Über die Laplacesche Reihe.

Von

T. H. Gronwall in Princeton, N. J. (U. S. A.).

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Es sei K eine Kugelfläche vom Radius 1, und die Punkte derselben seien auf ein beliebig orientiertes geographisches Koordinatensystem bezogen, in welchem θ die Poldistanz und φ die geographische Länge bezeichnen möge. Ferner sei $f(\theta, \varphi)$ eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Kugelfläche, und diese Funktion sei im gewöhnlichen (Riemannschen) Sinne integrierbar, d. h. es existiere

$$\int\limits_K f(\theta, \varphi)\, do,$$

wo $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ das Flächenelement der Einheitskugel K ist. Es bezeichne jetzt (θ', φ') irgend einen Punkt der Kugelfläche, do' das zugehörige

Flächenelement, γ den durch die Bedingung $0 \leqq \gamma \leqq \pi$ eindeutig festgelegten Winkel zwischen den beiden Vektoren vom Kugelmittelpunkte nach den Punkten (θ, φ) bez. (θ', φ'), sodaß

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi')$$

ist, und endlich $P_n(x)$ das n^{te} Legendresche Polynom. Dann lautet *die zur Funktion* $f(\theta, \varphi)$ *gehörige Laplacesche Reihe*

$$f(\theta, \varphi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_K f(\theta', \varphi') P_n(\cos \gamma)\, do',$$

wo das Äquivalenzzeichen $\sim$ andeutet, daß die Reihe zunächst rein formell, ohne Konvergenzrücksichten, gebildet wurde.

In dem wichtigen Sonderfalle, wo $f(\theta, \varphi)$ von φ unabhängig ist, werde $\cos \theta = x$ und $f(\theta, \varphi) = f(\cos \theta) = f(x)$ gesetzt; dann geht die Laplacesche Reihe in *die Legendresche Reihe* über:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx.$$

Von der vorliegenden Abhandlung ist der erste Teil (§ 1—§ 5) den singulären Erscheinungen gewidmet, welche in bezug auf Divergenz bez. ungleichmäßige Konvergenz der Laplaceschen Reihe einer stetigen Funktion auftreten können, während im zweiten Teil (§ 6—§ 9) von der Summation jener Reihe nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel die Rede sein wird.

Um einen Überblick über die erzielten Resultate zu gewinnen, ist es nützlich, einige bekannte Tatsachen über die Fourierschen Reihen zum Vergleich heranzuziehen.

Das erste Beispiel einer für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetigen Funktion $f(x)$, deren Fouriersche Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

an einer Stelle (bez. an abzählbar unendlich vielen Stellen) divergiert, wurde von Paul Du Bois Reymond angegeben.*)

Der tiefere Grund dieser Erscheinung wurde von Herrn Lebesgue

*) P. Du Bois Reymond, Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln, Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften (München), math. phys. Klasse, 12 (1876).

aufgeklärt, welcher nachwies, daß der absolute Betrag der Summe der $n+1$ ersten Glieder der zu $f(x)$ gehörigen Fourierschen Reihe, wenn man $f(x)$ auf die Klasse aller absolut integrablen Funktionen vom absoluten Betrage $\leqq 1$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ beschränkt, für ein gewisses $f(x)$ dieser Klasse im Punkte $x = x_0$ ein Maximum $\varrho_n(x_0)$ besitzt, *welches mit n ins Unendliche wächst.**) Es ist leicht zu sehen, daß $\varrho_n(x_0) = \varrho_n$ von x_0 unabhängig ist; die Konstanten ϱ_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ wurden von Herrn Fejér „Lebesguesche Konstanten der Fourierschen Reihe" genannt; Herr Fejér**) bestimmte auch die Art des Unendlichwerdens von ϱ_n, indem er die Existenz von $\lim\limits_{n=\infty}\left(\varrho_n - \frac{4}{\pi^2}\log n\right)$ nachwies. Auf dem alleinigen Grund des unendlichen Anwachsens von $\varrho_n(x_0)$ gab Herr Lebesgue***) ein Verfahren an, um für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetige Funktionen zu konstruieren, deren Fouriersche Reihen für $x = x_0$ die Du Bois Reymondsche Singularität aufweisen, d. h. für $x = x_0$ divergieren. Ferner zeigte Herr Lebesgue auf Grund derselben Eigenschaft von $\varrho_n(x_0)$, daß es für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetige Funktionen gibt, deren Fouriersche Reihen zwar überall konvergieren, aber in der Umgebung von $x = x_0$ nicht mehr gleichmäßig. Dieses Verhalten wird nach Herrn Fejér „Lebesguesche Singularität" genannt.

Die auf dem angedeuteten Wege konstruierten Fourierschen Reihen haben Koeffizienten von äußerst komplizierter Form; es ist nun Herrn Fejér†) gelungen, eine unendliche Folge von Konstanten c_n anzugeben, welche einem einfachen arithmetischen Gesetze gehorchen und die Eigenschaft besitzen, daß die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nx,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin nx$$

die Fourierschen Reihen je einer für $0 \leqq x \leqq \pi$ stetigen Funktion sind, von denen für $x = 0$ die erste die Du Bois Reymondsche, die zweite die Lebesguesche Singularität aufweist.

---

*) H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques (Paris, Gauthier-Villars 1906), § 45 (S. 86).

**) L. Fejér, Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, J. f. Math. 138 (1909), S. 22—53. Vgl. auch T. H. Gronwall, Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen, Math. Ann. 72 (1912), S. 244—261.

***) H. Lebesgue, l. c., § 46—47 (S. 87—89).

†) L. Fejér, Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, Annales de l'École Normale (3) 28 (1911), S. 63—104, wo auf S. 67 ein Verzeichnis seiner vorhergehenden Arbeiten über denselben Gegenstand zu finden ist.

Nach dem vorhin im Spezialfalle der Fourierschen Reihen erwähnten Verfahren von Herrn Lebesgue, welches von Herrn Haar*) weiter ausgebildet wurde, lassen sich bei jedem orthogonalen Funktionensystem, für welches der analog definierte Ausdruck $\varrho_n(x_0)$ mit n ins Unendliche wächst, stetige Funktionen angeben, welche für $x = x_0$ die Du Bois Reymondsche Singularität aufweisen. Für die Lebesguesche Singularität gilt, unter gewissen weiteren Voraussetzungen über das Orthogonalsystem, dasselbe.**) Herr Haar hat l. c. nachgewiesen, daß für die Legendresche Reihe und $x_0 = 0$ der Ausdruck $\varrho_n(x_0)$ mindestens von der Größenordnung $\log n$ mit n unendlich wird.

In der vorliegenden Abhandlung werden nun, nachdem in § 1 einige Hilfssätze über die Kugelfunktionen gegeben worden sind, in § 2 die Ausdrücke $\varrho_n(\theta_0, \varphi_0)$ für die Laplacesche Reihe in Betracht gezogen. Es ergibt sich sofort, daß $\varrho_n(\theta_0, \varphi_0) = \varrho_n$ von θ_0, φ_0 unabhängig ist, und für dieses ϱ_n (welches mit dem für $x = 1$ eintretenden Maximum des mit x_0 veränderlichen $\varrho_n(x_0)$ der Legendreschen Reihe identisch ist) wird die Grenzformel

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varrho_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

aufgestellt. Für die weiteren Entwicklungen gebrauche ich zwar wesentlich nur das Haarsche Resultat über $\varrho_n(0)$ der Legendreschen Reihe, aber es ist doch von theoretischem Interesse, durch obige Gleichung festzustellen, daß ϱ_n viel schneller als $\log n$ ins Unendliche wächst.

In § 3 wird mittels eines sehr einfachen Kunstgriffes gezeigt, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n(x),$$

wo c_n die vorhin erwähnten Konstanten des Herrn Fejér sind, die Legendresche Reihe einer für $-1 \leqq x \leqq 1$ stetigen Funktion ist, welche für $x = 1$ die Du Bois Reymondsche Singularität aufweist. Eine derartig einfach gebaute Reihe habe ich aber für die Lebesguesche Singularität nicht auffinden können.

In § 4 wird nach der Lebesgue-Haarschen Methode ein Beispiel einer stetigen Funktion $f(x)$ gegeben, deren Legendresche Reihe die Du Bois Reymondsche Singularität für $x = 0$ aufweist, wobei in Gegensatz zu den genannten Autoren bis zum expliziten Ausdruck für $f(x)$ vorgedrungen wird.

---

*) A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Erste Mitteilung, Math. Ann. 69 (1910), S. 331—371.

**) H. Lebesgue, Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier, C. R. 141 (1905), S. 875—877.

Im Anschluß an die Entwicklungen des § 4 wird in § 5 zum ersten Male ein Beispiel einer für $-1 \leqq x \leqq 1$ stetigen Funktion gegeben, deren Legendresche Reihe für $x = 0$ die Lebesguesche Singularität besitzt.

Im zweiten Teil (§ 6—§ 9) wird die Summation der Laplaceschen Reihe nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel behandelt. Es sei

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

eine beliebige (konvergente oder divergente) Reihe, uud es werde gesetzt

$$\begin{aligned} s_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \\ s_n' &= \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \\ s_n'' &= \frac{s_0' + s_1' + \cdots + s_n'}{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_n^{(r)} &= \frac{s_0^{(r-1)} + s_1^{(r-1)} + \cdots + s_n^{(r-1)}}{n+1}; \end{aligned}$$

wenn

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)} = a$$

existiert, so ist die vorgelegte Reihe *summierbar r^{ter} Ordnung mit der Summe a.*

In einer grundlegenden Abhandlung hat Herr Fejér*) gezeigt, daß die Fouriersche Reihe jeder (absolut oder nur bedingt) integrablen Funktion $f(x)$ summierbar erster Ordnung mit der Summe $f(x)$ ist in jedem Punkte, wo $f(x)$ stetig ist. In einem Dirichletschen Unstetigkeitspunkte, wo $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon) = f(x+0)$ und $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x-\varepsilon) = f(x-0)$ beide existieren, ist die Summe $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

Herr Fejér**) hat ferner bewiesen, daß die Laplacesche Reihe jeder absolut integrablen Funktion $f(\theta, \varphi)$ summierbar zweiter Ordnung ist mit der Summe $f(\theta, \varphi)$ in jedem Stetigkeitspunkte. In bezug auf die Summierbarkeit erster Ordnung hat Herr Haar***) gezeigt, daß die Legendresche Reihe jeder für $-1 \leqq x \leqq 1$ stetigen Funktion erster Ordnung summierbar $= f(x)$ ist in jedem Punkte mit Ausnahme der Endpunkte $x = \pm 1$, wo sich die Frage, wie Herr Haar ausdrücklich hervorhebt, nach seiner Methode nicht erledigen läßt. Unter gewissen engeren Voraussetzungen über

*) L. Fejér, Untersuchungen über trigonometrische Reihen, Math. Ann. 58 (1904), S. 51—69.

**) L. Fejér, Über die Laplacesche Reihe, Math. Ann. 67 (1909), S. 76—109.

***) A. Haar, Über die Legendresche Reihe, Rend. Circ. Mat. Palermo 32 (1911), S. 132—142.

$f(x)$, z. B. der beschränkten Schwankung, wird die Aufgabe von Herrn Chapman*) gelöst.

In § 6 werden nun die Lebesgueschen Konstanten erster Ordnung ϱ'_n der Laplaceschen Reihe eingeführt, welche in bezug auf die Mittel erster Ordnung s'_n ähnlich definiert werden wie die in § 2 eingeführten Lebesgueschen Konstanten nullter Ordnung ϱ_n in bezug auf die Summen s_n. Es wird gezeigt, daß die ϱ'_n, im Gegensatz zu den ϱ_n, für alle Werte von n beschränkt bleiben, und auf Grundlage dieses Ergebnisses gelingt in § 7 der Beweis eines Satzes, der das Hauptresultat der vorliegenden Abhandlung ist und sich folgendermaßen aussprechen läßt:

Die Laplacesche Reihe einer jeden absolut integrablen Funktion $f(\theta, \varphi)$ ist summierbar erster Ordnung mit der Summe $f(\theta, \varphi)$ in jedem Punkte, wo die Funktion stetig ist, und in einem Bereiche, welcher ganz innerhalb eines Stetigkeitsbereiches liegt, ist die Summierbarkeit gleichmäßig.

Dieser Satz wird ferner ausgedehnt auf Unstetigkeitspunkte, welche den Dirichletschen Unstetigkeitspunkten bei der Fourierschen Reihe analog sind.

§ 8 bringt eine neue Ableitung der Resultate des Herrn Fejér über Summierbarkeit zweiter Ordnung bei absolut integrablen Funktionen.

In § 9 wird endlich die Summierbarkeit zweiter Ordnung der Laplaceschen Reihe einer nur bedingt integrablen Funktion untersucht, sowie zum Schluß die Frage nach der Summierbarkeit erster Ordnung für solche Funktionen auf ein Problem der Theorie der Fourierschen Reihen zurückgeführt, welches an einen Ansatz von Riemann anknüpft, und dessen Erledigung sehr wünschenswert wäre.

Erster Teil.

§ 1.

Einige Hilfssätze aus der Theorie der Kugelfunktionen.

