrücke von der Form $c_1^{m_1} \cdot c_2^{m_2} \cdots c_\nu^{m_\nu}$, wo $c_1, c_2, \cdots$ irgendwelche Erzeugende und $|m_1|, |m_2|, \cdots, |m_\nu|$ sämtlich größer als 1 sind, sind nur dann ineinander transformierbar, wenn sie durch zyklische Vertauschung der Glieder auseinander hervorgehen, ebenso zwei Ausdrücke von der Form*

$$a_{n_1}^{\alpha_1} a_{n_2}^{\alpha_2} \cdots a_{n_q}^{\alpha_q}$$

oder

$$b_{l_1}^{\beta_1} b_{l_2}^{\beta_2} \cdots b_{l_q}^{\beta_q},$$

in denen also nur die eine oder die andere Hälfte der Erzeugenden vorkommt, nur dann ineinander transformierbar, wenn sie durch zyklische Vertauschung der Glieder auseinander hervorgehen. Das sind Resultate, die sich mit den bisherigen Methoden wohl nur mühsam ableiten lassen würden.

Wir geben ferner noch ein Beispiel für den Ausnahmefall: Es sei $p = 2$, dann sind

$$a_1 b_1 a_1^{-1} a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 = U$$

und

$$a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} b_2 a_2 = V$$

ineinander transformierbar, denn es ist

$$b_2^{-1} U b_2 V^{-1} = 1;$$

denn der Ausdruck auf der linken Seite der letzten Relation ist ausführlich geschrieben

$$b_2^{-1} a_1 b_1 a_1^{-1} a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_1 a_2 b_2 a_2^{-1}.$$

Hier bilden die letzten drei und die ersten vier Glieder einen Zug von $4p - 1 = 7$ Seiten des Fundamentalpolygons und sind also durch eine Seite, nämlich b_1 ersetzbar. Es bleiben dann nur noch acht Glieder, die genau ein Fundamentalpolygon zusammen begrenzen.

Die Methode der Entscheidung der Transformierbarkeit sowohl wie ihr Beweis ist ganz frei von metrischen Elementen. In dem Beweis wird, was den speziellen Fall des Identitätsproblems sowohl als den Satz 2 angeht, die spezielle Bezeichnung der Netzseiten gar nicht benutzt, diese Resultate gelten also für alle Gruppen, deren Bilder Netze von $4p$-Ecken sind, die zu je $4p$ an jeder Ecke zusammenstoßen. Es ist leicht zu sehen, daß auch dies nicht vorausgesetzt zu werden braucht, sondern bloß, daß die Maschen mindestens siebeneckig sind, und daß an jeder Ecke mindestens vier Maschen zusammenstoßen.

Bei der Lösung des Transformationsproblems wird an *einer* Stelle die spezielle Natur der Bezeichnung der Netzseiten in Rechnung gebracht, hier wird nämlich die Eigenschaft benutzt, daß ein Streckenzug von mehr als einer Seite auf einer Netzmasche höchstens einmal vorkommt. Diese die *Bezeichnung* betreffende Eigenschaft folgt aber aus der *topologischen* Eigenschaft des Netzes, daß an keiner Ecke bloß zwei Maschen zusammenstoßen.