Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.

III. Teil.

Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen.*)

Von

ERHARD SCHMIDT in Bonn.

Einleitung.**)

Unter einer nichtlinearen Integralgleichung verstehe ich eine Funktionalgleichung von folgender Art: Es soll für $a \leqq s \leqq b$ eine stetige Funktion $u(s)$ so bestimmt werden, daß eine für $a \leqq s \leqq b$ definierte gleichmäßig konvergente unendliche Reihe gleich Null wird, deren Glieder aus der gesuchten Funktion $u(s)$ und weiteren gegebenen Funktionen durch die Operationen der Integration und Multiplikation, also auch Potenzierung zu positiven ganzen Exponenten, entstehen. So ist z. B.

$$0 = u(s) + v(s) + \int_a^b\int_a^b K(s, t_1, t_2)\, u(t_1)^2 u(t_2)^3 v(t_2)^2 dt_1\, dt_2,$$

wo $u(s)$ gesucht und $v(s)$ und $K(s, t_1, t_2)$ gegeben sind, eine solche nichtlineare Integralgleichung. Ebenso nun wie die gewöhnliche nichtlineare nach x aufzulösende Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

in der Umgebung einer Lösung eine und nur eine Lösung zuläßt, wenn $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ ist, im anderen Falle aber Verzweigungen eintreten, so hängt

*) Diese Abhandlung hat im Februar 1906 der Philosophischen Fakultät der Universität Bonn als Habilitationsschrift vorgelegen.

**) Diese Einleitung ist bis auf unwesentliche Änderungen eine Wiederholung der Inhaltsanzeige des vorliegenden Teiles, welche sich am Schluß der dem I. Teil voraufgehenden zusammenfassenden Einleitung Math. Ann. Bd. 63, S. 438 findet.

auch der Lösbarkeitscharakter einer nichtlinearen Integralgleichung in der Umgebung einer regulären Lösung von einer abgeleiteten linearen Integralgleichung ab. Läßt diese keine Nulllösungen*) zu, so ist die nichtlineare Integralgleichung in der Umgebung der vorausgesetzten Lösung eindeutig lösbar; gibt es aber Nulllösungen, so treten *funktionale Verzweigungen* ein, für welche es gelingt, die den Puiseuxschen entsprechenden Sätze aufzustellen.

Diese Theoreme ermöglichen es, wie ich demnächst auseinandersetzen werde, z. B. bei den nichtlinearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Abhängigkeit der Lösungsflächen von den Randwerten zu verfolgen und zwar mit Beherrschung der *Verzweigungen*, d. h. derjenigen Lösungen, in deren Umgebung es für willkürlich, aber genügend wenig veränderte Randwerte nicht mehr *eine*, sondern *mehrere* Lösungsflächen gibt. Der Verzweigungscharakter hängt davon ab, ob die Jacobische derivierte Differentialgleichung bei den Randwerten Null von Null verschiedene Lösungen hat oder nicht, eine Frage, die leicht zu entscheiden ist, indem man sie nach Hilbert auf die Frage nach der Existenz von Nulllösungen einer linearen Integralgleichung zurückführt.

Auch die von Poincaré entdeckte Bifurkation in der Theorie der rotierenden Gleichgewichtsfiguren ergibt sich, wie ich zeigen werde, als solche Verzweigung einer nichtlinearen Integralgleichung.

Aus der Theorie der linearen Integralgleichungen werden in der vorliegenden Untersuchung nur folgende der Fredholmschen Fundamentalsätze benutzt: Es sei der „*Kern*“ $K(s, t)$ eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte, stetige, reelle oder komplexe Funktion. Man bezeichne als „*Nulllösung in s*“ des Kernes jede nicht identisch verschwindende stetige Funktion $\varphi(s)$, welche identisch in s der Gleichung

$$\varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

genügt, und als „*Nulllösung in t*“ jede nicht identisch verschwindende stetige Funktion $\psi(t)$, welche identisch in t die Gleichung

$$\psi(t) - \int_a^b K(s, t)\, \psi(s)\, ds = 0$$

erfüllt.

Dann gelingt es die Gesamtheit der Nulllösungen zu bestimmen, und zwar ist die Anzahl der linear unabhängigen Nulllösungen in s stets endlich und gleich der Anzahl der linear unabhängigen Nulllösungen in t.

Ist diese Anzahl gleich Null, d. h. gibt es überhaupt keine Nulllösungen,

*) Die Erklärung dieses Terminus findet sich unten.

so läßt sich ein „lösender Kern" bestimmen d. h. eine stetige Funktion $\Gamma(s, t)$, *so daß die Gleichungen*

$$\varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(s),$$

$$f(s) + \int_a^b \Gamma(s, t)\,f(t)\,dt \;= \varphi(s)$$

wechselseitig auseinander folgen.

Außer dem ursprünglichen Fredholmschen*) Beweis für diese Sätze und dem von Hilbert**) mit Hilfe der Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Variabeln geführten, möchte ich den von mir im II. Teil***) gegebenen sehr elementaren Beweis erwähnen, dessen Methode in der vorliegenden Untersuchung wiederkehrt, indem sie sich auch für die Lösung der nichtlinearen Integralgleichung als valent erweist.

---

*) Acta Mathematica Bd. 27.

**) „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" IV[te] und V[te] Mitteilung, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Kl., 1906, S. 157—227 und S. 433—480.

***) Math. Ann. Bd. 64. Es ist hier vielleicht der Ort, dieses Auflösungsverfahren durch einige Worte zu ergänzen. Es besteht in einer höchst elementaren Reduktion der linearen Integralgleichung auf n lineare Gleichungen mit n Unbekannten, sobald ein System von n Paaren stetiger Funktionen

$$\alpha_1(s),\ \beta_1(t);\ \alpha_2(s),\ \beta_2(t);\ \cdots;\ \alpha_n(s),\ \beta_n(t)$$

ermittelt ist, welches den Kern $K(s, t)$ so weit approximiert, daß

$$\int_a^b\!\!\int_a^b \Big(K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu(s)\,\beta_\nu(t)\Big)^2 ds\,dt < 1$$

wird.

Was ich nun an dieser Stelle hinzufügen möchte, ist folgende einfache Herstellung eines solchen Systems von Funktionenpaaren $\alpha_\nu(s)$, $\beta_\nu(t)$:

Man teile das von t durchlaufene Gebiet in n Teilgebiete $i_1, i_2, \cdots, i_n$ und wähle in jedem derselben einen Punkt $t_1, t_2, \cdots, t_n$. Dann setze man für $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$

$$\alpha_\nu(s) = K(s, t_\nu)$$

und $\beta_\nu(t)$ gleich derjenigen stückweise stetigen Funktion, welche innerhalb des Teilgebiets i_ν gleich 1 und in allen anderen Teilgebieten gleich Null ist.

Da über die Größe von n frei verfügt werden kann, so folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit des Kernes, daß die Teilgebiete i_ν so klein gewählt werden können, daß bei dieser Bestimmung der Funktionen $\alpha_\nu(s)$, $\beta_\nu(t)$

$$\Big| K(s,t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu(s)\,\beta_\nu(t) \Big| \leqq \varepsilon \qquad \begin{pmatrix} a \leqq s \leqq b \\ a \leqq t \leqq b \end{pmatrix}$$

wird, wo ε eine vorgeschriebene, beliebig kleine, von Null verschiedene positive Größe

§ 1.

Die Integralpotenzreihe einer Argumentfunktion.

Unter einem *Integralpotenzglied* m^{ten} *Grades* der für $a \leqq s \leqq b$ definierten stetigen Argumentfunktion $u(s)$ verstehen wir einen Ausdruck von der Form

$$(1) \qquad u(s)^{\alpha_0} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(s, t_1, t_2, \cdots, t_\varrho) u(t_1)^{\alpha_1} u(t_2)^{\alpha_2} \cdots u(t_\varrho)^{\alpha_\varrho} dt_1 \, dt_2 \cdots dt_\varrho,$$

wo die reelle oder komplexe Koeffizientenfunktion K für

$$a \leqq s \leqq b, \; a \leqq t_1 \leqq b, \; a \leqq t_2 \leqq b, \; \cdots, \; a \leqq t_\varrho \leqq b$$

stetig definiert ist, und $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\varrho$ eine *beliebige* Anzahl ganzer Zahlen bezeichnen, welche den Bedingungen genügen

$$(2) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = m, \; \alpha_0 \geqq 0, \; \alpha_1 \geqq 1, \; \alpha_2 \geqq 1, \cdots, \alpha_\varrho \geqq 1.$$

So soll auch jeder Ausdruck von der Form

$$(3) \qquad K(s)\, u(s)^m,$$

wo die Koeffizientenfunktion $K(s)$ für $a \leqq s \leqq b$ stetig definiert ist, als ein Integralpotenzglied m^{ten} Grades aufgefaßt werden, in welchem $\alpha_0 = m$ und $\varrho = 0$ ist. Durch Vertauschung der Integrationsbuchstaben setzen wir ferner als erreicht voraus, daß

$$(4) \qquad \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \cdots \geqq \alpha_\varrho$$

ist. Wir bezeichnen zwei Integralpotenzglieder m^{ten} Grades dann als von gleichem *Typus,* wenn ihre Exponentenfolgen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\varrho$ übereinstimmen. Die Anzahl aller Typen m^{ten} Grades ist dann endlich.

Ferner bestehen, wie leicht ersichtlich, die Sätze:

I. Das Produkt eines Integralpotenzgliedes m^{ten} mit einem solchen n^{ten} Grades, läßt sich als Integralpotenzglied $m + n^{\text{ten}}$ Grades schreiben.

II. Ersetzt man in einem Integralpotenzglied m^{ten} Grades die Argumentfunktion $u(s)$ durch ein Integralpotenzglied n^{ten} Grades von $v(s)$, so läßt sich das Resultat als ein Integralpotenzglied $m \cdot n^{\text{ten}}$ Grades von $v(s)$ schreiben.