Aus den Elementen der Theorie der Kugelfunktionen sind die folgenden Formeln bekannt:

$$(1) \qquad P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x);$$

$$(2) \qquad |P_n(x)| < 1 \qquad (-1 < x < 1);$$

$$(3) \qquad \frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{n+1}{1-x^2}\left(xP_n(x) - P_{n+1}(x)\right);$$

---

*) S. Chapman, On the general theory of summability, with applications to Fourier's and other series, Quarterly journal of mathematics 43 (1911), S. 1—52. — On the summability of series of Legendre's functions, Math. Ann. 72 (1912), S. 211—227.

$$(4)\quad s_n(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n}(2\nu+1)P_\nu(x)P_\nu(y)=(n+1)\cdot\frac{P_n(x)P_{n+1}(y)-P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x};$$

$$(5)\quad s_n(x)\quad =s_n(x,1)=\sum_{\nu=0}^{n}(2\nu+1)P_\nu(x)=(n+1)\cdot\frac{P_n(x)-P_{n+1}(x)}{1-x};$$

$$(6)\quad s_n(x)\quad =\frac{dP_n(x)}{dx}+\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}.$$

Ferner besteht nach Stieltjes*) für $0<\theta<\pi$ die folgende asymptotische Formel, welche eine Verallgemeinerung der bekannten Laplaceschen Formel ist:

$$(7)\ P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1^2}{2(2n+3)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{3\pi}{4}\right)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\right.$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2p-3)^2}{2\cdot4\cdot6\cdots(2p-2)(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2p-1)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{2n+2p-1}{2}\theta-\frac{2p-1}{4}\pi\right)}{(2\sin\theta)^{\frac{2p-1}{2}}}$$
$$\left.+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2p-1)^2}{2\cdot4\cdot6\cdots2p(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2p+1)}\cdot\frac{M(p,n,\theta)}{(2\sin\theta)^{\frac{2p+1}{2}}}\right],$$

wo

$$(8)\qquad |M(p,n,\theta)|<2\qquad\begin{pmatrix}0\leqq\theta\leqq\pi\\ p=0,1,2,\cdots\\ n=0,1,2,\cdots\end{pmatrix}.$$

Aus (7) und (8) wollen wir nun einige naheliegende Folgerungen ziehen. Für $p=1$ wird (7)

$$(9)\quad P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2\sin\theta}}\left[\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{M(1,n,\theta)}{4(2n+3)\sin\theta}\right].$$

Hierin setzen wir, unter λ eine ganze Zahl verstanden,

$$\theta_0=\frac{4\lambda-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}+\frac{\varkappa}{(2n+1)(2\lambda-1)}\cdot\frac{\pi}{6},\quad \varkappa=\pm1,\quad 1\leqq\lambda\leqq\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

sodaß

$$\frac{2\lambda-1}{2n+1}\pi<\theta_0<\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{6}<\pi-\frac{2\lambda-1}{2n+1}\pi.$$

*) T. J. Stieltjes, Sur les polynômes de Legendre, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1) 4 (1890), S. G1—G17.

Dann wird

$$\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\lambda\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\varkappa}{2\lambda-1}\cdot\frac{\pi}{12}\right)=(-1)^{\lambda}\varkappa\sin\frac{1}{2\lambda-1}\cdot\frac{\pi}{12},$$

und indem wir berücksichtigen, daß $\frac{\sin x}{x}$ monoton abnimmt, wenn x von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, und folglich

$$\sin x\geqq\frac{2}{\pi}x \qquad \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin x=\sin(\pi-x)\geqq\frac{2}{\pi}(\pi-x) \qquad \left(\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi\right),$$

so bekommen wir nach (8)

$$\left|\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta_0-\frac{\pi}{4}\right)\right|-\left|\frac{M(1,n,\theta_0)}{4(2n+3)\sin\theta_0}\right|\geqq\sin\left(\frac{1}{2\lambda-1}\cdot\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{2(2n+3)\sin\theta_0}$$

$$>\sin\left(\frac{1}{2\lambda-1}\cdot\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{2(2n+3)\sin\frac{2\lambda-1}{2n+1}\pi}$$

$$\geqq\frac{1}{2\lambda-1}\sin\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2(2n+3)\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\lambda-1}{2n+1}\pi}$$

$$>\frac{1}{2\lambda-1}\left(\sin\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\right)>0.$$

Wenn in Kroneckers Bezeichnungsweise

$$\operatorname{sgn.}a=\begin{cases}+1, & a>0\\ 0, & a=0\\ -1, & a<0\end{cases}$$

geschrieben wird, so hat demnach der Ausdruck rechts in (9) das Vorzeichen seines ersten Gliedes, d. h.

$$\operatorname{sgn.}P_n(\cos\theta_0)=\operatorname{sgn.}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta_0-\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^{\lambda}\varkappa.$$

Es seien jetzt $x_{1,n}, x_{2,n}, \cdots, x_{n,n}$ die Wurzeln von $P_n(x)=0$, wobei

$$1>x_{1,n}>x_{2,n}>\cdots>x_{n,n}>-1;$$

setzen wir ferner

(10) $$x_{\lambda,n}=\cos\theta_{\lambda,n},\quad 0<\theta_{\lambda,n}<\pi,$$

so wird nach dem eben Bewiesenen

(11) $$\frac{4\lambda-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{(2n+1)(2\lambda-1)}\cdot\frac{\pi}{6}<\theta_{\lambda,n}<\frac{4\lambda-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{(2n+1)(2\lambda-1)}\cdot\frac{\pi}{6},$$

$$\lambda=1,2,\cdots,\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

sowie, da zufolge (1) $x_{\lambda,n} = -x_{n+1-\lambda,n}$ ist,

$$(12) \qquad \frac{4\lambda-1}{2n+1}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{(2n+1)(2n-2\lambda+1)}\frac{\pi}{6} < \theta_{\lambda,n} < \frac{4\lambda-1}{2n+1}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{(2n+1)(2n-2\lambda+1)}\frac{\pi}{6}, \qquad \lambda = \left[\frac{n+1}{2}\right]+1, \cdots, n.$$

Aus (11) und (12) folgt, indem wir für $2\lambda - 1$ bez. $2n-2\lambda+1$ die untere Grenze 1 einsetzen,

$$(13) \qquad \frac{6\lambda-2}{2n+1}\frac{\pi}{3} < \theta_{\lambda,n} < \frac{6\lambda-1}{2n+1}\frac{\pi}{3}, \qquad \lambda = 1, 2, \cdots, n.$$

Für $p = 0$ gibt (7)

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{M(0,n,\theta)}{\sqrt{2\sin\theta}};$$

ferner ist, wie aus der bekannten asymptotischen Reihe für $\log\Gamma(1+x)$:

$$(14) \quad \log\Gamma(1+x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}B_\nu}{2\nu(2\nu-1)}\cdot\frac{1}{x^{2\nu-1}} + \frac{(-1)^n B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{h}{x^{2n+1}}, \qquad 0<h<1,$$

$\left(\text{wo } B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30}, \text{ usw. die Bernoullischen Zahlen sind}\right)$ für $n=1$ folgt unter Anwendung von $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi n}} < \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)} < \frac{2}{\sqrt{\pi n}}, \qquad n \geqq 1;$$

es wird demnach

$$(15) \qquad |P_n(\cos\theta)| < \frac{4}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}, \quad 0<\theta<\pi \text{ und } n\geqq 1.$$

Setzen wir endlich in (9)

$$\theta = \frac{4\lambda+1+h}{2n+1}\frac{\pi}{2}, \quad -1\leqq h\leqq 1,\ 1\leqq\lambda\leqq n-1,$$

so wird

$$\left|\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right| - \left|\frac{M(1,n,\theta)}{4(2n+3)\sin\theta}\right| \geqq \cos\frac{h\pi}{4} - \frac{1}{2(2n+3)\sin\theta}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2(2n+3)\sin\frac{2\pi}{2n+1}} > \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2(2n+3)\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8}, \qquad n \geqq 2,$$

woraus

$$|P_n(\cos\theta)| > \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{8}\right)$$

oder

$$(16) \qquad |P_n(\cos\theta)| > \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}, \quad \frac{2\lambda}{2n+1}\pi \leqq \theta \leqq \frac{2\lambda+1}{2n+1}\pi, \quad n \geqq 2,$$
$$\lambda = 1, 2, \cdots, n-1.$$

§ 2.

Die Lebesgueschen Konstanten nullter Ordnung.

Es sei $f(\theta, \varphi)$ eine auf der Einheitskugel K im Riemannschen Sinne integrable Funktion; dann ist die $(n+1)^{\text{te}}$ Partialsumme der zu $f(\theta, \varphi)$ gehörigen Laplaceschen Reihe nach (5) gleich

$$s_n\{f(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_K f(\theta', \varphi')\, s_n(\cos\gamma)\, do'.$$

Wir betrachten jetzt die Klasse aller auf K absolut integrablen Funktionen vom absoluten Betrage $\leqq 1$; dann ist für irgend eine Funktion $f(\theta, \varphi)$ der Klasse

$$|s_n\{f(\theta, \varphi)\}| \leqq \frac{1}{4\pi}\int\limits_K |s_n(\cos\gamma)|\, do',$$

und das absolute Maximum

$$\varrho_n(\theta, \varphi) = \text{Max.}\, |s_n\{f(\theta, \varphi)\}| = \frac{1}{4\pi}\int\limits_K |s_n(\cos\gamma)|\, do'$$

wird im Punkte (θ, φ) erreicht, wenn f so gewählt wird, daß

$$f(\theta', \varphi') = \text{sgn.}\, s_n(\cos\gamma).$$

Durch Verlegung des Nordpols in den Punkt (θ, φ) wird

$$\varrho_n(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |s_n(\cos\theta')|\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} |s_n(\cos\theta')|\sin\theta'\, d\theta',$$

also von (θ, φ) unabhängig; schreiben wir demnach $\varrho_n(\theta, \varphi) = \varrho_n$ und setzen $\cos\theta' = x$, so wird

$$(17) \qquad \varrho_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |s_n(x)|\, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Diese Konstanten ϱ_n bezeichnen wir aus den in der Einleitung angeführten Gründen als die *Lebesgueschen Konstanten nullter Ordnung der Laplaceschen*

Reihe. Wir wollen jetzt nachweisen, daß dieselben mit n ins Unendliche wachsen und zwar wie $\sqrt{n}$.

Wir zeigen zunächst, daß die Gleichung $s_n(x) = 0$ n Wurzeln zwischen -1 und 1 besitzt. Bekanntlich haben $P_n(x_{\lambda,n+1}) = P_n(x_{\lambda,n+1}) - P_{n+1}(x_{\lambda,n+1})$ und $P_n(x_{\lambda+1,n+1}) = P_n(x_{\lambda+1,n+1}) - P_{n+1}(x_{\lambda+1,n+1})$ entgegengesetzte Vorzeichen, wenn, wie in § 1, $x_{\lambda,n+1}$ $(\lambda = 1, 2, \cdots, n+1)$ die Nullstellen von $P_{n+1}(x)$ sind, und wegen (5) hat dann $s_n(x)$ n Nullstellen $x_1, x_2, \cdots, x_n$, wo

$$1 > x_{\lambda,n+1} > x_\lambda > x_{\lambda+1,n+1} > -1 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n).$$

Setzen wir also

$$x_\lambda = \cos\theta_\lambda, \quad 0 < \theta_\lambda < \pi,$$

so wird infolge (13)

$$\frac{6\lambda - 2}{2n+3} \cdot \frac{\pi}{3} < \theta_\lambda < \frac{6\lambda + 5}{2n+3} \cdot \frac{\pi}{3}, \qquad \lambda = 1, 2, \cdots, n. \tag{18}$$

Weil offenbar $s_n(1) = \sum\limits_{\nu=0}^{n}(2\nu + 1) > 0$, so wird, wenn wir noch $x_0 = 1$ setzen, $|s_n(x)| = (-1)^\nu s_n(x)$ für $x_\nu \geqq x \geqq x_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n)$, und zufolge (17)

$$2\varrho_n = \left(\int_{x_1}^{x_0} + \int_{x_2}^{x_1} + \cdots + \int_{x_n}^{x_{n-1}} + \int_{-1}^{x_n}\right) |s_n(x)|\, dx$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu \int_{x_{\nu+1}}^{x_\nu} + (-1)^n \int_{-1}^{x_n}\right) s_n(x)\, dx.$$

Aus (6) erhalten wir aber

$$\int_{x_{\nu+1}}^{x_\nu} s_n(x)\, dx = P_n(x_\nu) + P_{n+1}(x_\nu) - P_n(x_{\nu+1}) - P_{n+1}(x_{\nu+1}),$$

$$\int_{-1}^{x_n} s_n(x)\, dx = P_n(x_n) + P_{n+1}(x_{n+1}),$$

und dieses in die vorangehende Formel eingetragen, ergibt nach einigen Reduktionen

$$\varrho_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu (P_n(x_\nu) + P_{n+1}(x_\nu)) \tag{19}$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu (P_n(\cos\theta_\nu) + P_{n+1}(\cos\theta_\nu)).$$

Unser nächster Schritt wird die Ermittlung von Näherungswerten gewisser der θ_ν sein. Mit $p = 2$ erhalten wir aus (7), unter Anwendung von $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}(\sin\theta)^{\frac{5}{2}}\left(P_n(\cos\theta)-P_{n+1}(\cos\theta)\right)$$

$$= \sin^2\theta\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sin\theta}{2(2n+3)}\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{9M(2,n,\theta)}{32(2n+3)(2n+5)}-\frac{2n+2}{2n+3}\left[\sin^2\theta\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$

$$+\frac{\sin\theta}{2(2n+5)}\cos\left(\frac{2n+5}{2}\theta-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\left.+\frac{9M(2,n+1,\theta)}{32(2n+5)(2n+7)}\right]$$

$$= \sin^2\theta\left[\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2n+3}\sin^2\theta\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{\sin\theta}{2(2n+3)}\left[\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{2n+5}{2}\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$+\frac{3}{2(2n+3)(2n+5)}\sin\theta\cos\left(\frac{2n+5}{2}\theta-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{9}{32(2n+3)(2n+5)}\left[M(2,n,\theta)-\frac{2n+2}{2n+7}M(2,n+1,\theta)\right]$$

$$= 2\sin^2\theta\sin\frac{\theta}{2}\sin\left((n+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2n+3}\sin^2\theta\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{2n+3}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\sin\left((n+2)\theta-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\left[\frac{3}{2}\sin\theta\cos\left(\frac{2n+5}{2}\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{9}{32}M(2,n,\theta)-\frac{9}{32}\cdot\frac{2n+2}{2n+7}M(2,n+1,\theta)\right].$$