Unter einer *Integralpotenzform* m^{ten} Grades verstehen wir die Summe einer endlichen Anzahl von Integralpotenzgliedern m^{ten} Grades, welche wir

---

bedeutet. Wählt man ε genügend klein, so folgt aus dieser letzten Ungleichung die zu beweisende a fortiori. Daß die benutzten Funktionen β_ν nicht stetig, sondern bloß stückweise stetig sind, ändert nichts.

In der erwähnten Abhandlung bezieht sich alles auf das reelle Gebiet, und es wäre daher noch zu bemerken, daß die Zulassung komplexer Kerne und Funktionen keinerlei Änderung in den Sätzen oder der Beweisanordnung nötig macht.

alle als von verschiedenem Typus voraussetzen können, da Glieder von gleichem Typus durch Addition der Koeffizientenfunktionen in eines zusammengezogen werden können.

Eine von $u(s)$ unabhängige Funktion von s läßt sich auffassen als eine Integralpotenzform 0^{ten} Grades der Argumentfunktion $u(s)$.

Die Summe zweier Integralpotenzformen m^{ten} Grades gibt wieder eine solche. Ferner bestehen wie für Integralpotenz*glieder* die oben angegebenen Sätze I und II auch für Integralpotenz*formen.*

Wir wollen im folgenden Integralpotenzformen m^{ten} Grades der Argumentfunktion $u(s)$ durch Symbole wie

$$W_m\binom{s}{u},\quad V_m\binom{s}{u},\quad P_m\binom{s}{u} \tag{5}$$

bezeichnen. Bedeutet p eine Konstante, so besteht die Gleichung

$$W_m\binom{s}{pu} = p^m W_m\binom{s}{u}. \tag{6}$$

Ersetzt man $u(s)$ durch 1, so ergibt sich

$$W_m\binom{s}{p} = p^m W_m\binom{s}{1}. \tag{7}$$

Durch die Symbole

$$|W|_m\binom{s}{u},\quad |V|_m\binom{s}{u},\quad |P|_m\binom{s}{u} \tag{8}$$

bezeichnen wir dann diejenigen Integralpotenzformen, welche aus den Formen (5) hervorgehen, wenn sämtliche Koeffizientenfunktionen durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden. Ferner sollen durch die Symbole

$$\begin{gathered} \tilde{u},\ \tilde{v},\ \tilde{w},\ \cdots,\ (\widetilde{u+w}),\ \cdots \\ \widetilde{W}_m,\ \widetilde{V}_m,\ \widetilde{P}_m,\ |\widetilde{W}|_m,\ |\widetilde{V}|_m,\ |\widetilde{P}|_m \end{gathered} \tag{9}$$

die Maxima der absoluten Beträge der stetigen Funktionen

$$\begin{gathered} u(s),\ v(s),\ w(s),\ \cdots,\ u(s)+w(s),\ \cdots \\ W_m\binom{s}{1},\ V_m\binom{s}{1},\ P_m\binom{s}{1},\quad |W|_m\binom{s}{1},\ |V|_m\binom{s}{1},\ |P|_m\binom{s}{1} \end{gathered}$$

für $a \leqq s \leqq b$ bezeichnet werden. Dann folgen bei Berücksichtigung von (7) die Relationen

$$\left|W_m\binom{s}{u}\right| \leqq |W|_m\binom{s}{|u|} \leqq |W|_m\binom{s}{\tilde{u}} = |W|_m\binom{s}{1}\tilde{u}^m \leqq |\widetilde{W}|_m \tilde{u}^m. \tag{10}$$

Unter einer *regulär* konvergenten *Integralpotenzreihe* $\mathfrak{P}\binom{s}{u}$ der Argumentfunktion $u(s)$ verstehen wir eine Reihe von der Form

$$W_0(s) + W_1\binom{s}{u} + W_2\binom{s}{u} + \cdots + W_m\binom{s}{u} + \cdots \text{ ad inf.,} \tag{11}$$

für welche

$$(12)\qquad \widetilde{W}\big|_0 + \big|\widetilde{W}\big|_1 \tilde{u} + \big|\widetilde{W}\big|_2 \tilde{u}^2 + \cdots + \big|\widetilde{W}\big|_m \tilde{u}^m + \cdots$$

konvergiert. Konvergiert also eine Integralpotenzreihe regulär für eine bestimmte Funktion $u(s)$, so konvergiert sie wegen (10) auch *absolut* und *gleichmäßig* und stellt mithin eine *stetige* Funktion von s dar. Sie konvergiert ferner regulär für jede andere Argumentfunktion, deren absoluter Betrag ein kleineres Maximum hat.

Ebenso folgt leicht: Die Summe und das Produkt zweier regulär konvergenten Integralpotenzreihen einer Argumentfunktion geben wieder regulär konvergente Integralpotenzreihen.

§ 2.

Die Integralpotenzreihe mehrerer Argumentfunktionen.

Unter einem *Integralpotenzglied* der beiden für $a \leqq s \leqq b$ definierten stetigen Argumentfunktionen $u(s)$ und $v(s)$ von m^{tem} Grade in $u(s)$ und von n^{tem} in $v(s)$ verstehen wir einen Ausdruck von der Form

$$(13)\qquad u(s)^{\alpha_0} v(s)^{\beta_0} \int_a^b\!\!\int_a^b \!\cdots\! \int_a^b K(s, t_1, t_2, \cdots, t_\varrho)\, u(t_1)^{\alpha_1} v(t_1)^{\beta_1} u(t_2)^{\alpha_2} v(t_2)^{\beta_2} \cdots$$
$$\cdots u(t_\varrho)^{\alpha_\varrho} v(t_\varrho)^{\beta_\varrho}\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_\varrho,$$

wo die reelle oder komplexe Koeffizientenfunktion K eine stetige Funktion ihrer Argumente ist, und $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_\varrho, \beta_\varrho$ eine *beliebige* Anzahl von Paaren nicht negativer ganzer Zahlen bedeuten, welche den Bedingungen genügen

$$(14)\qquad \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = m \\ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\varrho = n \\ \alpha_1 + \beta_1 \geqq 1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geqq 1 \\ \quad\vdots \\ \alpha_\varrho + \beta_\varrho \geqq 1. \end{cases}$$

So soll auch der Ausdruck

$$K(s)\, u(s)^m\, v(s)^n,$$

wo die Koeffizientenfunktion $K(s)$ für $a \leqq s \leqq b$ stetig definiert ist, als ein Integralpotenzglied m^{ten} Grades in $u(s)$ und n^{ten} in $v(s)$ aufgefaßt werden. Wie im vorigen Paragraphen kann man als durch Vertauschung der Integrationsbuchstaben erreicht voraussetzen, daß

$$(15)\qquad \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \cdots \geqq \alpha_\varrho$$

ist, und daß, wenn $\alpha_\mu = \alpha_\nu$ und $\nu > \mu$ ist, $\beta_\mu \geqq \beta_\nu$ ist.

Wir bezeichnen zwei Integralpotenzglieder der beiden Argumentfunktionen $u(s)$ und $v(s)$ als von gleichem Typus, wenn die Exponenten $\alpha_0\beta_0, \alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_\varrho\beta_\varrho$ in beiden übereinstimmen. Die Anzahl aller Typen von m^{tem} Grade in $u(s)$ und n^{tem} Grade in $v(s)$ ist dann endlich.

Unter einer *Integralpotenzform* der Argumentfunktionen $u(s)$ und $v(s)$ von m^{tem} Grade in $u(s)$ und n^{tem} Grade in $v(s)$ verstehen wir die Summe einer endlichen Anzahl von Integralpotenzgliedern von m^{tem} Grade in $u(s)$ und n^{tem} Grade in $v(s)$, welche wir alle als von verschiedenem Typus voraussetzen dürfen, da Glieder von gleichem Typus durch Addition der Koeffizientenfunktionen in eines zusammengezogen werden können.

Die Summe zweier Integralpotenzformen, deren jede in $u(s)$ von m^{tem} und in $v(s)$ von n^{tem} Grade ist, gibt wieder eine solche. Das Produkt einer Integralpotenzform m^{ten} Grades in $u(s)$ und n^{ten} Grades in $v(s)$ mit einer Integralpotenzform m'^{ten} Grades in $u(s)$ und n'^{ten} Grades in $v(s)$ gibt eine Integralpotenzform $m+m'^{\text{ten}}$ Grades in $u(s)$ und $n+n'^{\text{ten}}$ Grades in $v(s)$.

Wir bezeichnen Integralpotenzformen von m^{tem} Grade in $u(s)$ und von n^{tem} Grade in $v(s)$ durch Symbole wie

$$(16) \qquad W_{mn}\binom{s}{u\ v}, \quad V_{mn}\binom{s}{u\ v}, \quad P_{mn}\binom{s}{u\ v}.$$

Bedeuten p und q Konstante, so bestehen die Gleichungen

$$(17) \qquad W_{mn}\binom{s}{pu\ \ qv} = p^m q^n W_{mn}\binom{s}{u\ v}.$$

Ersetzt man hier $u(s)$ und $v(s)$ durch 1, so ergibt sich

$$(18) \qquad W_{mn}\binom{s}{p\ q} = p^m q^n W_{mn}\binom{s}{1\ 1}.$$

Wir bezeichnen ferner wie im vorigen Paragraphen durch die Symbole

$$(19) \qquad |W|_{mn}\binom{s}{u\ v}, \quad |V|_{mn}\binom{s}{u\ v}, \quad |P|_{mn}\binom{s}{u\ v}$$

diejenigen Integralpotenzformen, welche aus den Formen (16) hervorgehen, wenn sämtliche Koeffizientenfunktionen durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden, und durch die Symhole

$$(20) \qquad \widetilde{W}_{mn}, \ \widetilde{V}_{mn}, \ \widetilde{P}_{mn}, \ |\widetilde{W}|_{mn}, \ |\widetilde{V}|_{mn}, \ |\widetilde{P}|_{mn}$$

die Maxima der absoluten Beträge der stetigen Funktionen

$$W_{mn}\binom{s}{1\ 1}, \ V_{mn}\binom{s}{1\ 1}, \ P_{mn}\binom{s}{1\ 1}, \ |W|_{mn}\binom{s}{1\ 1}, \ |V|_{mn}\binom{s}{1\ 1}, \ |P|_{mn}\binom{s}{1\ 1}.$$

Bei Berücksichtigung von (18) ergeben sich dann die Relationen

$$(21) \quad \left|W_{mn}\binom{s}{u\ v}\right| \leqq |W|_{mn}\binom{s}{|u|\ |v|} \leqq |W|_{mn}\binom{s}{\tilde u\ \tilde v} = |W|_{mn}\binom{s}{1\ 1}\tilde u^m \tilde v^n \leqq |\widetilde{W}|_{mn}\, \tilde u^m \tilde v^n.$$

Unter einer regulär konvergenten *Integralpotenzreihe* der beiden Argumentfunktionen $u(s)$ und $v(s)$

$$\mathfrak{P}\binom{s}{u\ v}$$

verstehen wir eine Reihe von der Form

$$(22)\qquad \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} W_{mn}\binom{s}{u\ v},$$

für welche

$$(23)\qquad \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} |\widetilde{W}|_{mn}\,\tilde{u}^m\,\tilde{v}^n$$

konvergiert. Wenn daher eine Integralpotenzreihe zweier Argumentfunktionen $u(s)$ und $v(s)$ regulär konvergiert, so konvergiert sie wegen (21) auch absolut und gleichmäßig und stellt mithin eine stetige Funktion von s dar; sie konvergiert ferner auch regulär für jedes andere Paar von Argumentfunktionen, deren absolute Beträge bezüglich kleinere Maxima haben.

Aus dem Vorstehenden ist leicht ersichtlich, wie die Integralpotenzform und die regulär konvergente Integralpotenzreihe einer beliebigen endlichen Anzahl von Argumentfunktionen zu definieren sind. Ebenso folgt leicht, daß die Summe und das Produkt zweier regulär konvergenten Integralpotenzreihen mehrerer Argumentfunktionen wieder solche geben.

§ 3.

Integralpotenzreihen von Integralpotenzreihen.

Aus den Sätzen des vorigen Paragraphen ergibt sich ohne Schwierigkeit: Es sei

$$(24)\qquad W(s) = W_0(s) + W_1\binom{s}{u} + W_2\binom{s}{u} + \cdots + W_m\binom{s}{u} + \cdots,$$

wo die Integralpotenzreihe rechts für $\tilde{u} \leqq h$ regulär konvergiere. Es sei ferner

$$(25)\qquad u(s) = V_1\binom{s}{v} + V_2\binom{s}{v} + \cdots + V_m\binom{s}{v} + \cdots,$$

wo in der letzten Integralpotenzreihe das Glied 0^{ten} Grades $V_0(s)$ als identisch verschwindend vorausgesetzt wird. Dann konvergiert die Integralpotenzreihe der Argumentfunktion $v(s)$, welche sich durch Einführung von (25) in (24) *formal* ergibt, regulär und stellt $W(s)$ dar, sobald (25) regulär konvergiert und

$$|\widetilde{V}|_1\,\tilde{v} + |\widetilde{V}|_2\,\tilde{v}^2 + \cdots + |\widetilde{V}|_m\,\tilde{v}^m + \cdots \leqq h$$

ist.

Dieses Theorem gilt auch für Integralpotenzreihen mehrerer Argumentfunktionen. Wenn z. B. die Argumentfunktionen einer Integralpotenzreihe zweier Argumentfunktionen durch Integralpotenzreihen dreier Argumentfunktionen ersetzt werden, so lautet das Theorem: Es sei

$$H(s) = \mathfrak{P}\binom{s}{u\,v}, \tag{26}$$

wo die Integralpotenzreihe rechts für $\tilde{u} \leqq h$, $\tilde{v} \leqq k$ regulär konvergiere. Es sei ferner

$$u(s) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} W_{mnp}\binom{s}{w_1\,w_2\,w_3}, \tag{27}$$

$$v(s) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} V_{mnp}\binom{s}{w_1\,w_2\,w_3}, \tag{28}$$

wo in den Integralpotenzreihen (27) und (28) die Glieder 0^{ten} Grades in w_1, w_2 und w_3 $W_{000}(s)$, $V_{000}(s)$ als identisch verschwindend vorausgesetzt werden. Dann konvergiert die Integralpotenzreihe der Argumentfunktionen $w_1(s)$, $w_2(s)$, $w_3(s)$, welche sich durch Einführung von (27) und (28) in (26) *formal* ergibt, regulär und stellt $H(s)$ dar, sobald (27) und (28) regulär konvergieren und

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} |\widetilde{W}|_{mnp}\, \tilde{w}_1^m\, \tilde{w}_2^n\, \tilde{w}_3^p \leqq h,$$

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} |\widetilde{V}|_{mnp}\, \tilde{w}_1^m\, \tilde{w}_2^n\, \tilde{w}_3^p \leqq k$$

ist.

§ 4.

Umkehrung der Integralpotenzreihe.

Es sei für $a \leqq s \leqq b$ eine Integralpotenzreihe

$$\mathfrak{P}\binom{s}{u\,v} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} W_{mn}\binom{s}{u\,v} \tag{29}$$

gegeben, welche für

$$\tilde{u} < h, \quad \tilde{v} < k \tag{30}$$

regulär konvergiere. Es sei ferner das Glied 0^{ten} Grades $W_{00}(s) = 0$, so daß also identisch in s die Gleichung

$$\mathfrak{P}\binom{s}{0\,0} = 0 \tag{31}$$

bestehe.

Wir stellen uns das Problem, bei gegebener Funktion $v(s)$ die Funktion $u(s)$ so zu bestimmen, daß identisch in s die Gleichung

$$\mathfrak{P}\binom{s}{u\,v} = 0 \tag{32}$$

erfüllt wird.

Wie beim Umkehrungsproblem gewöhnlicher Potenzreihen haben wir zunächst die Form 1^{ten} Grades in $u(s)$ und 0^{ten} Grades in $v(s)$

$$W_{10}\binom{s}{u\,v} = A(s)\,u(s) + \int_a^b B(s,t)\,u(t)\,dt \tag{33}$$

zu betrachten. Wir machen nun die Voraussetzung, daß der absolute Betrag der Koeffizientenfunktion $A(s)$ für das ganze Definitionsintervall $a \leqq s \leqq b$ größer als eine von Null verschiedene positive Konstante ist. Dann können wir durch Division der Integralpotenzreihe durch diese Koeffizientenfunktion bewirken, daß in der resultierenden Integralpotenzreihe die betreffende Koeffizientenfunktion gleich 1 wird. Diese Voraussetzung entspricht bei den nachfolgenden Anwendungen auf Differentialgleichungen der Annahme, daß die Lösungen in der Umgebung regulärer Stellen der in der Differentialgleichung explizite vorkommenden Koeffizienten behandelt werden. Unter dieser Voraussetzung dürfen wir also ohne die Allgemeinheit einzuschränken annehmen, daß

$$W_{10}\binom{s}{u\,v} = u(s) - \int_a^b C(s,t)\,u(t)\,dt \tag{34}$$

ist.

Wie bei den Fundamentaltheoremen über die Funktionaldeterminante und die Existenz impliziter Funktionen hat man hier zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

1. Fall: Es gebe keine von Null verschiedene stetige Funktion $\varphi(s)$, so daß für $a \leqq s \leqq b$

$$\varphi(s) - \int_a^b C(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{35}$$

ist, oder mit anderen Worten: der Kern $C(s,t)$ habe keine Nulllösung.*) Dieser Fall entspricht dem Fall der nicht verschwindenden Funktionaldeterminante d. h. dem Fall, wo das lineare homogene Gleichungssystem, dessen Koeffizienten die Funktionaldeterminante bilden, keine von Null verschiedene Lösung hat.

*) Siehe die letzten Sätze der Einleitung.

2. Fall: Der Kern habe Nulllösungen d. h. die Gleichung (35) lasse von Null verschiedene Lösungen zu. Dieser Fall entspricht dem Fall der verschwindenden Funktionaldeterminante.

In beiden Fällen läßt sich unser Problem der Auflösung der Funktionalgleichung (32) erledigen. Im ersten Fall ist die Lösung eindeutig; im zweiten gibt es, wie die Analogie vermuten läßt, in der Tat *funktionale* Verzweigungen, für welche wir die den Puiseuxschen Sätzen entsprechenden entwickeln werden.

§ 5.

Der Fall der eindeutigen Lösbarkeit.

Wir wenden uns zur Behandlung des ersten Falles, d. h. wir machen also die Voraussetzung, daß die Gleichung (35) keine von Null verschiedene Lösung habe.