Es ist aber nach (8)

$$\left|\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\left[\frac{3}{2}\sin\theta\cos\left(\frac{2n+5}{2}\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{9}{32}M(2,n,\theta)-\frac{9}{32}\cdot\frac{2n+2}{2n+7}M(2,n+1,\theta)\right]\right|$$

$$<\frac{1}{(2n+2)(2n+2)}\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{32}\cdot 2+\frac{9}{32}\cdot 2\right)<\frac{1}{(n+1)^2},$$

sodaß

$$\text{(20)}\qquad \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}(\sin\theta)^{\frac{5}{2}}\left(P_n(\cos\theta)-P_{n+1}(\cos\theta)\right)$$

$$= \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\left[2\sin\theta\sin\left((n+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2}{2n+3}\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2n+3}\cos\left((n+2)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\frac{M'(n,\theta)}{(n+1)^2}$$

$$= \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\left[2\sin\theta\sin\left((n+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2n+3}\cos\left((n+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$+\frac{M'(n,\theta)}{(n+1)^2},\qquad |M'(n,\theta)|<1.$$

Wir begrenzen jetzt die ganzen Zahlen n und ν durch die Ungleichungen

$$\text{(21)}\qquad n>8^5,$$
$$(n+1)^{\frac{2}{5}}\leqq\nu\leqq n-(n+1)^{\frac{2}{5}},$$

und setzen in (20)

$$\text{(22)}\qquad \theta_0=\frac{4\nu+1}{n+1}\,\frac{\pi}{4}+\frac{\varkappa\pi}{(n+1)^{\frac{6}{5}}},\quad \varkappa=\pm 1,$$

sodaß

$$\sin\left((n+1)\,\theta_0-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\nu\pi+\frac{\varkappa\pi}{(n+1)^{\frac{1}{5}}}\right)=(-1)^\nu\varkappa\sin\frac{\pi}{(n+1)^{\frac{1}{5}}}\cdot$$

Dann erhalten wir aus (21) und (22)

$$0<\frac{\nu\pi}{n+1}<\theta_0<\frac{\nu+1}{n+1}\pi<\pi,$$

und, weil $\frac{\sin x}{x}$ monoton abnimmt, wenn x von 0 bis π wächst, und folglich $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ für $0<x<\frac{\pi}{2}$ ist,

$$\sin\frac{\theta_0}{2}>\sin\frac{\nu\pi}{2(n+1)}>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\nu\pi}{2(n+1)}\geqq\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{5}}},$$

sowie für $0<\theta_0\leqq\frac{\pi}{2}$

$$\sin\theta_0>\sin\frac{\nu\pi}{n+1}\geqq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\nu\pi}{n+1}\geqq\frac{2}{(n+1)^{\frac{3}{5}}},$$

dagegen für $\frac{\pi}{2}<\theta_0<\pi$

$$\sin\theta_0>\sin\frac{\nu+1}{n+1}\pi=\sin\frac{n-\nu}{n+1}\pi>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n-\nu}{n+1}\pi\geqq\frac{2}{(n+1)^{\frac{3}{5}}},$$

und endlich

$$\left|\sin\left((n+1)\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \sin\frac{\pi}{(n+1)^{\frac{1}{5}}} > \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{(n+1)^{\frac{1}{5}}} = \frac{2}{(n+1)^{\frac{1}{5}}}.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt

$$\left|2\sin\theta_0\sin\left((n+1)\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right)\right| > 2\cdot\frac{2}{(n+1)^{\frac{3}{5}}}\cdot\frac{2}{(n+1)^{\frac{1}{5}}} = \frac{8}{(n+1)^{\frac{4}{5}}} > \frac{1}{2(n+1)}$$

$$> \left|\frac{\cos\left((n+1)\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right)}{2n+3}\right|,$$

sodaß

$$\operatorname{sgn.}\left(2\sin\theta_0\sin\left((n+1)\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2n+3}\cos\left((n+1)\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \operatorname{sgn.} 2\sin\theta_0\sin\left((n+1)\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sgn.}\sin\left((n+1)\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^\nu\cdot\varkappa.$$

Weiter erhalten wir

$$\left|\sin\theta_0\sin\frac{\theta_0}{2}\left[2\sin\theta_0\sin\left((n+1)\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2n+3}\cos\left((n+1)\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right)\right]\right|$$

$$> \frac{2}{(n+1)^{\frac{3}{5}}}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{5}}}\left[\frac{8}{(n+1)^{\frac{4}{5}}} - \frac{1}{2n+2}\right] = \frac{2}{(n+1)^2}\left(8 - \frac{1}{2(n+1)^{\frac{1}{5}}}\right)$$

$$> \frac{2}{(n+1)^2} > \left|\frac{M'(n,\theta_0)}{(n+1)^2}\right|,$$

sodaß die rechte Seite von (20) das Vorzeichen ihres ersten Gliedes hat, d. h.

$$\operatorname{sgn.}\left(P_n(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)\right) = (-1)^\nu\varkappa. \tag{23}$$

Hieraus folgt wegen (5), daß im Intervalle

$$\frac{4\nu+1}{n+1}\,\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{(n+1)^{\frac{6}{5}}} < \theta < \frac{4\nu+1}{n+1}\,\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{(n+1)^{\frac{6}{5}}}, \tag{24}$$

wo n und ν den Ungleichungen (21) genügen, die Gleichung $s_n(\cos\theta) = 0$ eine ungerade Anzahl von Wurzeln besitzt. Wir wollen noch zeigen, daß das Intervall (24) nur die einzige Wurzel θ_ν enthält. Es sei nämlich θ_λ irgend eine der in (24) liegenden Wurzeln; dann folgt aus (18) und (24)

$$\frac{6\lambda+5}{n+1}\,\frac{\pi}{6} > \frac{6\lambda+5}{2n+3}\,\frac{\pi}{3} > \theta_\lambda > \frac{4\nu+1}{n+1}\,\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{(n+1)^{\frac{6}{5}}} > \frac{\nu\pi}{n+1},$$

oder

$$\lambda + 1 > \nu. \tag{25}$$

Aus (18) und (24) schließen wir weiter, daß

$$\frac{6\lambda-2}{2n+3}\,\frac{\pi}{3}<\theta_\lambda<\frac{4\nu+1}{n+1}\,\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{(n+1)^{\frac{6}{5}}},$$

woraus

$$24(n+1)(\lambda-\nu)-14n-12\nu-17<\frac{12(2n+3)}{(n+1)^{\frac{1}{5}}}<24(n+1)^{\frac{4}{5}},$$

und diese Ungleichung ergibt unter Berücksichtigung von (21)

$$\lambda<\nu+1 \quad \text{für} \quad \nu\leqq\frac{n}{2},$$

$$\lambda<\nu+2 \quad \text{für} \quad \nu>\frac{n}{2},$$

woraus wir in Verbindung mit (25) schließen, daß

$$\lambda=\nu \quad \text{für} \quad \nu\leqq\frac{n}{2},$$

$$\lambda=\nu \quad \text{oder} \quad \nu+1 \quad \text{für} \quad \nu>\frac{n}{2}.$$

Es liegen demnach im Intervalle (24) höchstens zwei Wurzeln, nämlich θ_ν und $\theta_{\nu+1}$; weil aber die Zahl der Wurzeln in (24) ungerade ist, so liegt in dem fraglichen Intervalle nur eine Wurzel, d. h. entweder θ_ν oder $\theta_{\nu+1}$. Jetzt sei ν' das kleinste der Bedingung (21) genügende ν, für welches das zugehörige $\lambda=\nu'+1$ ist, dann gehört zu $\nu=\nu'-1$ der Wert $\lambda=\nu'-1$, und wegen $\theta_{\nu'-1}<\theta_{\nu'}<\theta_{\nu'+1}$ und (24) liegt $\theta_{\nu'}$ im Intervall

$$\frac{4(\nu'-1)+1}{n+1}\,\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{(n+1)^{\frac{6}{5}}}<\theta<\frac{4\nu'+1}{n+1}\,\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{(n+1)^{\frac{6}{5}}},$$

welches offenbar keine weitere Wurzel enthält. Aus (23) folgt aber, daß im obigen Intervall eine gerade Anzahl von Wurzeln liegen; der entstehende Widerspruch zeigt also, daß immer $\lambda=\nu$ ist, sodaß sich aus (24) endlich ergibt

$$\theta_\nu=\frac{4\nu+1}{n+1}\,\frac{\pi}{4}+\frac{\pi h_\nu}{(n+1)^{\frac{6}{5}}},\quad |h_\nu|<1, \tag{26}$$

für jedes n und jedes ν, welche (21) genügen.

Nun besteht der nächste Schritt darin, für die Wurzeln (26) den Summanden in (19) asymptotisch auszuwerten. Die Stieltjessche Formel (7) gibt mit $p=1$

$$(27)\qquad P_n(\cos\theta)+P_{n+1}(\cos\theta)$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\left((n+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$+\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\left[-2\sin\theta\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{M(1,n,\theta)}{2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2n+2}{2n+5}\cdot\frac{M(1,n+1,\theta)}{2}\right]\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}\left(\cos\left((n+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\cot\frac{\theta}{2}}+\frac{M''(n,\theta)}{(2n+3)(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$|M''(n,\theta)|<4.$$

Es ist aber nach (26)

$$\cos\left((n+1)\theta_\nu-\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^\nu\cos\frac{\pi h_\nu}{(n+1)^{\frac{1}{5}}}=(-1)^\nu\left(1+O\left(\frac{\pi^2h_\nu^2}{(n+1)^{\frac{2}{5}}}\right)\right)^{*)}$$

$$=(-1)^\nu\left(1+O\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}\right)\right)$$

und

$$\cot\frac{\theta_\nu}{2}<\frac{1}{\sin\frac{\theta_\nu}{2}}<(n+1)^{\frac{3}{5}},$$

daher

$$\cos\left((n+1)\theta_\nu-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\cot\frac{\theta_\nu}{2}}=(-1)^\nu\sqrt{\cot\frac{\theta_\nu}{2}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{10}}}\right);$$

ferner

$$\frac{M''(n,\theta_\nu)}{(2n+3)(2\sin\theta_\nu)^{\frac{3}{2}}}=O\left(\frac{1}{2n+3}\cdot(n+1)^{\frac{9}{10}}\right)=O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{10}}}\right),$$

und endlich nach (14)

$$\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{\sqrt{\pi n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Dies alles in (27) eingetragen, ergibt

$$(28)\qquad (-1)^\nu(P_n(\cos\theta_\nu)+P_{n+1}(\cos\theta_\nu))=\frac{2}{\sqrt{\pi n}}\sqrt{\cot\frac{\theta_\nu}{2}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}\right).$$

---

*) Die Bezeichnung $f(x)=O(g(x))$ bedeutet, daß sich eine Konstante A finden läßt derart, daß für jedes hinreichend große x

$$|f(x)|<A|g(x)|.$$

Wir schreiben jetzt den Ausdruck (19) in der Form

$$\varrho_n = 1 + \Sigma_1(-1)^\nu(P_n(\cos\theta_\nu) + P_{n+1}(\cos\theta_\nu)) \\ + \Sigma_2(-1)^\nu(P_n(\cos\theta_\nu) + P_{n+1}(\cos\theta_\nu)),$$

wo die erste Summe sich auf alle ν bezieht, welche (21) genügen, während die zweite auf die übrig bleibenden ν erstreckt ist. Wegen

$$\Sigma_1 O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}\right) = O\left(n \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}\right) = O\left(n^{\frac{2}{5}}\right)$$

ist

$$\Sigma_1(-1)^\nu(P_n(\cos\theta_\nu) + P_{n+1}(\cos\theta_\nu)) = \frac{2}{\sqrt{\pi n}}\Sigma_1\sqrt{\cot\frac{\theta_\nu}{2}} + O\left(n^{\frac{2}{5}}\right);$$

ferner ist die Anzahl der ν in Σ_2 höchstens $2(n+1)^{\frac{2}{5}}$, und der absolute Betrag jedes Summanden ist nach (2)

$$|(-1)^\nu(P_n(\cos\theta_\nu) + P_{n+1}(\cos\theta_\nu))| \leqq |P_n(\cos\theta_\nu)| + |P_{n+1}(\cos\theta_\nu)| \leqq 1 + 1 = 2,$$

weshalb

$$\Sigma_2(-1)^\nu(P_n(\cos\theta_\nu) + P_{n+1}(\cos\theta_\nu)) = O\left(2(n+1)^{\frac{2}{5}} \cdot 2\right) = O\left(n^{\frac{2}{5}}\right),$$

also

$$\varrho_n = \frac{2}{\sqrt{\pi n}}\Sigma_1\sqrt{\cot\frac{\theta_\nu}{2}} + O\left(n^{\frac{2}{5}}\right)$$

oder

$$\frac{\varrho_n}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\pi^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{n+1}{n}\Sigma_1\left(\frac{4\nu+3}{n+1}\frac{\pi}{4} - \frac{4\nu-1}{n+1}\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\cot\frac{\theta_\nu}{2}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{10}}}\right),$$

und weil auf Grund von (26)

$$\frac{4\nu+3}{n+1}\frac{\pi}{4} > \theta_\nu > \frac{4\nu-1}{n+1}\frac{\pi}{4},$$

so wird

$$\lim_{n=\infty}\frac{\varrho_n}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\pi\sqrt{\cot\frac{\theta}{2}}\,d\theta.$$

Obwohl das Integral ein uneigentliches ist, sieht man sofort die Berechtigung des Grenzüberganges ein, weil der Integrand monoton ist. Durch die Substitution $\cot\frac{\theta}{2} = u^2$ wird

$$\int_0^\pi\sqrt{\cot\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 4\int_0^\infty\frac{u^2du}{1+u^4} = 2\int_{-\infty}^\infty\frac{u^2du}{1+u^4} = \pi\sqrt{2},$$

wie mittels der bekannten Anwendung des Cauchyschen Residuensatzes auf die obere Halbebene ersichtlich ist, und wir erhalten schließlich das asymptotische Gesetz der ϱ_n:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varrho_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{29}$$

§ 3.