Dann lassen sich zwei positive Größen $h' \leqq h$ und $k' \leqq k$ so bestimmen, daß, wenn die stetigen Funktionen $u(s)$ und $v(s)$ den Beschränkungen

$$\tilde{u} \leqq h', \quad \tilde{v} \leqq k' \tag{36}$$

unterworfen werden, es zu jeder Funktion $v(s)$ eine und nur eine Funktion $u(s)$ gibt, welche unsere Gleichung (32) *erfüllt. Diese Lösung $u(s)$ läßt sich als regulär konvergente Integralpotenzreihe der Argumentfunktion $v(s)$ darstellen.*

Beweis: Unsere Gleichung (32) läßt sich schreiben

$$u(s) - \int_a^b C(s,t)\, u(t)\, dt = -W_{01}\binom{s}{u\; v} - \sum_{m+n \geqq 2} W_{mn}\binom{s}{u\; v}. \tag{37}$$

Da nun der Kern $C(s, t)$ gemäß Voraussetzung keine Nulllösung hat, so läßt sich nach dem Fredholmschen*) Fundamentaltheorem zu ihm ein *lösender* Kern $\Gamma(s, t)$ bestimmen. D. h. es läßt sich eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte stetige Funktion $\Gamma(s, t)$ konstruieren, so daß die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi(s) - \int_a^b C(s,t)\, \varphi(t)\, dt &= f(s) \\ f(s) + \int_a^b \Gamma(s,t)\, f(t)\, dt &= \varphi(s) \end{aligned}\right\} (a \leqq s \leqq b) \tag{38}$$

wechselseitig auseinander folgen. Durch Einführung des lösenden Kernes erhalten wir die mit der Gleichung (37) gleichbedeutende Gleichung

*) Siehe die Schlußsätze der Einleitung.

$$(39)\qquad u(s) = -W_{01}\binom{s}{u\,v} - \int\limits_a^b \Gamma(s,t)\, W_{01}\binom{t}{u\,v}\, dt$$
$$+ \sum_{m+n\geq 2}\left(-W_{mn}\binom{s}{u\,v} - \int\limits_a^b \Gamma(s,t)\, W_{mn}\binom{t}{u\,v}\, dt\right).$$

Wir setzen für alle Werte von m und n

$$(40)\qquad -W_{mn}\binom{s}{u\,v} - \int\limits_a^b \Gamma(s,t)\, W_{mn}\binom{t}{u\,v}\, dt = P_{mn}\binom{s}{u\,v}$$

und schreiben, um die Unabhängigkeit von $P_{01}\binom{s}{u\,v}$ von der Argumentfunktion $u(s)$ hervorzuheben, statt $P_{01}\binom{s}{u\,v}$ $P_1\binom{s}{v}$. Dann schreibt sich die Gleichung (39)

$$(41)\qquad u(s) = P_1\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geq 2} P_{mn}\binom{s}{u\,v},$$

wo die Integralpotenzreihe auf der rechten Seite ebenfalls regulär konvergiert, wenn die Ungleichungen (30) erfüllt sind.

Jetzt setzen wir

$$(42)\qquad V_1\binom{s}{v} = P_1\binom{s}{v}$$

und bestimmen für alle Werte von m $V_m\binom{s}{v}$, indem wir auf der rechten Seite der Gleichung (41) für $u(s)$ die Summe

$$(43)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} V_\nu\binom{s}{v}$$

einführen und nur die Integralpotenzglieder m^{ten} Grades in $v(s)$ beibehalten. Die so bestimmte Integralpotenzreihe

$$(44)\qquad u(s) = \sum_{m=1}^{m=\infty} V_m\binom{s}{v}$$

genügt *formal* der Gleichung (41) und mithin auch der Gleichung (32). Diese eben auseinandergesetzte Bildungsregel der Reihe (44) entspricht offenbar genau dem bekannten Auflösungsverfahren einer gewöhnlichen Gleichung von der Form

$$u = av + bu^2 + cuv + dv^2 + \cdots$$

nach u.

Wir wollen jetzt beweisen, daß es eine von Null verschiedene positive Konstante k_1 gibt, so daß für

$$(45)\qquad \tilde{v} \leqq k_1$$

die Reihe (44) regulär konvergiert, d. h. so, daß unter der Voraussetzung (45)

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} |\widetilde{V}|_m \tilde{v}^m \tag{46}$$

konvergiert.

Gehen wir statt von der Gleichung (41) von der Gleichung

$$u'(s) = |P|_1 \binom{s}{v} + \sum_{m+n \geq 2} |P|_{mn} \binom{s}{u' \; v} \tag{47}$$

aus, und entwickeln wir dann nach dem eben angegebenen Verfahren $u'(s)$ in die der Gleichung (47) *formal* genügende Integralpotenzreihe

$$u'(s) = \sum_{m=1}^{m=\infty} V'_m \binom{s}{v}, \tag{48}$$

so ist jede Koeffizientenfunktion dieser letzten Reihe *reell* und *nicht negativ* und dem absoluten Betrage nach nicht kleiner als die entsprechende Koeffizientenfunktion der zu untersuchenden Reihe (44). Mithin ist

$$\widetilde{V}'_m \geqq |\widetilde{V}|_m. \tag{49}$$

Ersetzen wir in der Reihe (48) $v(s)$ durch die Konstante q, so geht diese Reihe gemäß (7) in die Potenzreihe

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} V'_m \binom{s}{1} q^m \tag{50}$$

über. Diese Reihe, für $u'(s)$ eingeführt, genügt mithin *formal* der Gleichung

$$u'(s) = |P|_1 \binom{s}{1} q + \sum_{m+n > 2} |P|_{mn} \binom{s}{u' \; 1} q^n. \tag{51}$$

Man hat also

$$V_1' \binom{s}{1} = |P|_1 \binom{s}{1} \tag{52}$$

und um $V'_m \binom{s}{1}$ zu bestimmen, hat man auf der rechten Seite der Gleichung (51) für $u'(s)$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} V_\nu' \binom{s}{1} q^\nu \tag{53}$$

einzuführen und dann $V'_m \binom{s}{1}$ gleich dem Koeffizienten von q^m zu setzen.

Wir betrachten nun die Gleichung

$$p = |\widetilde{P}|_1 q + \sum_{m+n \geqq 2} |\widetilde{P}|_{mn} p^m q^n, \tag{54}$$

deren rechte Seite wegen der vorausgesetzten regulären Konvergenz der Reihe (29) für $p \leqq h$, $q \leqq k$ konvergiert. Gemäß dem bekannten Fundamentaltheorem über die Existenz impliziter Funktionen gibt es eine Potenzreihe

$$p = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m q^m, \tag{55}$$

welche die Gleichung (54) befriedigt und für $q \leqq k_1$ konvergiert, wo k_1 eine von Null verschiedene positive Konstante bedeutet. Der uns obliegende Konvergenzbeweis für die Reihe (46) ist also wegen der Ungleichungen (49) geliefert, wenn die Ungleichungen

$$\widetilde{V}'_m \leqq A_m \qquad (m = 1, 2, \cdots \text{ ad inf.}) \tag{56}$$

nachgewiesen werden. Aus (54), (55), (52) folgt nun

$$A_1 = |\widetilde{P}|_1 = \widetilde{V}'_1.$$

Wir haben also nur noch zu beweisen, daß aus den Ungleichungen

$$\widetilde{V}'_\nu \leqq A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots m-1) \tag{57}$$

die Ungleichung

$$\widetilde{V}'_m \leqq A_m \tag{58}$$

sich ergibt.

Aus dem oben angegebenen Verfahren, $V'_m\binom{s}{1}$ aus der Gleichung (51) zu bestimmen, folgt bei Berücksichtigung von (57), daß $V'_m\binom{s}{1}$ für keinen Wert von s größer ist, als der Koeffizient von q^m, den man erhält, indem man auf der rechten Seite der Gleichung (51) für $u'(s)$ statt der Summe (53) die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} A_\nu q^\nu = S_{m-1} \tag{59}$$

einführt. Aus den Gleichungen

$$|P|_{\mu\nu}\binom{s}{S_{m-1}\ 1} q^\nu = |P|_{\mu\nu}\binom{s}{1\ 1} S^\mu_{m-1} q^\nu, \tag{60}$$

$$|P|_{\mu\nu}\binom{s}{1\ 1} \leqq |\widetilde{P}|_{\mu\nu} \tag{61}$$

ergibt sich nun leicht, daß der Koeffizient von q^m nicht kleiner wird, wenn man die Summe (59) — statt auf der rechten Seite von (51) für $u'(s)$ — auf der rechten Seite von (54) für p einführt. Der so gebildete Koeffizient von q^m ist aber gleich A_m. Also ist für jeden Wert von s

$$A_m \geqq V'_m\binom{s}{1}$$

und mithin auch

$$A_m \geqq \widetilde{V}'_m$$

was zu beweisen war.

Die Reihe (44) konvergiert also für $\tilde{v} \leqq k_1$ regulär und genügt *formal* der Gleichung (32), deren rechte Seite für $\tilde{u} \leqq h$, $v \leqq k$ regulär konvergiert. Wählen wir nun die positive Größe k_2 so, daß

$$k_2 \leqq k_1, \quad k_2 \leqq k, \tag{62}$$

und daß

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} |\widetilde{V}|_m k_2^m \leqq h \tag{63}$$

ist, so stellt gemäß § 3 nach Einführung von (44) in (32) die *formale* Entwicklung der rechten Seite von (32) nach Integralpotenzgliedern von $v(s)$ den Wert der rechten Seite wirklich dar.

Die Reihe (44) ist also für

$$\tilde{v} \leqq k_2 \tag{64}$$

eine Lösung unserer Gleichung (32).

Jetzt wollen wir beweisen, *daß es eine positive Größe $h' \leqq h$ gibt, so daß, wenn die Ungleichungen*

$$\tilde{u} \leqq h', \quad \tilde{v} \leqq h' \tag{65}$$

bestehen, unsere Gleichung (32) *nicht mehr als eine einzige Lösung haben kann.*

Es seien $u(s)$ und $u(s) + w(s)$ zwei Lösungen unserer Gleichung. Dann wäre gemäß (41)

$$u(s) = P_1\binom{s}{v} + \sum_{m+n \geq 2} P_{mn}\binom{s}{u\ v}, \tag{66}$$

$$u(s) + w(s) = P_1\binom{s}{v} + \sum_{m+n>2} P_{mn}\binom{s}{u+w\ \ v}. \tag{67}$$

Denkt man sich auf der rechten Seite der Gleichung (67) jedes Integralpotenzglied nach Integralpotenzgliedern von $w(s)$ entwickelt, und subtrahiert man dann die Gleichung (66) von der Gleichung (67), so ist leicht ersichtlich, daß der absolute Betrag dieser Differenz den Ausdruck

$$\sum_{m+n\geqq 2} |P|_{mn}\binom{s}{1\ 1}[(\tilde{u}+\tilde{w})^m\tilde{v}^n - \tilde{u}^m\tilde{v}^n] \leqq \tilde{w}\sum_{m+n\geq 2} |\widetilde{P}|_{mn} m(\tilde{u}+\tilde{w})^{m-1}\tilde{v}^n \tag{68}$$

nicht überschreitet. Es ist also für jeden Wert von s

$$|w(s)| \leqq \tilde{w}\sum_{m+n>2} |\widetilde{P}|_{mn} m(\tilde{u}+\tilde{w})^{m-1}\tilde{v}^n, \tag{69}$$

wo die Reihe rechts wegen der regulären Konvergenz der Reihe (29) für $\tilde{u}+\tilde{w} \leqq h$, $\tilde{v} \leqq k$ als Differentialquotient einer konvergenten Potenzreihe konvergiert. Aus (69) folgt

$$\tilde{w} \leqq \tilde{w}\sum_{m+n\geq 2} m\,|\widetilde{P}|_{mn}(\tilde{u}+\tilde{w})^{m-1}\tilde{v}^n. \tag{70}$$

Wäre nun $w(s)$ nicht identisch gleich Null, also $\tilde{w}$ von Null verschieden, so würde hieraus sich ergeben

$$(71)\qquad 1 \leqq \sum_{m+n>2} m\,|\overline{P}|_{mn}(\tilde{u}+\tilde{w})^{m-1}\tilde{v}^{n}.$$

Da nun die Reihe rechts für $\tilde{u}+\tilde{w}=0$, $\tilde{v}=0$ verschwindet, so folgt leicht, daß es eine von Null verschiedene positive Konstante $h' \leqq h$ gibt, so daß die Gleichung (71) für $(\widetilde{u+w}) \leqq h'$, $\tilde{u} \leqq h'$, $\tilde{v} \leqq h'$ unmöglich ist, was zu beweisen war.

Wir haben also bewiesen, daß für $\tilde{v} \leqq k_2$ die Integralpotenzreihe (44) regulär konvergiert und eine Lösung der Gleichung (32) darstellt, und daß für $\tilde{u} \leqq h'$, $\tilde{v} \leqq h'$ die Gleichung (32) bei gegebenem $v(s)$ nur *eine einzige* Lösung haben kann. Jetzt bestimmen wir die positive Größe k' so, daß $k' \leqq k_2$, $k' \leqq h'$ ist, und daß für $\tilde{v} \leqq k'$ der Betrag der Reihe (44) h' nicht überschreitet. *Dann besteht das in den ersten Zeilen dieses Paragraphen ausgesprochene Theorem, dessen Beweis uns oblag.*

§ 6.

Verallgemeinerung des Falles der eindeutigen Lösbarkeit.

Ehe wir an die Behandlung des § 4 erwähnten zweiten Hauptfalles herantreten, wollen wir auf eine evidente Verallgemeinerung des im vorigen Paragraphen Auseinandergesetzten hinweisen. Es sei

$$(72)\qquad \mathfrak{P}\begin{pmatrix} & & s & \\ u & v_1 & v_2 & \cdots v_n\end{pmatrix}$$

eine für

$$(73)\qquad \tilde{u} \leqq h,\ \tilde{v}_1 \leqq k_1,\ \tilde{v}_2 \leqq k_2, \cdots, \tilde{v}_n \leqq k_n$$

regulär konvergente Integralpotenzreihe, und es bestehe die Gleichung

$$(74)\qquad \mathfrak{P}\begin{pmatrix} & & s & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0\end{pmatrix} = 0.$$

Wir suchen bei gegebenen stetigen Funktionen $v_1(s)$, $v_2(s)$, $\cdots$, $v_n(s)$ die stetige Funktion $u(s)$ so zu bestimmen, daß

$$(75)\qquad \mathfrak{P}\begin{pmatrix} & & s & \\ u & v_1 & v_2 & \cdots v_n\end{pmatrix} = 0 \qquad (a \leqq s \leqq b)$$

wird.

Wir machen zunächst wie in § 4 die Voraussetzung, daß der Koeffizient von $u(s)$ in unserer Integralpotenzreihe durch Division zu 1 gemacht werden kann. Dann erhält die Form 0^{ten} Grades in den Argumentfunktionen $v_1(s), v_2(s), \cdots, v_n(s)$ und 1^{ten} Grades in $u(s)$ die Gestalt

$$u(s) - \int_a^b C(s, t)\, u(t)\, dt.$$

Wenn nun der erste Hauptfall besteht, d. h. wenn der Kern $C(s, t)$ keine Nulllösung hat, so gibt es positive Konstanten

$$h' \leqq h,\ k_1' \leqq k_1,\ k_2' \leqq k_2, \cdots, k_n' \leqq k_n,$$

so daß unter den Einschränkungen

$$(76) \qquad \tilde{u} \leqq h',\ \tilde{v}_1 \leqq k_1',\ \tilde{v}_2 \leqq k_2', \cdots, \tilde{v}_n \leqq k_n'$$

es zu jedem Funktionensystem $v_1(s)$, $v_2(s)$, $\cdots$, $v_n(s)$ eine und nur eine stetige Funktion $u(s)$ gibt, welche unsere Gleichung (75) erfüllt. Diese Lösung läßt sich als eine regulär konvergente Integralpotenzreihe der Argumentfunktionen $v_1(s)$, $v_2(s)$, $\cdots$, $v_n(s)$ darstellen.

Der Beweis dieses Theorems ist völlig derselbe wie der § 5 geführte. Das Theorem bleibt natürlich bestehen, wenn die Funktionen $v_1(s)$, $v_2(s)$, $\cdots$, $v_n(s)$ teilweise oder sämtlich sich zu Konstanten spezialisieren, welche dann als Parameter aufgefaßt werden können. *Es ist also auch der Fall erledigt, wo die Integralpotenzreihe nach Potenzen einer Anzahl von Parametern so entwickelt ist, daß die Konvergenz im Sinne des § 2 eine reguläre ist.*

§ 7.

Transformation des Kernes.*)

Wir gehen jetzt zur Behandlung des in § 4 erwähnten zweiten Hauptfalles über. Die Gleichung

$$(35) \qquad \varphi(s) - \int_a^b C(s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

lasse also von Null verschiedene Lösungen zu. Nach dem Fundamentaltheorem von Fredholm**) sind die Anzahlen der linear unabhängigen Lösungen der Gleichungen (35) und der Gleichung

$$(77) \qquad \psi(t) - \int_a^b C(s, t)\, \psi(s)\, ds = 0$$

stets endlich und dieselben. Jede nicht identisch verschwindende Lösung

*) Bis auf unwesentliche Änderungen stimmt dieser Paragraph mit § 6 vom II. Teil, Math. Ann. Bd. 64 überein. Vergl. auch die diesbezüglichen Untersuchungen von Plemelj „Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung", Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. XV.

**) Siehe die Schlußsätze der Einleitung.

der Gleichung (35) heißt eine Nulllösung in s des Kernes $C(s, t)$, und jede nicht identisch verschwindende Lösung der Gleichung (77) eine Nulllösung in t. Es mögen nun

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots,\ \varphi_n(s),$$
$$\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \cdots,\ \psi_n(t)$$

vollständige Systeme linear unabhängiger Nulllösungen in s und t bilden, so daß alle Lösungen der Gleichung (35), d. h. alle Nulllösungen in s, in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\nu \varphi_\nu(s), \tag{78}$$

und alle Lösungen der Gleichungen (77), d. h. alle Nulllösungen in t, in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\nu \psi_\nu(t) \tag{79}$$

darstellbar sind, wo die c_ν willkürliche Konstanten bedeuten. Wir setzen

$$E(s, t) = C(s, t) + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_\nu(s)\, q_\nu(t), \tag{80}$$

wo die $p_\nu(s)$ und $q_\nu(t)$ reelle oder komplexe stetige Funktionen bedeuten. Ferner setze man

$$A_{\mu\nu} = \int_a^b \psi_\mu(r)\, p_\nu(r)\, dr, \tag{81}$$

$$B_{\mu\nu} = \int_a^b \varphi_\mu(r)\, q_\nu(r)\, dr. \tag{82}$$

I. *Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der neue Kern $E(s, t)$ keine Nulllösung mehr hat, darin, daß keine der beiden n-reihigen Determinanten $|A_{\mu\nu}|$ und $|B_{\mu\nu}|$ verschwindet.*

Dem Beweise dieses Kriteriums schicken wir noch eine zweite Formulierung voraus: Aus (78), (82) ergibt sich, daß das Nichtverschwinden der Determinante $|B_{\mu\nu}|$ damit gleichbedeutend ist, daß der Kern $C(s, t)$ keine zu allen q_ν orthogonale Nulllösung in s hat. Ebenso ergibt sich aus (79), (81), daß das Nichtverschwinden der Determinante $|A_{\mu\nu}|$ damit gleichbedeutend ist, daß der Kern keine zu allen p_ν orthogonale Nulllösung in t hat. Wir können also unser Kriterium I noch in folgender Form aussprechen:

II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Kern $E(s, t)$ keine Nulllösung mehr hat, besteht darin, daß der Kern $C(s, t)$ weder* *eine zu allen* q_ν *orthogonale Nulllösung in s noch eine zu allen* p_ν *orthogonale Nulllösung in t hat.*

Beweis: Die Notwendigkeit unserer Bedingung folgt unmittelbar aus ihrer zweiten Formulierung. Denn gäbe es z. B. eine zu allen p_ν orthogonale Nulllösung in t des Kernes $C(s,t)$, so wäre sie, wie die Verifikation in die Augen springen läßt, auch eine Nulllösung in t des Kernes $E(s,t)$.