Erstes Beispiel der Du Bois Reymondschen Singularität.

Herr Fejér*) hat den folgenden Satz bewiesen:

Es sei

$$\begin{aligned} A(n,r,x) = {} & \frac{\cos(r+1)x}{n} + \frac{\cos(r+2)x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos(r+n)x}{1} \\ & - \frac{\cos(r+n+1)x}{1} - \frac{\cos(r+n+2)x}{2} - \cdots - \frac{\cos(r+2n)x}{n} \end{aligned} \tag{30}$$

und

$$\begin{aligned} B(n,r,x) = {} & \frac{\sin(r+1)x}{n} + \frac{\sin(r+2)x}{n-1} + \cdots + \frac{\sin(r+n)x}{1} \\ & - \frac{\sin(r+n+1)x}{1} - \frac{\sin(r+n+2)x}{2} - \cdots - \frac{\sin(r+2n)x}{n}; \end{aligned} \tag{31}$$

dann ist für jedes ganzzahlige positive n und jedes reelle r und x

$$|A(n,r,x)| < \pi + 2, \quad |B(n,r,x)| < \pi + 2. \tag{32}$$

Als ein Gegenstück dazu im Gebiete der Kugelfunktionen wollen wir zeigen, daß wenn

$$\begin{aligned} C(n,r,x) = {} & \frac{P_{r+1}(x)}{n} + \frac{P_{r+2}(x)}{n-1} + \cdots + \frac{P_{r+n}(x)}{1} \\ & - \frac{P_{r+n+1}(x)}{1} - \frac{P_{r+n+2}(x)}{2} - \cdots - \frac{P_{r+2n}(x)}{n}, \end{aligned} \tag{33}$$

so ist für jedes ganzzahlige positive r und n und jedes x im Intervalle $1 \leqq x \leqq 1$

$$|C(n,r,x)| \leqq (\pi + 2)\sqrt{2}. \tag{34}$$

Zum Beweise benutzen wir die bekannten Mehlerschen Formeln

$$\begin{aligned} P_n(\cos\theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos\frac{2n+1}{2} u\, du}{\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}, \\ & \qquad\qquad 0 < \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon < \pi, \\ P_n(\cos\theta) &= \frac{2}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2} u\, du}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos u)}} \end{aligned}$$

*) L. Fejér, Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, Annales de l'École Normale (3) 28 (1911), S. 63—103. Siehe besonders S. 74—76.

woraus

$$\left.\begin{aligned} C(n,r,\cos\theta) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{A\left(n,r+\frac{1}{2},u\right)du}{\sqrt{2(\cos u-\cos\theta)}}, \\ C(n,r,\cos\theta) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{B\left(n,r+\frac{1}{2},u\right)du}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos u)}}, \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi-\varepsilon,$$

wenn ε eine beliebig kleine positive Größe ist.

Es folgt für $\varepsilon \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ aus der ersten Formel, indem wir noch $\sin\frac{u}{2} = \sin\frac{\theta}{2}\sin t$ setzen,

$$|C(n,r,\cos\theta)| \leqq \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\left|A\left(n,r+\frac{1}{2},u\right)\right|du}{\sqrt{2(\cos u-\cos\theta)}} < \frac{2(\pi+2)}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{du}{\sqrt{2(\cos u-\cos\theta)}}$$

$$= \frac{2(\pi+2)}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2 t}} < \frac{2(\pi+2)}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{\pi+2}{\cos\frac{\theta}{2}} \leqq (\pi+2)\sqrt{2},$$

sowie für $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi-\varepsilon$ aus der zweiten Formel mit $\cos\frac{u}{2} = \cos\frac{\theta}{2}\sin t$

$$|C(n,r,\cos\theta)| \leqq \frac{2}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{\left|B\left(n,r+\frac{1}{2},u\right)\right|du}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos u)}} < \frac{2(\pi+2)}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{du}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos u)}}$$

$$= \frac{2(\pi+2)}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2 t}} < \frac{2(\pi+2)}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{\pi+2}{\sin\frac{\theta}{2}} \leqq (\pi+2)\sqrt{2}.$$

Die Formel (34) ist also für $-\cos\varepsilon \leqq x \leqq \cos\varepsilon$ bewiesen, und wegen der Stetigkeit von $C(n, r, x)$ gilt sie dann auch im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$.

Herr Fejér konstruiert nun von (32) aus folgendermaßen ein Beispiel einer für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetigen Funktion mit für $x = 0$ divergenter Fourierscher Reihe:

Es werde

$$m_0 = 0,$$
$$m_\nu = 2(2^{1^3} + 2^{2^3} + \cdots + 2^{\nu^3}), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

gesetzt, sodaß $m_\nu - m_{\nu-1} = 2 \cdot 2^{\nu^3}$ ist. Die Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} A(m_\nu - m_{\nu-1}, m_{\nu-1}, x)$$

stellt eine für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetige Funktion dar, denn die Reihe konvergiert zufolge (32) gleichmäßig und zwar wie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi + 2}{\nu^2}.$$

Um die Koeffizienten der zu $f(x)$ gehörigen Fourierschen Reihe zu ermitteln, bemerken wir, daß die Beziehungen

$$(36) \qquad n = m_{\nu-1} + \lambda, \quad 1 \leqq \lambda \leqq m_\nu - m_{\nu-1}$$

zu jedem ganzzahligen positiven n je ein ganzzahliges positives ν und λ eindeutig bestimmen. Nach Multiplikation von (35) mit $\cos nx$ (bez. $\sin nx$) können wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf der rechten Seite gliedweise integrieren; weil ferner jedes A nur eine endliche Anzahl von Cosinus enthält, und $\cos nx$ nur in demjenigen A vorkommt, welches zu dem durch (36) bestimmten ν gehört, so wird die Fouriersche Reihe

$$(37) \qquad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx,$$

wobei

$$(38) \qquad \begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\nu^2(2^{\nu^3} - \lambda + 1)} \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, 2^{\nu^3}), \\ c_n &= \frac{1}{\nu^2(2^{\nu^3} - \lambda)} \qquad (\lambda = 2^{\nu^3} + 1, 2^{\nu^3} + 2, \cdots, 2 \cdot 2^{\nu^3}). \end{aligned}$$

Für $x = 0$ wird aber die $m_{\nu-1} + 2^{\nu^3}$te Partialsumme von (37) gleich

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^{\nu^3}} + \frac{1}{2^{\nu^3} - 1} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) > \frac{1}{\nu^2} \log 2^{\nu^3} = \nu \log 2,$$

was mit ν über alle Grenzen wächst, und folglich divergiert die Fouriersche

Reihe (37) für $x = 0$. Herr Fejér beweist ferner (l. c. S. 85—87), daß für $\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon$, wo ε positiv aber beliebig klein,

$$(39) \qquad \left| \sum_{m=n}^{N} c_m \cos mx \right| < \frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\nu - 1},$$

wo das durch (36) bestimmte ν offenbar mit n über alle Grenzen wächst, und folglich konvergiert (37) gleichmäßig in jedem Intervalle $\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$.

Diese Resultate des Herrn Fejér lassen sich unmittelbar auf die Legendresche Reihe übertragen. Der Ausdruck

$$(40) \qquad F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} C(m_\nu - m_{\nu-1}, m_{\nu-1}, x)$$

stellt eine für $-1 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion von x dar, denn wegen (34) konvergiert die Reihe in diesem Intervalle gleichmäßig. Genau wie oben wird bewiesen, daß die zugehörige Legendresche Reihe

$$(41) \qquad F(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n(x)$$

ist, wo c_n die in (38) angegebenen Konstanten sind. Wegen $P_n(1) = 1$ wird für $x = 1$ die $m_{\nu-1} + 2^{\nu^2}$te Partialsumme von (41) größer als $\nu \log 2$, und folglich divergiert (41) für $x = 1$. Fast wörtlich wie (39) wird die Ungleichung

$$\left| \sum_{m=n}^{N} c_m \sin \frac{2m+1}{2} u \right| < \frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\nu - 1}, \qquad (\varepsilon \leqq u \leqq 2\pi - \varepsilon)$$

bewiesen, und hieraus folgt durch Anwendung der zweiten Mehlerschen Formel für $0 < \varepsilon' < \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon'$

$$\left| \sum_{m=n}^{N} c_m P_m(\cos\theta) \right| \leqq \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\left| \sum_{m=n}^{N} c_m \sin \frac{2m+1}{2} u \right| du}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos u)}} < \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\nu - 1} \int_{\theta}^{\pi} \frac{du}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos u)}}$$

$$= \frac{8}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\nu - 1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 t}} < \frac{8}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\nu - 1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\nu - 1} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \leqq \frac{4\pi}{\varepsilon \sin \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{\nu - 1},$$

und weil in

$$\left|\sum_{m=n}^{N} c_m P_m(\cos\theta)\right| \leqq \frac{4\pi}{\varepsilon \sin\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{\nu-1}$$

beide Seiten von ε' unabhängig, die linke Seite aber auch für $\pi-\varepsilon' \leqq \theta \leqq \pi$ stetig ist, so gilt obige Ungleichung im ganzen Intervalle $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi$. Folglich konvergiert (41) gleichmäßig in jedem Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1-\varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$.

§ 4.

Zweites Beispiel der Du Bois Reymondschen Singularität.

Wir wollen zunächst einige Hilfsbetrachtungen anstellen, welche die Grundlagen dieses sowie des folgenden Paragraphen bilden sollen.

Es seien a und b zwei Nullstellen von $P_{2m+1}(x)$, wobei

$$0 \leqq a < b \leqq \frac{1}{2},$$

und es werde eine stetige Funktion von x mit dem ganzzahligen Parameter m definiert durch

$$\begin{aligned} f(x;m) &= \sqrt{2m+1}\,P_{2m+1}(x) \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b, \\ &= \varkappa\sqrt{2m+1}\,P_{2m+1}(x) \quad \text{für} \quad -b \leqq x \leqq -a, \text{ wo } \varkappa^2 = 1, \text{ und} \\ &= 0 \text{ für alle anderen } x \text{ im Intervalle } -1 \leqq x \leqq 1. \end{aligned}$$

Es bedeute

$$s_{2n}\{f(x;m)\}$$

die $2n+1^{\text{te}}$ Partialsumme der Legendreschen Reihe für $f(x;m)$; dann ist nach (4)

$$s_{2n}\{f(x;m)\} = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_{2n}(x)P_{2n+1}(y) - P_{2n+1}(x)P_{2n}(y)}{y-x} f(y;m)\,dy$$

oder

$$(42) \quad s_{2n}\{f(x;m)\} = \frac{2n+1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{P_{2n}(x)P_{2n+1}(y) - P_{2n+1}(x)P_{2n}(y)}{y-x} f(y;m)\,dy,$$

weil $f(y;m) = 0$ für $\frac{1}{2} < |y| \leqq 1$, oder endlich

$$(43) \quad s_{2n}\{f(x;m)\} = \frac{2n+1}{2}\int_{a}^{b} \frac{P_{2n}(x)P_{2n+1}(y) - P_{2n+1}(x)P_{2n}(y)}{y-x} f(y;m)\,dy$$
$$+ \frac{2n+1}{2}\int_{-b}^{-a} \frac{P_{2n}(x)P_{2n+1}(y) - P_{2n+1}(x)P_{2n}(y)}{y-x} f(y;m)\,dy.$$

Um jetzt $s_{2n}\{f(x;m)\}$ abzuschätzen, bemerken wir, daß dem Intervalle $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ das Intervall $\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{3}$ entspricht, in welchem $\sin\theta \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, sodaß nach (15)

$$|P_n(x)| < \frac{4}{\sqrt{\pi\sqrt{3}n}}, \qquad \left(-\tfrac{1}{2} \leqq x \leqq \tfrac{1}{2},\ n \geqq 1\right),$$

und folglich

$$(44)\quad |P_{2n}(x)| < \frac{2}{\sqrt{2n+1}},\quad |P_{2n+1}(x)| < \frac{2}{\sqrt{2n+1}},\quad |P_{2n+2}(x)| < \frac{2}{\sqrt{2n+1}}$$

für $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ und $n \geqq 2$. Wegen $|P_n(x)| \leqq 1$ sind obige Formeln auch für $n = 0$ und $n = 1$ gültig.

Es ist also für jeden Wert von m und n

$$(45)\qquad \left|\frac{2n+1}{2}\,\frac{P_{2n}(x)\,P_{2n+1}(y) - P_{2n+1}(x)\,P_{2n}(y)}{y-x}\,f(y;m)\right|$$

$$< \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{1}{|y-x|}\left(\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2n+1}} + \frac{2}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\right)\cdot\sqrt{2m+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{2m+1}}$$

$$= \frac{8}{|y-x|}$$

für $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}$, $x \neq y$.