Es ist also nur noch zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist, d. h. daß ihr Erfülltsein Nulllösungen von $E(s,t)$ ausschließt. Nehmen wir also an, der Kern $E(s,t)$ habe eine Nulllösung in s, $\varphi(s)$.

$$0 = \varphi(s) - \int_a^b E(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$$\varphi(s) - \int_a^b C(s,t)\,\varphi(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_\nu(s) \int_a^b q_\nu(t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{83}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\psi_\mu(s)\,ds$ und integriert von a bis b, so verschwindet die linke Seite. Man erhält also die Gleichungen

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_{\mu\nu} \int_a^b q_\nu(t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n).$$

Hieraus folgen wegen des vorausgesetzten Nichtverschwindens der Determinante $|A_{\mu\nu}|$ die Gleichungen

$$\int_a^b q_\nu(t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n). \tag{84}$$

Es müßte also wegen (83), (84) $\varphi(s)$ auch von $C(s,t)$ eine Nulllösung in s sein, welche wegen (84) zu allen q_ν orthogonal wäre, in Widerspruch zur zweiten Formulierung unserer Bedingung. q. e. d.

Setzen wir nun

$$p_\mu = \overline{\psi}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n), \tag{85}$$

$$q_\mu = \overline{\varphi}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n), \tag{80}$$

wo das Überstreichen wie gewöhnlich den Übergang zur konjugiert komplexen Größe bezeichnet, so ist unser Kriterium, wie die Formulierung II zeigt, erfüllt. Denn wäre z. B. $\chi(t)$ eine zu allen p_ν orthogonale Nulllösung in t von $C(s,t)$, so müßte auch $\chi(t)$ zu allen Funktionen von der Form $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \bar{c}_\nu p_\nu$ orthogonal sein, wo die c_ν beliebige Konstanten bedeuten. Wegen (85) und (79) sind aber in dieser Form die konjugierten Funktionen zu allen Nulllösungen in t des Kernes $C(s, t)$ darstellbar, also auch $\overline{\chi}(t)$. Es müßte $\chi(t)$ also zu $\overline{\chi}(t)$ orthogonal sein, was unmöglich ist.

Wenn also die vollständigen Systeme linear unabhängiger Nulllösungen in s und in t des Kernes $C(s, t)$ von der Anzahl n sind, so läßt sich dieser Kern durch Hinzufügung von n Produkten einer stetigen Funktion von s mit einer stetigen Funktion von t in einen solchen Kern transformieren, der keine Nulllösungen mehr hat. Durch Hinzufügung von weniger als n solchen Produkten kann dies nicht erreicht werden, denn diesen Fall erhält man bei der spezialisierenden Voraussetzung, daß einige der n Funktionen p_ν identisch gleich Null sein müssen. Dann aber verschwindet die Determinante $|A_{\mu\nu}|$.

§ 8.

Die Verzweigung bei einer einfachen Nulllösung.

Wir machen in diesem Paragraphen die Voraussetzung, daß die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (35) und mithin auch der Gleichung (77) gleich 1 ist. Die Gesamtheit aller Nulllösungen in s des Kernes $C(s, t)$ ist also in der Formel

$$c_1 \varphi_1(s) \tag{87}$$

enthalten und die Gesamtheit aller Nulllösungen in t in der Formel

$$c_1 \psi_1(t), \tag{88}$$

wo c_1 eine willkürliche Konstante bedeutet. Bezeichnen nun $p_1(s)$ und $q_1(t)$ zwei so gewählte stetige Funktionen, daß

$$\int_a^b \psi_1(r)\, p_1(r)\, dr \neq 0, \tag{89}$$

$$\int_a^b \varphi_1(r)\, q_1(r)\, dr \neq 0 \tag{90}$$

ist, und setzt man

$$E(s, t) = C(s, t) + p_1(s)\, q_1(t), \tag{91}$$

so hat gemäß dem Theorem des vorigen Paragraphen der neue Kern $E(s, t)$ keine Nulllösung mehr, und es läßt sich daher zu $E(s, t)$ ein lösender Kern $\mathsf{E}(s, t)$ bestimmen. Unsere Gleichung (32)

$$0 = \mathfrak{P}\binom{s}{u\,v} = u(s) - \int_a^b C(s, t)\, u(t)\, dt + W_{01}\binom{s}{u\,v} + \sum_{m+n\geq 2} W_{mn}\binom{s}{u\,v}$$

läßt sich dann schreiben

$$u(s) - \int_a^b E(s,t)\, u(t)\, dt = -p_1(s) \int_a^b q_1(t)\, u(t)\, dt - W_{01}\binom{s}{u\,v} - \sum_{m+n\geq 2} W_{mn}\binom{s}{u\,v}. \tag{92}$$

Führt man den lösenden Kern $\mathsf{E}(s, t)$ gemäß den Formeln (38) ein, so ergibt sich, wenn, ähnlich wie § 5 (40),

$$(93)\qquad -W_{mn}\binom{s}{u\,v} - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\,W_{mn}\binom{t}{u\,v}\,dt = P_{mn}\binom{s}{u\,v}$$

gesetzt wird, und für die von $u(s)$ unabhängige Form $P_{01}\binom{s}{u\,v}$ wieder $P_1\binom{s}{v}$ geschrieben wird,

$$(94)\quad u(s) = \left[-p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)p_1(t)\,dt\right]\int_a^b q_1(t)\,u(t)\,dt + P_1\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geqq 2} P_{mn}\binom{s}{u\,v}.$$

Diese letzte Gleichung ist gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$(95)\quad u(s) = \left[-p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\,p_1(t)\,dt\right]x + P_1\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geqq 2} P_{mn}\binom{s}{u\,v},$$

$$(96)\qquad x = \int_a^b q_1(t)\,u(t)\,dt.$$

Die Gleichung (95) können wir gemäß dem Schlußsatz von § 6 nach $u(s)$ auflösen, indem wir x als Parameter betrachten. Wir erhalten, wenn die Ungleichungen

$$(97)\qquad \tilde{v} \leqq k_1,$$

$$(98)\qquad \tilde{u} \leqq h_1,$$

$$(99)\qquad |x| \leqq l_1$$

gefordert werden, wo $k_1 \leqq k$, $h_1 \leqq h$ und l_1 geeignet gewählte positive Konstanten bedeuten, eine eindeutig bestimmte Lösung

$$(100)\qquad u(s) = \sum_{m+n\geqq 1} x^m\,V_n^m\binom{s}{v}.$$

Hierbei bedeutet $V_n^m\binom{s}{v}$ eine Integralpotenzform n^{ten} Grades in $v(s)$, und die Reihe (100), als Integralpotenzreihe von $v(s)$ und x betrachtet, konvergiert regulär und daher auch absolut und gleichmäßig. Führen wir (100) in (96) ein, so ergibt sich

$$(101)\qquad x = \sum_{m+n\geqq 1} x^m \int_a^b q_1(t)\,V_n^m\binom{t}{v}\,dt.$$

Setzen wir

$$(102)\qquad \int_a^b q_1(t)\,V_0^m\binom{t}{v}\,dt = L_m, \qquad (m = 1, 2, \cdots \text{ ad inf.})$$

so sind die Konstanten $L_1, L_2, \cdots, L_n, \cdots$ von $v(s)$ unabhängig, und unsere Gleichung (101) nimmt die Gestalt an

$$x = \sum_{m=1}^{m=\infty} L_m x^m + \sum_{m=0}^{m=\infty} x^m \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b q_1(t) V_n^m \binom{t}{v} dt, \tag{102}$$

wo die zweite Summe als eine regulär konvergente, mit identisch verschwindenden $v(s)$ verschwindende Integralpotenzreihe von $v(s)$ und x betrachtet werden kann. Jetzt wollen wir beweisen, daß

$$L_1 = 1 \tag{103}$$

ist.

Gemäß (102) ist

$$L_1 = \int_a^b q_1(t) V_0^1 \binom{t}{v} dt \tag{104}$$

und gemäß (95) und (100) ist

$$V_0^1 \binom{s}{v} = -p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s, t) p_1(t) dt. \tag{105}$$

Nun ist, wenn $\varphi_1(s)$ wie in der Formel (87) eine Nulllösung in s von $C(s, t)$ bedeutet,

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_1(s) - \int_a^b C(s,t) \varphi_1(t) dt = \varphi_1(s) - \int_a^b E(s,t) \varphi_1(t) dt \\ + p_1(s) \int_a^b q_1(t) \varphi_1(t) dt. \end{aligned} \tag{106}$$

Führt man hier gemäß (38) den lösenden Kern $\mathsf{E}(s, t)$ ein, so ergibt sich

$$\varphi_1(s) = \left[-p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t) p_1(t) dt\right] \int_a^b q_1(t) \varphi_1(t) dt = V_0^1 \binom{s}{v} \int_a^b q_1(t) \varphi_1(t) dt.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $q_1(s) ds$ und integriert von a bis b, so erhält man bei Berücksichtigung von (104)

$$\int_a^b q_1(s) \varphi_1(s) ds = L_1 \int_a^b q_1(t) \varphi_1(t) dt,$$

und hieraus ergibt sich wegen (90) die zu beweisende Gleichung (103).

Unsere Gleichung (102) ist also von der Form

$$0 = \sum_{m=2}^{m=\infty} L_m x^m + \sum_{m=0}^{m=\infty} x^m \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^m \binom{t}{v} q_1(t) dt, \tag{107}$$

wo die zweite Summe bei identisch verschwindendem $v(s)$ verschwindet.

Wir erhalten also bei gegebenem $v(s)$ alle ihrer Größe nach durch die Ungleichungen (97), (98), (99) *beschränkten Lösungen $u(s)$ unserer Gleichung* (32), *indem wir die Gleichung* (107), *deren Koeffizienten dann gegebene Konstanten sind, nach x auflösen; jede Wurzel dieser Gleichung, deren absoluter Betrag l_1 nicht überschreitet, liefert, in* (100) *eingeführt, eine Lösung unseres Problems.*

Die Gleichung (107) soll die *Verzweigungsgleichung* unseres Problems heißen.