Ferner ist nach (3)

$$\frac{P_{2n}(x)\,P_{2n+1}(y) - P_{2n+1}(x)\,P_{2n}(y)}{y-x} = P_{2n}(x)\,P'_{2n+1}(\xi) - P_{2n+1}(x)\,P'_{2n}(\xi)$$

$$= \frac{1}{1-\xi^2}\,[(2n+2)P_{2n}(x)(\xi P_{2n+1}(\xi) - P_{2n+2}(\xi))$$

$$-(2n+1)P_{2n+1}(x)(\xi P_{2n}(\xi) - P_{2n+1}(\xi))],$$

wo ξ zwischen x und y liegt, also $-\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}$, und zufolge (44)

$$(46)\qquad \left|\frac{2n+1}{2}\,\frac{P_{2n}(x)\,P_{2n+1}(y) - P_{2n+1}(x)\,P_{2n}(y)}{y-x}\,f(y;m)\right|$$

$$< \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\left[(2n+2)\cdot\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2n+1}} + \frac{2}{\sqrt{2n+1}}\right)\right.$$

$$\left.+ (2n+1)\cdot\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2n+1}} + \frac{2}{\sqrt{2n+1}}\right)\right]\cdot\frac{\sqrt{2m+1}\cdot 2}{\sqrt{2m+1}}$$

$$= 8(4n+3) < 64n, \qquad \left(-\tfrac{1}{2} \leqq x \leqq \tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2} \leqq y \leqq \tfrac{1}{2},\ n \geqq 1,\ m \geqq 1\right).$$

Endlich ist nach (3), wenn $f(x; m) = 0$,

$$\frac{f(y;m)}{y-x} = \frac{f(y;m) \pm f(x;m)}{y-x} = \pm\sqrt{2m+1}\,\frac{P_{2m+1}(y) - P_{2m+1}(x)}{y-x}$$
$$= \pm\sqrt{2m+1}\,P'_{2m+1}(\xi)$$
$$= \pm\frac{(2m+2)\sqrt{2m+1}}{1-\xi^2}\left(\xi P_{2m+1}(\xi) - P_{2m+2}(\xi)\right)$$
$$\text{für } a \leqq y \leqq b \text{ oder } -b \leqq y \leqq -a$$
$$= 0 \text{ für alle anderen } y, \text{ wo } -1 \leqq y \leqq 1,$$

und, weil $-\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}$, zufolge (44)

$$\tag{47} \left|\frac{2n+1}{2}\,\frac{P_{2n}(x)\,P_{2n+1}(y) - P_{2n+1}(y)\,P_{2n}(x)}{y-x}\,f(y;m)\right|$$
$$< \frac{2n+1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2n+1}} + \frac{2}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\right)$$
$$\cdot\frac{(2m+2)\sqrt{2m+1}}{1-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2m+1}} + \frac{2}{\sqrt{2m+1}}\right)$$
$$= 12(2m+2) < 64m,$$
$$\left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2},\ n \geqq 1,\ m \geqq 1\right).$$

Jetzt liege erstens x, wo $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, außerhalb der beiden Intervalle $(a, \cdots, b)$ und $(-b, \cdots, -a)$. Dann folgt aus (43) und (45)

$$|s_{2n}\{f(x;m)\}| < \int_a^b \frac{8\,dy}{|y-x|} + \int_{-b}^{-a} \frac{8\,dy}{|y-x|}$$
$$< 8\left(\log\frac{1}{|x-b|} + \log\frac{1}{|x-a|} + \log\frac{1}{|x+a|} + \log\frac{1}{|x+b|}\right)$$

oder

$$\tag{48} |s_{2n}\{f(x;m)\}| < 32 \log \max.\left(\frac{1}{|x-a|}, \frac{1}{|x+a|}, \frac{1}{|x-b|}, \frac{1}{|x+b|}\right).$$

Zweitens sei $f(x; m) = 0$ und $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$. Dann zerlegen wir

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2n+1}{2}\,\frac{P_{2n}(x)\,P_{2n+1}(y) - P_{2n+1}(x)\,P_{2n}(y)}{y-x}\,f(y;m)\,dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{\frac{1}{2}}.$$

Aus (45) folgt

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\delta}\right| < \int_{-\frac{1}{2}}^{x-\delta}\frac{8\,dy}{|y-x|} = \int_{-\frac{1}{2}}^{x-\delta}\frac{8\,dy}{x-y} = 8\left(\log\frac{1}{\delta} - \log\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right) \leqq 8\log\frac{1}{\delta},$$

$$\left|\int_{x+\delta}^{\frac{1}{2}}\right| < \int_{x+\delta}^{\frac{1}{2}}\frac{8\,dy}{|y-x|} = \int_{x+\delta}^{\frac{1}{2}}\frac{8\,dy}{y-x} = 8\left(\log\frac{1}{\delta} - \log\frac{1}{\frac{1}{2}-x}\right) \leqq 8\log\frac{1}{\delta},$$

und aus (46) bez. (47)

$$\left|\int_{x-\delta}^{x+\delta}\right| < 128 n\delta \text{ bez. } < 128 m\delta,$$

woraus infolge (42)

$$|s_{2n}\{f(x;m)\}| < 16\log\frac{1}{\delta} + 128 n\delta \text{ bez. } < 16\log\frac{1}{\delta} + 128 m\delta.$$

Setzen wir hier $\delta = \frac{1}{n}$ bez. $\delta = \frac{1}{m}$, so ergibt sich

$$(49) \qquad |s_{2n}\{f(x;m)\}| < 16\log\min.(m,n) + 128.$$

Drittens suchen wir eine untere Grenze für $|s_{2m}\{f(a;m)\}|$. Weil $P_{2m+1}(a) = 0$ ist, so gibt (43) nach Einsetzen des Wertes von $f(y;m)$:

$$(50)\ s_{2m}\{f(a;m)\} = \frac{(2m+1)^{\frac{3}{2}}}{2}P_{2m}(a)\left[\int_a^b \frac{P_{2m+1}^2(y)}{y-a}\,dy + \varkappa\int_{-b}^{-a}\frac{P_{2m+1}^2(y)}{y-a}\,dy\right]$$

$$= \frac{(2m+1)^{\frac{3}{2}}}{2}P_{2m}(a)\int_a^b\left(\frac{1}{y-a} - \frac{\varkappa}{y+a}\right)P_{2m+1}^2(y)\,dy.$$

Wir setzen jetzt

$$(51) \qquad a = \cos\alpha,\ \left(\frac{\pi}{3} < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{und} \quad b = \cos\beta,\ \left(\frac{\pi}{3} \leqq \beta < \alpha\right);$$

dann existiert nach (11) ein $\lambda > 0$ derart, daß

$$\alpha = \frac{4\lambda-1}{4m+3}\,\frac{\pi}{2} + \frac{h}{(4m+3)(2\lambda-1)}\cdot\frac{\pi}{6}, \quad -1 < h < 1;$$

folglich wird

$$\left|\cos\left(\frac{4m+1}{2}\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \sin\left(\alpha - \frac{h}{2\lambda-1}\cdot\frac{\pi}{12}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

und aus (9) und (14) folgt

$$|P_{2m}(\cos\alpha))| > \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi\cdot 2m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\sin\alpha}}\left(\left|\cos\left(\frac{4m+1}{2}\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{2(4m+3)\sin\alpha}\right)$$
$$> \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi(2m+1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{(4m+3)\sqrt{3}}\right)$$
$$\geqq \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi(2m+1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{7}\right)$$
$$> \frac{1}{3\sqrt{2m+1}}.$$

Ferner ist für $a \leqq y \leqq b$

$$\frac{1}{y-a}+\frac{1}{y+a} > \frac{1}{y-a},$$
$$\frac{1}{y-a}-\frac{1}{y+a} = \frac{2a}{y+a}\cdot\frac{1}{y-a} \geqq \frac{2a}{a+b}\cdot\frac{1}{y-a},$$

sodaß (50) ergibt

$$(52)\qquad |s_{2m}\{f(a;m)\}| > \frac{2m+1}{6}\int_a^b \frac{P_{2m+1}^2(y)}{y-a}\,dy \qquad \text{für}\quad \varkappa = -1,$$
$$> \frac{2m+1}{6}\cdot\frac{2a}{a+b}\int_a^b \frac{P_{2m+1}^2(y)}{y-a}\,dy \quad \text{für}\quad \varkappa = 1.$$

Es werden jetzt zwei ganze Zahlen λ' und λ'' bestimmt derart, daß $0 < \lambda' < \lambda''$ und

$$(53)\qquad \beta < \frac{2\lambda'-1}{4m+3}\pi, \quad \alpha > \frac{2\lambda''+1}{4m+3}\pi.$$

Dann ist wegen (16)

$$P_{2m+1}^2(\cos\theta) > \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{\pi(2m+1)}\cdot\frac{1}{2\sin\theta} \geqq \frac{9}{32\pi}\cdot\frac{1}{2m+1}$$
$$\text{für}\quad \frac{2\lambda}{4m+3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{2\lambda+1}{4m+3}\pi \quad \text{und} \quad \lambda' \leqq \lambda \leqq \lambda'';$$

ferner für $\beta < \theta < \alpha$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta-\cos\alpha} = \frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta+\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\alpha-\theta}{2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\alpha-\theta}{2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\alpha-\theta},$$

und folglich

$$\frac{2m+1}{6}\int_a^b \frac{P_{2m+1}^2(y)}{y-a}\,dy = \frac{2m+1}{6}\int_\beta^\alpha \frac{P_{2m+1}^2(\cos\theta)}{\cos\theta-\cos\alpha}\sin\theta\,d\theta > \frac{2m+1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int_\beta^\alpha \frac{P_{2m+1}^2(\cos\theta)\,d\theta}{\alpha-\theta}$$
$$> \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{9}{32\pi}\sum_{\lambda=\lambda'}^{\lambda''}\int_{\frac{2\lambda}{4m+3}\pi}^{\frac{2\lambda+1}{4m+3}\pi}\frac{d\theta}{\alpha-\theta} > \frac{1}{128}\sum_{\lambda=\lambda'}^{\lambda''}\int_{\frac{2\lambda}{4m+3}\pi}^{\frac{2\lambda+1}{4m+3}\pi}\frac{d\theta}{\alpha-\theta}.$$

Es ist aber

$$\int\limits_{\frac{2\lambda-1}{4m+3}\pi}^{\frac{2\lambda+1}{4m+3}\pi}\frac{d\theta}{\alpha-\theta}=\int\limits_{\frac{2\lambda-1}{4m+3}\pi}^{\frac{2\lambda}{4m+3}\pi}+\int\limits_{\frac{2\lambda}{4m+3}\pi}^{\frac{2\lambda+1}{4m+3}\pi}<2\int\limits_{\frac{2\lambda}{4m+3}\pi}^{\frac{2\lambda+1}{4m+3}\pi}\frac{d\theta}{\alpha-\theta},$$

woraus

$$(54)\qquad \frac{2m+1}{6}\int\limits_a^b\frac{P_{2m+1}^2(y)}{y-a}\,dy>\frac{1}{256}\sum_{\lambda=\lambda'}^{\lambda''}\int\limits_{\frac{2\lambda-1}{4m+3}\pi}^{\frac{2\lambda+1}{4m+3}\pi}\frac{d\theta}{\alpha-\theta}=\frac{1}{256}\int\limits_{\frac{2\lambda'-1}{4m+3}\pi}^{\frac{2\lambda''+1}{4m+3}\pi}\frac{d\theta}{\alpha-\theta}$$

$$=\frac{1}{256}\log\frac{\alpha-\frac{2\lambda'-1}{4m+3}\pi}{\alpha-\frac{2\lambda''+1}{4m+3}\pi}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, ein Beispiel der Du Bois Reymondschen Singularität zu konstruieren. Wir wählen in der Definition von $f(x; m)$ $\varkappa=-1$, $a=0$ und b beliebig sodaß $\frac{2\lambda'-1}{4m+3}\pi$ zwischen $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{3\pi}{8}$ liegt; wird ferner $\lambda''=m$ gesetzt, so geben (52) und (54)

$$(55)\qquad |s_{2m}\{f(0;m)\}|>\frac{1}{256}\log\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}}{\frac{\pi}{2(4m+3)}}=\frac{1}{256}\log\left(m+\frac{3}{4}\right)>\frac{1}{256}\log m.$$

Es sei ω eine später zu bestimmende ganze Zahl >1 und

$$(56)\qquad m_\nu=2^{\omega^{\nu\nu}};$$

die Funktion

$$(57)\qquad f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^\nu}f(x;m_\nu)$$

zeigt für $x=0$ die Du Bois Reymondsche Singularität. Es ist nämlich erstens $f(x)$, als gleichmäßig konvergente Reihe, deren Glieder stetige Funktionen sind, im Intervalle $(-1,\cdots,1)$ selber stetig. Zweitens ist aber die zugehörige Legendresche Reihe für $x=0$ divergent, wie sich folgendermaßen ergibt. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (57) ist offenbar

$$s_{2m_\nu}\{f(x)\}=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^\mu}s_{2m_\nu}\{f(x;m_\mu)\},$$

woraus

$$|s_{2m_\nu}\{f(0)\}| \geqq \frac{1}{\omega^\nu}|s_{2m_\nu}\{f(0;m_\nu)\}| - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{1}{\omega^\mu}|s_{2m_\nu}\{f(0;m_\mu)\}|$$
$$-\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{\omega^\mu}|s_{2m_\nu}\{f(0;m_\mu)\}|$$

folgt. Nun ist aber nach (49)

$$\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{1}{\omega^\mu}|s_{2m_\nu}\{f(0;m_\mu)\}| < \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{1}{\omega^\mu}(16\log m_\mu + 128) < (16\log m_{\nu-1}+128)\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{1}{\omega^\mu}$$
$$< (16\log m_{\nu-1}+128)\cdot\frac{1}{\omega-1}$$
$$= (16\log 2\cdot\omega^{(\nu-1)^2}+128)\cdot\frac{1}{\omega-1}$$
$$< 20\log 2\cdot\omega^{\nu^2-2\nu}$$

für ν hinreichend groß, und desgleichen

$$\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{\omega^\mu}|s_{2m_\nu}\{f(0;m_\mu)\}| < \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{\omega^\mu}(16\log m_\nu + 128)$$
$$= (16\log m_\nu + 128)\,\frac{1}{\omega^\nu(\omega-1)}$$
$$= (16\log 2\cdot\omega^{\nu\nu}+128)\cdot\frac{1}{\omega^\nu(\omega-1)}$$
$$< 20\log 2\cdot\omega^{\nu^2-\nu-1}.$$

Mit Hilfe von (55) erhalten wir also

$$s_{2m_\nu}\{f(0)\} > \omega^{\nu(\nu-1)}\log 2\cdot\left(\frac{1}{256}-\frac{20}{\omega}-\frac{20}{\omega^{2\nu}}\right),$$

was mit ν ins Unendliche wächst, wenn nur $\omega > 20\cdot 256$ gewählt wird.