§ 9.

Diskussion der Verzweigungsgleichung.

Wir wollen zunächst den allgemeinen Fall betrachten, wo

$$L_2 \neq 0 \tag{108}$$

ist. Wir setzen

$$S_1 = \sum_{m=2}^{m=\infty} L_m x^m, \tag{109}$$

$$S_2 = \sum_{m=0}^{m=\infty} x^m \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^m \binom{t}{v} q_1(t)\, dt. \tag{110}$$

Dann läßt sich eine positive Größe $l_2 \leqq l_1$ so bestimmen, daß für

$$0 \leqq |x| \leqq l_2 \tag{111}$$

$$S_1 \neq 0 \tag{112}$$

ist. Es bezeichne σ_1 das Minimum von $|S_1|$ für $|x| = l_2$. Wegen der regulären Konvergenz von S_2 läßt sich dann eine von Null verschiedene positive Konstante $k_2 \leqq k_1$ so klein wählen, daß für $|x| = l_2$, $\tilde{v} \leqq k_2$

$$|S_2| \leqq \alpha \cdot \sigma_1 \tag{113}$$

bleibt, wo α einen echten Bruch bezeichnet.

Es sei nun

$$\tilde{v} \leqq k_2. \tag{114}$$

Die Anzahl der dem Betrage nach l_2 nicht überschreitenden Lösungen der Verzweigungsgleichung wird dann durch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial x}}{S_1 + S_2}\, dx \tag{115}$$

gegeben, welches im positiven Sinn über den Kreis $|x| = l_2$ zu erstrecken ist. Um den Wert dieses Integrals zu ermitteln, betrachte man das über denselben Integrationsweg zu erstreckende Integral

$$(116)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\frac{\partial S_1}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial S_2}{\partial x}}{S_1+\vartheta S_2},$$

welches wegen (113) eine für

$$0<\vartheta\leqq 1$$

stetige Funktion von ϑ darstellt. Da dieses Integral die Anzahl der dem Betrage nach l_2 nicht überschreitenden Lösungen der Gleichung

$$S_1+\vartheta S_2=0$$

angibt, so muß es für jeden Wert von ϑ gleich einer ganzen Zahl sein, welche sich wegen der Stetigkeit des Integrals als Funktion von ϑ für $0\leqq\vartheta\leqq 1$ nicht ändern kann. Mithin ist der Wert des Integrals (116) für $\vartheta=1$, d. h. der zu ermittelnde Wert des Integrals (115), gleich dem Wert des Integrals (116) für $\vartheta=0$, also wegen (108) gleich 2.

Die Verzweigungsgleichung hat daher für $\tilde{v}\leqq k_2$ *zwei* dem Betrage nach l_2 nicht überschreitende Lösungen. Führt man diese in (100) ein, so erhält man *zwei* Lösungen unserer zu untersuchenden Gleichung (32). Die Möglichkeit, daß unter weiteren speziellen Voraussetzungen, die sich aus der Verzweigungsgleichung leicht angeben lassen, diese beiden Lösungen zusammenfallen, ist hierbei natürlich nicht ausgeschlossen.

Berücksichtigen wir die Gleichungen (96, 97, 98, 99), so können wir das bisher Erreichte in folgender Weise zusammenfassen: Ist $L_2\neq 0$, so hat unsere Gleichung (32) unter den Beschränkungen

$$(114)\qquad \tilde{v}\leqq k_2,$$

$$(117)\qquad \tilde{u}\leqq h_1,$$

$$(118)\qquad \int_a^b q_1(t)\,u(t)\,dt\leqq l_2$$

bei gegebener Funktion $v(s)$ zwei und nur zwei Lösungen.

Die durch die Ungleichung (118) ausgedrückte beschränkende Voraussetzung ist aber dem gestellten Problem nicht naturgemäß, und wir wollen uns daher jetzt von ihr befreien.

Aus (112) folgt leicht, daß man eine positive Größe $k'\leqq k_2$ so bestimmen kann, daß die beiden ihrem Betrage nach l_2 nicht überschreitenden Lösungen der Verzweigungsgleichung für $\tilde{v}\leqq k'$ ihrem Betrage nach unter eine beliebig kleine vorgeschriebene Schranke fallen. Da nun die gesuchten Funktionen $u(s)$ durch die Reihe (100) geliefert werden, indem in ihr für x die Lösungen der Verzweigungsgleichung eingeführt werden, so folgt, daß es zu jeder positiven Größe $h' \leqq h_1$ eine positive Größe $k' \leqq k_2$ gibt, so daß für $\tilde{v} \leqq k'$ die beiden den Beschränkungen (117), (118) unterworfenen Lösungen $u(s)$ unserer Gleichung (32) der Ungleichung

$$\tilde{u} \leqq h'$$

genügen. Es gibt also zu jeder positiven Größe $h' \leqq h_1$ eine positive Größe $k' \leqq k_2$, so daß das oben zusammengefaßte Theorem gültig bleibt, wenn man die dort voraus gesetzten Ungleichungen (114), (117), (118) durch die Ungleichungen

$$\tilde{v} \leqq k', \tag{119}$$

$$\tilde{u} < h', \tag{120}$$

$$\int_a^b q_1(t)\, u(t) \leqq l_2 \tag{121}$$

ersetzt. Nun wählen wir das positive h' so klein, daß

$$h' \leqq h_1 \quad \text{und} \quad h' \int_a^b |q_1(t)|\, dt \leqq l_2$$

ist. Dann ist die Ungleichung (121) eine Folge von (120).

Das Resultat dieses Paragraphen ist daher folgendes Theorem:

Ist $L_2 \neq 0$, was wohl als der allgemeine Fall bezeichnet werden dürfte, so lassen sich zwei positive Größen $k' \leqq k$, $h' \leqq h$ so bestimmen, daß unter den Beschränkungen $\tilde{v} \leqq k'$, $\tilde{u} \leqq h'$ unsere Gleichung (32) bei gegebener Funktion $v(s)$ zwei und nur zwei Lösungen $u(s)$ hat, welche unter weiteren leicht angebbaren speziellen Voraussetzungen natürlich auch zusammenfallen können.

Unsere Funktionalgleichung (32) ist also an der Stelle $u(s) = 0$, $v(s) = 0$ *zweifach* verzweigt.

Ist L_n der erste von Null verschiedene Koeffizient von S_1, so lehrt genau dieselbe Argumentation, daß unsere Funktionalgleichung an der Stelle $u(s) = 0$, $v(s) = 0$ n-fach verzweigt ist, wobei auch hier natürlich unter weiteren speziellen Voraussetzungen einige Zweige zusammenfallen können.

Verschwinden sämtliche Koeffizienten L_n $(n \geqq 2)$, so zeigen die Gleichungen (95), (96), (107), daß für $v(s) = 0$ unsere Funktionalgleichung eine stetige Schar von Lösungen hat, welche durch die Reihe (100) mit dem willkürlichen Parameter x dargestellt wird.

Im speziellen, häufig vorkommenden Falle, wo $v(s)$ identisch gleich einer Konstanten μ ist, liefert, wenn L_n der erste von Null verschiedene Koeffizient ist, die Verzweigungsgleichung (107) für x gemäß dem Theorem von Puiseux n nach gebrochenen Potenzen von μ fortschreitende Reihen; und die Gleichung (100) stellt daher die n Lösungsfunktionen $u(s)$ durch Reihen dar, welche nach gebrochenen Potenzen von μ fortschreiten.

§ 10.

Die Verzweigung im Falle der Existenz mehrerer Nulllösungen.

Um die Darstellung durchsichtiger zu gestalten, wollen wir in diesem Paragraphen voraussetzen, daß die Anzahlen der linear unabhängigen Nulllösungen in s und in t unseres Kernes $C(s, t)$ gleich 2 sind, jedoch alle Sätze und Beweise so entwickeln, daß sie auch für den Fall der Existenz einer beliebigen Anzahl linear unabhängiger Nulllösungen gültig bleiben. In der Bezeichnungsweise schließen wir uns an den § 7 an.

Gemäß der Schlußbemerkung von § 7 können wir die stetigen Funktionen $p_1(s)$, $p_2(s)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ so bestimmen, daß die Determinanten

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{122}$$

sind, wo die $A_{\mu\nu}$ und $B_{\mu\nu}$ durch die Gleichungen (81), (82) definiert sind. Setzt man dann

$$E(s, t) = C(s, t) + p_1(s)\, q_1(t) + p_2(s)\, q_2(t), \tag{123}$$

so hat gemäß dem Theorem I des § 7 der neue Kern $E(s, t)$ keine Nulllösung mehr, und es läßt sich daher zu ihm nach dem Fredholmschen Fundamentaltheorem ein lösender Kern $\mathsf{E}(s, t)$ konstruieren. Unsere Gleichung (32) läßt sich schreiben

$$\begin{aligned} u(s) - \int_a^b E(s, t)\, u(t)\, dt = &- p_1(s) \int_a^b q_1(t)\, u(t)\, dt - p_2(s) \int_a^b q_2(t)\, u(t)\, dt \\ &- W_{01}\binom{s}{u\, v} - \sum_{m+n \geq 2} W_{mn}\binom{s}{u\, v} \end{aligned} \tag{124}$$