§ 5.

Beispiel der Lebesgueschen Singularität.

In der Definition von $f(x;m)$ wählen wir jetzt $\varkappa = 1$ und betrachten für m die Werte $m_1, m_2, m_3, \cdots$, wo $m_{\nu+1} > m_\nu$ und $\lim\limits_{\nu=\infty} m_\nu = \infty$. Die zu $m = m_\nu$ gehörigen Werte von α und β bezeichnen wir mit α_ν bez. β_ν, und es sei für hinreichend großes ν_0

(58) $$\beta_\nu < \alpha_\nu < \beta_{\nu+1} < \alpha_{\nu+1} \quad (\nu=\nu_0,\ \nu_0+1,\ \nu_0+2,\cdots),$$
$$\lim_{\nu=\infty}\alpha_\nu = \lim_{\nu=\infty}\beta_\nu = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Dann ist

$$(59) \qquad f(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} f(x; m_\nu)$$

als gleichmäßig konvergente Reihe von stetigen, ungeraden Funktionen selber im Intervalle $(-1, \cdots, 1)$ stetig und ungerade. Ferner ist im Intervalle $\sin\varepsilon \leqq x \leqq 1$ (sowie auch, weil $f(x)$ ungerade, im Intervalle $-1 \leqq x \leqq -\sin\varepsilon$), wo ε positiv aber beliebig klein ist, unsere Funktion von beschränkter Schwankung; denn nach (58) läßt sich ein $\nu(\varepsilon)$ derart wählen daß, für $\nu > \nu(\varepsilon)$, $\beta_\nu > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ist, und folglich $f(x; m_\nu) = 0$ für $\sin\varepsilon \leqq x \leqq 1$ sobald $\nu > \nu(\varepsilon)$ ist. Im fraglichen Intervalle hat also

$$f(x) = \sum_{\nu=2}^{\nu(\varepsilon)} \frac{1}{\nu^2} f(x; m_\nu)$$

als Summe einer endlichen Anzahl von Funktionen beschränkter Schwankung selbst diese Eigenschaft. Die Legendresche Reihe für $f(x)$ konvergiert dann gleichmäßig*) für $\sin\varepsilon \leqq x \leqq 1$, sowie auch für $-1 \leqq x \leqq -\sin\varepsilon$ Diese Legendresche Reihe enthält, weil $f(x)$ ungerade, nur Kugelfunktionen ungerader Ordnung und konvergiert folglich auch für $x = 0$, indem sämtliche Glieder der Reihe gleich Null werden. Es lassen sich aber m_ν, α_ν und β_ν derart festlegen, daß die Konvergenz in der Umgebung von $x = 0$ nicht gleichmäßig wird. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$m_\nu = 2^{\nu^4},$$

$$(60) \qquad \begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{4(2^{\nu^4} - 2^{\nu^4 - \nu}) - 1}{4 \cdot 2^{\nu^4} + 3} \frac{\pi}{2} + \frac{h_\nu}{(4 \cdot 2^{\nu^4} + 3)(2 \cdot 2^{\nu^4} - 2 \cdot 2^{\nu^4 - \nu} - 1)} \frac{\pi}{6}, \qquad |h_\nu| < 1, \\ \beta_\nu &= \frac{4(2^{\nu^4} - 2^{\nu^4 - \nu} - 2^{\nu^4 - 2\nu}) - 1}{4 \cdot 2^{\nu^4} + 3} \frac{\pi}{2} + \frac{h'_\nu}{(4 \cdot 2^{\nu^4} + 3)(2 \cdot 2^{\nu^4} - 2 \cdot 2^{\nu^4 - \nu} - 2 \cdot 2^{\nu^4 - 2\nu} - 1)} \frac{\pi}{6}, \\ &|h'_\nu| < 1. \end{aligned}$$

(Zufolge (11) existieren nämlich immer Nullstellen dieser Form). Dann ist

$$(61) \qquad \begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right) + O\left(\frac{1}{2^{\nu^4}}\right), \\ \beta_\nu &= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^\nu} - \frac{1}{2^{2\nu}}\right) + O\left(\frac{1}{2^{\nu^4}}\right), \\ \alpha_\nu - \beta_\nu &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^{2\nu}} + O\left(\frac{1}{2^{\nu^4}}\right), \\ \beta_{\nu+1} - \alpha_\nu &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^\nu} - \frac{1}{2^{\nu+1}} - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right) + O\left(\frac{1}{2^{\nu^4}}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2^\nu} + O\left(\frac{1}{2^{2\nu}}\right), \end{aligned}$$

*) E. W. Hobson, On the representation of a function by a series of Legendre's functions, Proc. London Math. Soc. (2) 7 (1909), S. 24—39.

sodaß die Bedingungen (58) erfüllt sind. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (59) ist

$$s_{2m_\nu}\{f(x)\} = \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} s_{2m_\nu}\{f(x;\, m_\mu)\},$$

woraus

$$|s_{2m_\nu}\{f(a_\nu)\}| \geqq \frac{1}{\nu^2} |s_{2m_\nu}\{f(a_\nu;\, m_\nu)\}| - \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{\mu^2} |s_{2m_\nu}\{f(a_\nu;\, m_\mu)\}|$$

folgt. Um das erste Glied abzuschätzen, nehmen wir in (53)

$$\lambda' = 2(2^{\nu^4} - 2^{\nu^4-\nu} - 2^{\nu^4-2\nu}) + 1,$$
$$\lambda'' = 2(2^{\nu^4} - 2^{\nu^4-\nu}) - 2,$$

was offenbar angängig ist. Dann wird

$$\frac{\alpha_\nu - \frac{2\lambda'-1}{4m_\nu+3}\pi}{\alpha_\nu - \frac{2\lambda''+1}{4m_\nu+3}\pi} = 2^{\nu^4-2\nu} + O(1),$$

sowie

$$\frac{2a_\nu}{a_\nu+b_\nu} = 1 + O\left(\frac{1}{2^{2\nu}}\right),$$

und es kommt nach (52) und (54)

$$|s_{2m_\nu}\{f(a_\nu;\, m_\nu)\}| > \frac{(\nu^4-2\nu)\log 2}{256}\left(1 + O\left(\frac{1}{2^{2\nu}}\right)\right) > \frac{\log 2}{300} \cdot \nu^4 \quad \text{für} \quad \nu > \nu_0;$$

ferner folgt aus (61)

$$\log \max_{\mu \neq \nu} \left(\frac{1}{|a_\mu - a_\nu|}, \frac{1}{|a_\mu + a_\nu|}, \frac{1}{|b_\mu - a_\nu|}, \frac{1}{|b_\mu + a_\nu|}\right) = \log \frac{1}{|b_{\nu+1} - a_\nu|} = O(\nu),$$

sodaß endlich, zufolge (48)

$$|s_{2m_\nu}\{f(a_\nu)\}| > \frac{\log 2}{300} \cdot \nu^2 - O(\nu) \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{\mu^2},$$

was mit ν ins Unendliche wächst, und wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ konvergiert demnach die Legendresche Reihe von $f(x)$ nicht gleichmäßig in der Umgebung von $x = 0$.

Zweiter Teil.

§ 6.

Die Lebesgueschen Konstanten erster Ordnung.

Wir betrachten jetzt statt der $n+1^{\text{ten}}$ Partialsumme $s_n\{f(\theta, \varphi)\}$ der Laplaceschen Reihe von $f(\theta, \varphi)$ das arithmetische Mittel

$$(62) \qquad s'_n\{f(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu\{f(\theta, \varphi)\}.$$

Setzen wir

$$(63) \qquad s'_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu(x),$$

so wird offenbar

$$s'_n\{f(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_K f(\theta', \varphi')\, s'_n(\cos\gamma)\, do'.$$

Betrachten wir, wie in § 2, die Klasse aller auf der Einheitskugel K im Riemannschen Sinne absolut integrablen Funktionen vom absoluten Betrage $\leqq 1$, so ist

$$|s'_n\{f(\theta, \varphi)\}| \leqq \frac{1}{4\pi} \int\limits_K |s'_n(\cos\gamma)|\, do',$$

und das absolute Maximum

$$\varrho'_n(\theta, \varphi) = \text{Max.}\, |s'_n\{f(\theta, \varphi)\}| = \frac{1}{4\pi} \int\limits_K |s'_n(\cos\gamma)|\, do'$$

wird im Punkte (θ, φ) erreicht, wenn f so gewählt wird, daß

$$f(\theta', \varphi') = \text{sgn.}\, s'_n(\cos\gamma).$$

Durch Verlegung des Nordpols nach (θ, φ) wird

$$\varrho'_n(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |s'_n(\cos\theta')| \sin\theta' d\theta' d\varphi' = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |s'_n(\cos\theta')| \sin\theta' d\theta',$$

also von (θ, φ) unabhängig; schreiben wir demnach $\varrho'_n(\theta, \varphi) = \varrho'_n$ und setzen $\cos\theta' = x$, so wird

$$(64) \qquad \varrho'_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |s'_n(x)|\, dx, \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

und diese Konstanten ϱ'_n werden als die *Lebesgueschen Konstanten erster Ordnung der Laplaceschen Reihe* bezeichnet. Es soll jetzt gezeigt werden, daß dieselben für alle Werte von n beschränkt sind. Aus (63) und (5) folgt

$$s'_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) \frac{P_\nu(x) - P_{\nu+1}(x)}{1-x}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-x} \left(\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x) + \sum_{\nu=0}^{n} (\nu P_\nu(x) - (\nu+1) P_{\nu+1}(x)) \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-x} \left(\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x) - (n+1) P_{n+1}(x) \right)$$

oder, indem wir die Bezeichnung

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x) \tag{65}$$

einführen,

$$s'_n(x) = \frac{U_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x}. \tag{66}$$

Es seien jetzt $x_1 > x_2 > \cdots > x_m$ diejenigen zwischen -1 und 1 gelegenen Nullstellen von $s'_n(x)$, an welchen Zeichenwechsel stattfindet*); ferner werde $x_0 = 1$ gesetzt. Weil zufolge (63) $s'_n(1) > 0$, so ist

$$|s'_n(x)| = (-1)^\nu s'_n(x) \quad \text{für} \quad x_\nu \geqq x \geqq x_{\nu+1},$$

und (64) ergibt

$$\varrho'_n = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{m-1} \int_{x_{\nu+1}}^{x_\nu} |s'_n(x)|\, dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{x_m} |s'_n(x)|\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu \int_{x_{\nu+1}}^{x_\nu} s'_n(x)\, dx + \frac{(-1)^m}{2} \int_{-1}^{x_m} s'_n(x)\, dx.$$

Zufolge (6) ist aber

$$\int_{-1}^{x} s_n(x)\, dx = P_n(x) + P_{n+1}(x),$$

sodaß

$$\int_{-1}^{x} s'_n(x)\, dx = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} (P_\nu(x) + P_{\nu+1}(x))$$

$$= \frac{2}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x) + \frac{1}{n+1} (P_{n+1}(x) - P_0(x)),$$

*) Es läßt sich beweisen, daß $m = n$, d. h. daß sämtliche Nullstellen von $s'_n(x)$ einfach sind und im Intervalle $(-1, \cdots, 1)$ liegen. Dieser Satz ist jedoch für die vorliegende Untersuchung entbehrlich.

oder wegen (65)

$$\int_{-1}^{x} s'_n(x)\,dx = 2\,U_n(x) + \frac{1}{n+1}\,P_{n+1}(x) - \frac{1}{n+1}.$$

Für $x = x_\nu$ $(\nu = 0, 1, \cdots, m)$ wird nach (65) und (66) $U_n(x_\nu) = P_{n+1}(x_\nu)$ und daher

$$\int_{-1}^{x_\nu} s'_n(x)\,dx = \left(2 + \frac{1}{n+1}\right) U_n(x_\nu) - \frac{1}{n+1},$$

$$\int_{x_{\nu+1}}^{x_\nu} s'_n(x)\,dx = \int_{-1}^{x_\nu} - \int_{-1}^{x_{\nu+1}} = \left(2 + \frac{1}{n+1}\right)(U_n(x_\nu) - U_n(x_{\nu+1})).$$

Der vorhin erhaltene Ausdruck für ϱ'_n wird dann

$$\varrho'_n = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{n+1}\right)\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^\nu(U_n(x_\nu) - U_n(x_{\nu+1}))$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2}\left(2 + \frac{1}{n+1}\right) U_n(x_m) - \frac{(-1)^m}{2(n+1)},$$

oder nach einigen Reduktionen

$$(67)\qquad \varrho'_n = 1 + \frac{1 + (-1)^{m+1}}{2(n+1)} + \left(2 + \frac{1}{n+1}\right)\sum_{\nu=1}^{m}(-1)^\nu\, U_n(x_\nu).^{*})$$

Wir wollen nunmehr nach derselben Methode, durch welche Stieltjes zur Formel (7) gelangte, einen asymptotischen Ausdruck für $U_n(x)$ herstellen, um sodann die Wurzeln von $s'_n(x) = 0$ und den Wert von ϱ'_n abzuschätzen.

Es ist bekanntlich

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,z^n,$$

woraus

$$\frac{1}{(1-z)\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x)\right)\cdot z^n,$$

oder wenn wir $\frac{1}{z}$ statt z schreiben,

$$\frac{1}{(z-1)\sqrt{z^2 - 2xz + 1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x)\right)\cdot z^{-n-2},$$

*) In dem Falle, daß es keine Wurzeln $x_1, \cdots, x_m$ der verlangten Eigenschaft gäbe, erhielte man durch dieselbe Analyse einfach

$$(67\text{a})\qquad \varrho'_n = 1.$$

und folglich, wenn wir $x = \cos\theta$ einführen, nach dem Cauchyschen Satze

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^{n+1}\,dz}{(z-1)\sqrt{(z-e^{\theta i})(z-e^{-\theta i})}},$$

wo der Integrationsweg C alle drei singulären Punkte umschließt. Die Integration geschieht in positivem Sinne, und die Wurzel ist eindeutig festgelegt durch die Forderung, daß dieselbe für $z = +\infty$ positiv unendlich wird. Der Weg C bestehe jetzt aus drei der Reihe nach folgenden, von $z = 0$ ausgehenden Schleifen um je einen der Punkte $z = 1$, $z = e^{\theta i}$ und $z = e^{-\theta i}$. Weil die Wurzel auf der reellen Achse für $0 < \theta < \pi$ nirgends verschwindet, ist auf der ersten Schleife (um $z = 1$) im Anfangspunkte $z = 0$ der Wert der Wurzel $= +1$ zu nehmen. Dann liefert die Integration längs der Schleife um $z = 1$ den Beitrag

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^{\theta i})(1-e^{-\theta i})}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

die Schleife um $z = e^{\theta i}$ den Beitrag

$$2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{e^{\theta i}} \frac{z^{n+1}\,dz}{(z-1)\sqrt{(z-e^{\theta i})(z-e^{-\theta i})}},$$

wo das Integral gradlinig ist und die Wurzel für $z = 0$ den Anfangswert $+1$ hat. Die Schleife um $z = e^{-\theta i}$ liefert endlich, da die Wurzel durch Umkreisung von $z = e^{\theta i}$ ihr Vorzeichen geändert hat, den Beitrag

$$-2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{e^{-\theta i}} \frac{z^{n+1}\,dz}{(z-1)\sqrt{(z-e^{\theta i})(z-e^{-\theta i})}},$$

wo das Integral geradlinig ist und die Wurzel für $z = 0$ den Wert $+1$ hat, und wir bekommen also

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(\cos\theta) = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} + 2\Re\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{e^{\theta i}} \frac{z^{n+1}\,dz}{(z-1)\sqrt{(z-e^{\theta i})(z-e^{-\theta i})}},$$

wo $\Re$ den reellen Teil des dahinterstehenden Ausdruckes bedeutet. Wir setzen weiter

$$z = e^{\theta i}(1-u),$$

wo u zwischen 0 und 1 verläuft, und erhalten

$$\sqrt{(z-e^{\theta i})(z-e^{-\theta i})} = \sqrt{2\sin\theta}\, e^{\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)i}\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{e^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)i}}{2\sin\theta}\cdot u},$$

wobei $\sqrt{2\sin\theta}$ und $\sqrt{u}$ positiv, sowie für die letzte Wurzel derjenige Wert zu wählen ist, welcher für $u = 0$ gleich $+1$ ist. Dann ist nämlich, da der reelle Teil der letzten Wurzel für $0 \leqq u \leqq 1$ niemals verschwindet, dieser reelle Teil für $u = 1$ (wo $z = 0$) positiv, und der ganze Ausdruck rechts für $u = 1$ gleich $+1$, wie es sein sollte.

Die vorhergehende Formel bekommt durch Einführung von u jetzt die Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(\cos\theta) = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$+\frac{1}{\pi\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{2\sin\theta}}\,\Re e^{\left((n+1)\theta-\frac{3\pi}{4}\right)i}\int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}\,du}{\left(1-\frac{e^{\frac{\theta-\pi}{2}i}}{2\sin\frac{\theta}{2}}u\right)\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{e^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)i}}{2\sin\theta}\cdot u}}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich durch weitere Verfolgung des von Stieltjes eingeschlagenen Weges eine vollständige asymptotische Formel derselben Art wie (7) herstellen; uns wird hier schon eine einfache Abschätzung genügen.

Es ist offenbar für $0 \leqq u \leqq 1$

$$\left|1-\frac{e^{\frac{\theta-\pi}{2}i}}{2\sin\frac{\theta}{2}}u\right|^2 = \left(1-\frac{u}{2}\right)^2+\frac{u^2}{4}\cot^2\frac{\theta}{2} \geqq \left(1-\frac{u}{2}\right)^2 \geqq \frac{1}{4},$$

$$\left|1-\frac{e^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)i}}{2\sin\theta}u\right|^2 = \left(1-\frac{u}{2}\right)^2+\frac{u^2}{4}\cot^2\theta \geqq \left(1-\frac{u}{2}\right)^2 \geqq \frac{1}{4};$$

folglich

$$\left|\frac{1}{\left(1-\frac{e^{\frac{\theta-\pi}{2}i}}{2\sin\frac{\theta}{2}}u\right)\sqrt{1-\frac{e^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)i}}{2\sin\theta}u}}\right| < 2\sqrt{2},$$

und nach der vorangehenden Gleichung

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(\cos\theta) - \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right| < \frac{1}{\pi\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{2\sin\theta}}\cdot 2\sqrt{2}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+1}\,du,$$

sowie durch Auswertung des Integrals und Division durch $n+1$

$$(68)\quad U_n(\cos\theta)=\frac{1}{2(n+1)\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{2}{\pi\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\sin\theta}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2)}{(n+1)\Gamma\left(n+2+\frac{1}{2}\right)}\,M_1(n,\theta),$$

$$|M_1(n,\theta)|<1,$$

oder auf Grund von (14)

$$(69)\qquad U_n(\cos\theta)=\frac{1}{2(n+1)\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{2\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)M_1(n,\theta)}{\sqrt{\pi}\sqrt{(n+1)^3\sin\theta}\cdot\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Die Formel (7) liefert mit $p=1$

$$P_{n+1}(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2)}{\Gamma\left(n+2+\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2n+5}\cdot\frac{M_2(n,\theta)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

$$|M_2(n,\theta)|<1,$$

und aus (66) und (68) erhalten wir, unter Benutzung von (14)

$$(70)\qquad \frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(n+2+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2)}(1-\cos\theta)(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}s_n'(\cos\theta)$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(n+2+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2)}\,\frac{\sin\theta\sqrt{2\sin\theta}}{(n+1)\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}M_1(n,\theta)$$

$$-2\sin\theta\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{M_2(n,\theta)}{2n+5}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{n+1}}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\sin\theta}-2\sin\theta\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{4\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}M_1(n,\theta)}{n+1}-\frac{M_2(n,\theta)}{2n+5}$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\sin\theta}}{\sqrt{2n+3}}-2\sin\theta\cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{13\,M_3(n,\theta)}{2n+3},$$

$$|M_3(n,\theta)|<1,$$

wobei der letzte Ausdruck nur für $n\geqq N$ gilt, wo N hinreichend groß ist. Wir setzen jetzt

$$\theta=\frac{2\lambda}{2n+3}\pi,\qquad (1\leqq\lambda\leqq n),$$

sodaß

$$\cos\left(\frac{2n+3}{2}\,\theta-\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^{\lambda}\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wegen $\theta > \sin\theta \geqq \frac{2}{\pi}\,\theta$ für $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ haben wir

$$\frac{2\lambda}{2n+3}\,\pi > \sin\frac{2\lambda}{2n+3}\,\pi \geqq \frac{2\cdot 2\lambda}{2n+3} \quad \text{für} \quad 0 < \frac{2\lambda}{2n+3}\,\pi \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{2n+3-2\lambda}{2n+3}\,\pi > \sin\frac{2\lambda}{2n+3}\,\pi \geqq \frac{2(2n+3-2\lambda)}{2n+3} \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \frac{2\lambda}{2n+3}\,\pi < \pi;$$

ferner ist für hinreichend großes N

$$2\pi\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) < 7, \qquad (n \geqq N),$$

und wir erhalten

$$\left|2\sin\theta\cos\left(\frac{2n+3}{2}\,\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right| - \left|\frac{\sqrt{2\pi}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{2n+3}}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\sin\theta}+\frac{13\,M_3(n,\theta)}{2n+3}\right|$$

$$> \frac{1}{2n+3}\left(2\cdot 2\cdot 2\lambda\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2\pi}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\sqrt{2\cdot 2\lambda\pi}-13\right)$$

$$> \frac{1}{2n+3}\left(2\sqrt{2}\cdot 2\lambda-7\sqrt{2\lambda}-13\right)$$

$$> 0 \quad \text{für} \quad 2\lambda \geqq 16 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{2\lambda\pi}{2n+3} \leqq \frac{\pi}{2};$$

für $\frac{\pi}{2} \leqq \frac{2\lambda\pi}{2n+3} < \pi$ ist in obiger Ungleichung 2λ durch $2n+3-2\lambda$ zu ersetzen. Für $2\lambda \geqq 16$, $2n+3-2\lambda \geqq 16$, d. h. für $8 \leqq \lambda \leqq n-7$ ist folglich nach (70)

$$\operatorname{sgn.} s_n'\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{2n+3}\right) = -\operatorname{sgn.}\cos\left(\frac{2n+3}{2}\cdot\frac{2\lambda\pi}{2n+3}-\frac{\pi}{4}\right) = (-1)^{\lambda+1}.$$

Das Intervall

$$\frac{2\lambda}{2n+3}\,\pi < \theta < \frac{2\lambda+2}{2n+3}\,\pi, \qquad (8 \leqq \lambda \leqq n-8,\ n \geqq N) \tag{71}$$

enthält demnach eine ungerade Anzahl von Wurzeln von $s_n'(\cos\theta)=0$. In diesem Intervalle liegt also mindestens eine Wurzel ungerader Ordnung, die wir mit θ_λ bezeichnen; wenn es deren mehrere gibt, sei θ_λ die kleinste unter ihnen. Wir hatten vorhin mit $x_1, x_2, \cdots, x_m$, wo

$$1 \geqq x_1 > x_2 > \cdots > x_{m-1} > x_m \geqq -1,$$

diejenigen Wurzeln von $s_n'(x)=0$ bezeichnet, in denen Zeichenwechsel stattfinden; folglich gehört zu jedem (71) genügenden λ ein $\nu=\nu_\lambda$ derart, daß

$$\cos\,\theta_\lambda = x_{\nu_\lambda},$$

und es ist offenbar

$$\nu_{\lambda+1} > \nu_\lambda, \quad \nu_{\lambda+1} - \nu_\lambda \equiv 1 \pmod{2},$$

d. h.

$$\nu_{\lambda+1} - (\lambda+1) \equiv \nu_\lambda - \lambda \pmod{2},$$

sodaß

$$\sum_{\nu=1}^{m}(-1)^\nu U_n(x_\nu) = (-1)^{\nu_8-8}\sum_{\lambda=8}^{n-8}(-1)^\lambda U_n(\cos\theta_\lambda) + \Sigma'(-1)^\nu U_n(x_\nu),$$

wo Σ' sich auf die bei der Zuordnung $\cos\theta_\lambda = x_{\nu_\lambda}$ möglicherweise übrig gebliebenen x_ν bezieht. Weil $s_n(x)$ vom n^{ten} Grade ist, so ist zufolge (71) die Anzahl jener x_ν höchstens $7+7+1=15$, und wegen $|U_n(x)| \leqq 1$ für $-1 \leqq x \leqq 1$ ist also $|\Sigma'| \leqq 15$. Um den Nachweis zu führen, daß für $n \geqq N$ alle ϱ_n' unter einer endlichen Schranke bleiben, genügt es demnach wegen (67) dasselbe für die Summen

$$\sum_{\lambda=8}^{n-8}(-1)^\lambda U_n(\cos\theta_\lambda)$$

zu beweisen. Infolge (69) ist

$$\sum_{\lambda=8}^{n-8}(-1)^\lambda U_n(\cos\theta_\lambda) = \sum_{\lambda=8}^{n-8}\frac{(-1)^\lambda}{2(n+1)\sin\frac{\theta_\lambda}{2}} + \sum_{\lambda=8}^{n-8}\frac{(-1)^\lambda\cdot 2\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)M_1(n,\theta_\lambda)}{\sqrt{\pi}\sqrt{(n+1)^3\sin\theta_\lambda}\cdot\sin\frac{\theta_\lambda}{2}}$$
$$= \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Für $\theta_\lambda \leqq \frac{\pi}{2}$ ist nach (71) $2\lambda \leqq \frac{2n+3}{2}$, d. h. $\lambda \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$ und

$$\sin\theta_\lambda > \sin\frac{2\lambda\pi}{2n+3} \geqq \frac{4\lambda}{2n+3}; \quad \sin\frac{\theta_\lambda}{2} > \sin\frac{\lambda\pi}{2n+3} > \frac{2\lambda}{2n+3},$$

sowie

$$\left|\frac{(-1)^\lambda\cdot 2\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)M_1(n,\theta_\lambda)}{\sqrt{\pi}\sqrt{(n+1)^3\sin\theta_\lambda}\cdot\sin\frac{\theta_\lambda}{2}}\right| < \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} < \frac{4}{\lambda^{\frac{3}{2}}},$$
$$(n \geqq N);$$

desgleichen, für $\frac{\pi}{2} \leqq \theta_\lambda < \pi$, $2\lambda + 2 \geqq \frac{2n+3}{2}$, d. h. $\lambda \geqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$ und

$$\sin\theta_\lambda > \sin\frac{2\lambda+2}{2n+3}\pi \geqq \frac{2(2n-2\lambda+1)}{2n+3} > \frac{4(n-\lambda)}{2n+3},$$

$$\sin\frac{\theta_\lambda}{2} \geqq \sin\frac{\pi}{4} > \frac{2(n-\lambda)}{2n+3},$$

sowie

$$\frac{(-1)^{\lambda}\, 2\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) M_1(n,\theta_\lambda)}{\sqrt{\pi}\sqrt{(n+1)^3\sin\theta_\lambda}\cdot\sin\frac{\theta_\lambda}{2}} < \frac{4}{(n-\lambda)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (n \geqq N).$$

Es ist also für $n \geqq N$

$$|\Sigma_2| < \sum_{\lambda=8}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{4}{\lambda^{\frac{3}{2}}} + \sum_{\lambda=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n-8} \frac{4}{(n-\lambda)^{\frac{3}{2}}} \leqq 2\sum_{\lambda=8}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{4}{\lambda^{\frac{3}{2}}} < 8\sum_{\lambda=8}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}},$$

d. h. wegen der Konvergenz der unendlichen Reihe beschränkt.