Führt man hier den lösenden Kern $\mathsf{E}(s, t)$ gemäß den Formeln (38) ein, so gelangt man ganz wie in § 8 zu dem mit der Gleichung (124) gleichbedeutenden Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u(s) = &\left(- p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s, t)\, p_1(t)\right) x + \left(- p_2(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s, t)\, p_2(t)\right) y \\ &+ P_1\binom{s}{v} + \sum_{m+n \geq 2} P_{mn}\binom{s}{u\, v}, \end{aligned} \tag{125}$$

$$x = \int_a^b q_1(t)\, u(t)\, dt, \tag{126}$$

$$y = \int_a^b q_2(t)\, u(t)\, dt, \tag{127}$$

wo die $P_1\binom{s}{v}$, $P_{mn}\binom{s}{u\,v}$ wie in § 8 (93) definiert sind. Die Gleichung (125) läßt sich gemäß § 6 auflösen, indem man x und y als Parameter betrachtet. Man erhält unter den Beschränkungen

$$\tilde{v} \leqq k_1, \quad \tilde{u} \leqq h_1, \quad |x| \leqq l_1, \quad |y| \leqq l_1', \tag{128}$$

wo $k_1 \leqq k$, $h_1 \leqq h$, l_1 und l_1' geeignet gewählte positive Konstanten bedeuten, als eindeutige Lösung der Gleichung (125) die in $v(s)$, x, y regulär konvergente Integralpotenzreihe

$$u(s) = \sum_{\alpha+\beta+n \geqq 1} x^\alpha y^\beta V_n^{\alpha,\beta}\binom{s}{v}, \tag{129}$$

wo die $V_n^{\alpha\beta}\binom{s}{v}$ Integralpotenzformen n^{ten} Grades in $v(s)$ bedeuten. Durch Einführung von (129) in die Gleichungen (126) und (127) ergeben sich die Gleichungen

$$x = \sum_{\alpha+\beta+n \geqq 1} x^\alpha y^\beta \int_a^b q_1(t)\, V_n^{\alpha\beta}\binom{t}{v}\, dt, \tag{130}$$

$$y = \sum_{\alpha+\beta+n \geqq 1} x^\alpha y^\beta \int_a^b q_2(t)\, V_n^{\alpha\beta}\binom{t}{v}\, dt. \tag{131}$$

Setzt man

$$L_{\alpha\beta} = \int_a^b V_0^{\alpha\beta}\binom{t}{v}\, q_1(t)\, dt, \tag{132}$$

$$L'_{\alpha\beta} = \int_a^b V_0^{\alpha\beta}\binom{t}{v}\, q_2(t)\, dt, \tag{133}$$

so sind die $L_{\alpha\beta}$, $L'_{\alpha\beta}, \cdots$ als von $v(s)$ unabhängige Konstanten definiert und unsere Gleichungen (130, 131) nehmen die Gestalt an

$$x = \sum_{\alpha+\beta \geqq 1} L_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\beta \geqq 0} x^\alpha y^\beta \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^{\alpha\beta}\binom{t}{v}\, q_1(t)\, dt, \tag{134}$$

$$y = \sum_{\alpha+\beta \geqq 1} L'_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\beta \geqq 0} x^\alpha y^\beta \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^{\alpha\beta}\binom{t}{v}\, q_2(t)\, dt, \tag{135}$$

wo die zweiten Summen rechts als regulär konvergente, mit identisch verschwindendem $v(s)$ verschwindende Integralpotenzreihen von x, y und $v(s)$ betrachtet werden können.

Jetzt wollen wir das Bestehen der Gleichungen

$$L_{10} = 1, \quad L_{01} = 0, \tag{136}$$

$$L'_{10} = 0, \quad L'_{01} = 1 \tag{137}$$

beweisen. Gemäß (78) ist

$$0 = \varphi_1(s) - \int_a^b C(s,t)\, \varphi_1(t)\, dt = \varphi_1(s) - \int_a^b E(s,t)\, \varphi_1(t)\, dt$$

$$+ p_1(s) \int_a^b q_1(t)\, \varphi_1(t)\, dt + p_2(s) \int_a^b q_2(t)\, \varphi_1(t)\, dt.$$

Führt man den lösenden Kern $\mathsf{E}(s, t)$ ein, so ergibt sich

$$\varphi_1(s) = \left(-p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\, p_1(t)\, dt\right) \int_a^b q_1(t)\, \varphi_1(t)\, dt \tag{138}$$

$$+ \left(-p_2(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\, p_2(t)\, dt\right) \int_a^b q_2(t)\, \varphi_1(t)\, dt.$$

Ebenso erhält man

$$\varphi_2(s) = \left(-p_1(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\, p_1(t)\, dt\right) \int_n^b q_1(t)\, \varphi_2(t)\, dt \tag{139}$$

$$+ \left(-p_2(s) - \int_a^b \mathsf{E}(s,t)\, p_2(t)\, dt\right) \int_a^b q_2(t)\, \varphi_2(t)\, dt.$$

Bei Berücksichtigung der Gleichungen (125, 129), (81) können wir die Gleichungen (138), (139) auch so schreiben

$$\varphi_1(s) = V_0^{1,0}(s)\, B_{11} + V_0^{0,1}(s)\, B_{12}, \tag{140}$$

$$\varphi_2(s) = V_0^{1,0}(s)\, B_{21} \quad V_0^{0,1}(s)\, B_{22}, \tag{141}$$

wo für die von $v(s)$ unabhängige Integralpotenzform $V_0^{1,0}\binom{s}{v}$ $V_0^{1,0}(s)$ geschrieben ist und ebenso $V_0^{0,1}(s)$ statt $V_0^{0,1}\binom{s}{v}$.

Multipliziert man diese beiden Gleichungen je mit $q_1(s)ds$, $q_2(s)ds$ und integriert nach s von a bis b, so erhält man bei Berücksichtigung der Gleichungen (81), (132, 133)

$$0 = B_{11}(L_{10} - 1) + B_{12} L_{01} \quad , \tag{142}$$

$$0 = B_{21}(L_{10} - 1) + B_{22} L_{01} \quad , \tag{143}$$

$$0 = B_{11} L'_{10} \quad + B_{12}(L'_{01} - 1), \tag{144}$$

$$0 = B_{21} L'_{10} \quad + B_{22}(L'_{01} - 1). \tag{145}$$

Bei Berücksichtigung von (122) ergibt sich aus (142), (143)

$$L_{10} - 1 = 0, \quad L_{01} = 0$$

und aus (144), (145)

$$L'_{10} = 0, \quad L'_{01} - 1 = 0$$

was zu beweisen war.

Unsere Gleichungen (134) und (135) können also in folgender Form geschrieben werden

$$(136) \qquad 0 = \sum_{\alpha+\beta \geqq 2} L_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\beta \geqq 0} x^\alpha y^\beta \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^{\alpha\beta} \binom{t}{v} q_1(t)\, dt,$$

$$(137) \qquad 0 = \sum_{\alpha+\beta \geqq 2} L'_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\beta \geqq 0} x^\alpha y^\beta \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b V_n^{\alpha\beta} \binom{t}{v} q_2(t)\, dt.$$

Wir erhalten bei gegebenem $v(s)$ *alle ihrer Größe nach durch die Ungleichungen* (128) *beschränkten Lösungen unseres Problems, indem wir die Gleichungen* (136), (137), *deren Koeffizienten dann gegebene Konstanten sind, nach* x *und* y *auflösen. Jedes Paar dem absoluten Betrage nach* l_1 *und* l_1' *nicht überschreitender Wurzeln dieser Gleichung liefert, in die Gleichung* (129) *eingeführt, eine Lösung unseres Problems.*

Die Gleichungen (136), (137) wollen wir daher die *Verzweigungsgleichungen* unseres Problems nennen.

Das in diesem Paragraphen Auseinandergesetzte läßt sich offenbar unmittelbar auf das in § 6 behandelte allgemeinere Problem ausdehnen, wo die Anzahl der gegebenen Funktionen $v(s)$ eine beliebige ist.

Schlußbemerkung.

In den in dieser Untersuchung auseinandergesetzten Sätzen und Beweisen ändert sich nichts, wenn $s, t, r, \cdots$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $n+m$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr. \cdots$ die entsprechenden Elemente.

Auch Unstetigkeiten der Koeffizientenfunktionen können, wie bei Berücksichtigung der §§ 15, 17 der ersten Abhandlung*) leicht zu sehen, in weitem Umfange zugelassen werden, worauf spezieller einzugehen uns die nachfolgenden Anwendungen Veranlassung bieten werden.

Diese Untersuchung läßt sich ferner, wie ausführlich auseinandergesetzt werden wird, ohne Schwierigkeit unmittelbar und sogar unter Darbietung von Vereinfachungen auf den Fall übertragen, wo $s, t_1, t_2, \cdots$ nicht mehr

*) Math. Ann. Bd. 63. Vergl. auch E. E. Levi „Sulle Equazioni Integrali", Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1907, vol. XVI, serie 5ª, 2° sem. fasc. 9°.

die Punkte eines Kontinuums durchlaufen, sondern die unendliche Indexreihe. Dann bedeutet $u(s)$ eine gesuchte unendliche Zahlenreihe und die z. B. gegebenen $v(s)$, $K(s, t_1, t_2)$ eine gegebene einfach-unendliche und eine gegebene dreifach-unendliche Zahlenreihe. Das Integral muß als unendliche Summe definiert werden, und die nichtlineare Funktionalgleichung geht dann in eine unendliche Reihe nichtlinearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten über. Bei dieser Spezialisierung gestaltet sich das Resultat unserer Untersuchung zu folgendem Ergebnis.

Das grundlegende Theorem, nach welchem die eindeutige Lösbarkeit von n Gleichungen mit n Unbekannten in der Umgebung eines Lösungssystems durch das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante angezeigt wird, und die Sätze über die Verzweigung der Lösungen dieser Gleichungen im Falle des Verschwindens der Funktionaldeterminante werden auf die Auflösung einer unendlichen Reihe von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*) übertragen. Die von dem unendlichen Gleichungssystem vorauszusetzenden Konvergenzbedingungen ergeben sich bei der Durchführung des erwähnten Übertragungsverfahrens und werden daher in der ausführenden Darstellung präzisiert werden.

*) Dieses Problem dürfte nicht ohne Interesse sein, seit durch die Arbeiten von Hilbert („Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" IVte und Vte Mitteilung, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Klasse, 1906, S. 157—227 und S. 439—480) die Bedeutung der Funktionen von unendlichvielen Variabeln in den Vordergrund getreten ist.