Die Reihe Σ_1 ist alternierend, und zwar nehmen ihre Glieder dem absoluten Betrage nach ab, weil zufolge (71) $\theta_{\lambda+1} > \theta_\lambda$ ist. Wir haben demnach

$$|\Sigma_1| < \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{\theta_8}{2}} < \frac{1}{2(n+1)\cdot\frac{2\cdot 8}{2n+3}} < \frac{1}{8}, \qquad (n \geqq N).$$

Nach dem vorher Gesagten ist also ϱ_n' für alle $n \geqq N$, d. h. überhaupt für alle $n \geqq 0$, beschränkt, sodaß

$$(72) \qquad 0 < \varrho_n' < R, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo R eine Konstante ist.

§ 7.

Die Konvergenz der arithmetischen Mittel erster Ordnung für absolut integrable Funktionen.

Zunächst wollen wir den folgenden Hilfssatz ableiten: Für $0 < \theta < \pi$ ist

$$(73) \qquad |s_n'(\cos\theta)| < \frac{12}{(1-\cos\theta)\sqrt{\sin\theta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Wegen (15) ist für $0 < \theta < \pi$, $n \geqq 1$

$$|P_n(\cos\theta)| < \frac{4}{\sqrt{(2n+1)\sin\theta}},$$

welche Ungleichung wegen $P_0(\cos\theta) = 1$ auch für $n = 0$ gilt, und aus (65) und (66) folgt

$$|s_n'(\cos\theta)| \leqq \frac{1}{1-\cos\theta}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} |P_\nu(\cos\theta)| + |P_{n+1}(\cos\theta)|\right)$$

$$< \frac{4}{(1-\cos\theta)\sqrt{\sin\theta}}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\right),$$

und es ist

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}<\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$<\frac{2}{2n+1}\left(1+\int_0^n\frac{du}{\sqrt{2u+1}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$=\frac{2}{2n+1}\sqrt{2n+1}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\frac{3}{\sqrt{2n+1}},$$

woraus der Hilfssatz sofort folgt.

Hauptsatz. *Es sei $f(\theta,\varphi)$ eine auf der Einheitskugel K im Riemannschen Sinne absolut integrable Funktion; dann konvergieren in jedem Punkte (θ,φ), wo $f(\theta,\varphi)$ stetig ist, die arithmetischen Mittel erster Ordnung der zugehörigen Laplaceschen Reihe gegen die Funktion selbst:*

$$\lim_{n=\infty} s'_n\{f(\theta,\varphi)\}=f(\theta,\varphi),$$

und in einem Bereiche T, der ganz im Inneren eines Stetigkeitsbereiches von $f(\theta,\varphi)$ liegt, ist die Konvergenz gleichmäßig.

Zum Beweise ziehen wir auf der Einheitskugel um den Punkt (θ,φ) und seinen Gegenpol $(\pi-\theta,\varphi+\pi)$ je einen Kreis vom sphärischen Radius $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ und teilen dadurch K in drei Teile. Der Teil, welcher (θ,φ) enthält, heiße K_1, derjenige welcher $(\pi-\theta,\varphi+\pi)$ enthält, heiße K_2, und der übrig bleibende Teil K_3. Dann ist

$$(74)\quad s'_n\{f(\theta,\varphi)\}=\frac{1}{4\pi}\int_K f(\theta',\varphi')\,s'_n(\cos\gamma)\,do'=\frac{1}{4\pi}\int_{K_1}+\frac{1}{4\pi}\int_{K_2}+\frac{1}{4\pi}\int_{K_3}.$$

Es sei δ eine beliebig kleine, positive Größe. Wir können dann, weil $f(\theta,\varphi)$ im Punkte (θ,φ) stetig ist, ε so klein wählen, daß in jedem Punkte von K_1

$$(75)\qquad |f(\theta,\varphi)-f(\theta',\varphi')|<\frac{\delta}{3R}$$

(und zwar, nach dem Heine-Borelschen Satz, gleichmäßig für alle (θ,φ) des Bereiches T). Dann kommt nach (72)

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{K_1} f(\theta',\varphi')\,s'_n(\cos\gamma)\,do'-f(\theta,\varphi)\cdot\frac{1}{4\pi}\int_{K_1} s'_n(\cos\gamma)\,do'\right|$$

$$<\frac{\delta}{3R}\cdot\frac{1}{4\pi}\int_{K_1}|s'_n(\cos\gamma)|\,do'<\text{—}\cdot\frac{1}{4\pi}\int_K|s'_n(\cos\gamma)|\,do'=\frac{\delta}{3R}\cdot\varrho'_n<\frac{\delta}{3}.$$

Es ist ferner

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int\limits_{K_1} s_n'(\cos\gamma)\, do' - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{K} s_n'(\cos\gamma)\, do' \right| < \frac{1}{4\pi} \int\limits_{K_2} |s_n'(\cos\gamma)|\, do'$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{K_3} |s_n'(\cos\gamma)|\, do',$$

und weil in K_2 $\pi - \varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi$ ist, so folgt aus (65) und (66)

$$(76) \quad |s_n'(\cos\gamma)| < \frac{1}{1-\cos\gamma} \left(|U_n(\cos\gamma)| + |P_{n+1}(\cos\gamma)| \right) \leqq \frac{1}{1-\cos\gamma} (1+1)$$

$$\leqq \frac{2}{1+\cos\varepsilon} < 2,$$

sodaß

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{K_2} |s_n'(\cos\gamma)|\, do' < \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K_2} do' = 1 - \cos\varepsilon;$$

ferner ist in K_3 infolge (73)

$$(77) \quad |s_n'(\cos\gamma)| < \frac{12}{(1-\cos\gamma)\sqrt{\sin\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leqq \frac{12}{(1-\cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

und daher

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{K_3} |s_n'(\cos\gamma)|\, do' < \frac{12}{(1-\cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{1}{4\pi} \int\limits_{K_3} do'$$

$$< \frac{12}{(1-\cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Es ist außerdem

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{K} s_n'(\cos\gamma)\, do' = 1,$$

denn nach der Definition von $s_n'(x)$ ist

$$s_n'(x) = 1 + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x),$$

wo $c_1, c_2, \cdots, c_n$ Konstanten sind, und nach der Grundeigenschaft der Kugelfunktionen haben wir

$$\int\limits_{K} P_n(\cos\gamma)\, do' = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Dies alles zusammengenommen, ergibt

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int\limits_{K} f(\theta', \varphi')\, s_n'(\cos\gamma)\, do' - f(\theta, \varphi) \right|$$

$$< \frac{\delta}{3} + |f(\theta, \varphi)| \left(1 - \cos\varepsilon + \frac{12}{(1-\cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right).$$

In K_2 haben wir zufolge (76)

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2} f(\theta', \varphi')\, s_n'(\cos\gamma)\, do'\right| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_{K_2} |f(\theta', \varphi')|\, do',$$

und wegen der absoluten Integrabilität von $f(\theta, \varphi)$ läßt sich das Integral rechts durch angemessene Wahl von ε beliebig klein machen (und zwar, wie aus dem Heine-Borelschen Beweisverfahren sofort einleuchtet, gleichmäßig für alle (θ, φ) des Bereiches T).

Endlich ist zufolge (77)

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_3} f(\theta', \varphi') s_n'(\cos\gamma)\, do'\right|$$

$$< \frac{12}{(1-\cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_3} |f(\theta', \varphi')|\, do'$$

$$\leqq \frac{12}{(1-\cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot G,$$

wo

$$G = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K} |f(\theta', \varphi')|\, do'$$

wegen der absoluten Integrabilität endlich ist.

Die vorherigen Abschätzungen zusammenfassend, erhalten wir aus (74)

$$(78)\qquad |s_n'\{f(\theta, \varphi)\} - f(\theta, \varphi)|$$

$$< \frac{\delta}{3} + \left[|f(\theta, \varphi)|\,(1-\cos\varepsilon) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{K_2} |f(\theta', \varphi')\, do'\right]$$

$$+ \frac{12}{(1-\cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}}\,(|f(\theta, \varphi)| + G) \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Nun läßt sich nach dem vorhin Gesagten ε so klein wählen, daß erstens (75) erfüllt ist und zweitens das eingeklammerte Glied rechts in (78) kleiner als $\frac{\delta}{3}$ wird (und zwar gleichmäßig für alle (θ, φ) des Bereiches T). Nach Festlegung von ε läßt sich dann N so groß wählen, das für $n \geqq N$ das letzte Glied rechts in (78) $< \frac{\delta}{3}$ wird (und zwar gleichmäßig für alle (θ, φ) im Bereiche T). Es ist demnach

$$|s_n'\{f(\theta, \varphi)\} - f(\theta, \varphi)| < \delta \text{ für } n \geqq N \quad (\text{und } (\theta, \varphi) \text{ in } T),$$

womit der Hauptsatz bewiesen ist.

Wir wollen ferner diejenige Art der Unstetigkeit von $f(\theta, \varphi)$ betrachten, welche der gewöhnlichen Dirichletschen Unstetigkeit bei den Fourierschen Reihen entspricht.

Durch den Punkt (θ, φ) legen wir einen Großkreisbogen, dessen geographische Länge, von einem beliebigen festen Punkt auf dem zu (θ, φ) als Nordpol gehörigen Äquator aus gemessen, ψ sei. Wir nehmen an, daß wenn θ', φ' auf diesem Großkreisbogen sich dem Punkte (θ, φ) nähert,

$$\lim f(\theta', \varphi') = F(\theta, \varphi, \psi)$$

und zwar gleichmäßig für $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$, wobei $F(\theta, \varphi, \psi)$ eine integrable Funktion von ψ sein soll.

In einem derartigen Unstetigkeitspunkte (θ, φ) *ist nun*

$$\lim_{n=\infty} s_n'\{f(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi)\, d\psi. \tag{79}$$

Zum Beweise benutzen wir wiederum die Zerlegung (74) und betrachten zuerst K_1. Wir können dann bei beliebig kleinem δ unser ε so klein wählen, daß, wenn (θ', φ') in K_1 auf dem zu ψ gehörigen Großkreisbogen liegt

$$|f(\theta', \varphi') - F(\theta, \varphi, \psi)| < \frac{\delta}{3R} \tag{80}$$

wird für jedes ψ, wo $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$. Dann wird wie vorhin

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{K_1} f(\theta', \varphi')\, s_n'(\cos\gamma)\, do' - \frac{1}{4\pi}\int_{K_1} F(\theta, \varphi, \psi)\, s_n'(\cos\gamma)\, do'\right|$$
$$< \frac{\delta}{3R}\cdot\frac{1}{4\pi}\int_{K_1} |s_n'(\cos\gamma)|\, do' < \frac{\delta}{3}\cdot$$

Indem wir den Nordpol nach θ, φ verlegen, wird

$$\frac{1}{4\pi}\int_{K_1} F(\theta, \varphi, \psi)\, s_n'(\cos\gamma)\, do'$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi)\, s_n'(\cos\theta') \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi)\, d\psi \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} s_n'(\cos\theta') \sin\theta'\, d\theta'$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi)\, d\psi \cdot \frac{1}{4\pi}\int_{K_1} s_n'(\cos\gamma)\, do'.$$

Wenn wir die früher gegebene Abschätzung von $\frac{1}{4\pi}\int_{K_1} s_n'(\cos\gamma)\, do'$ sowie der Integrale über K_2 und K_3 benutzen, so ergibt sich die Ungleichung (78) mit dem Unterschiede, daß statt $f(\theta, \varphi)$ überall $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi)\, d\psi$ steht, und der Beweis wird wie vorhin zu Ende geführt.

Um den Fall der Legendreschen Reihe noch besonders hervorzuheben, sei $f(\theta, \varphi)$ von φ unabhängig und $= f(\cos\theta) = f(x)$ gesetzt; dann ergeben die vorhergehenden Entwicklungen den Satz:

Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $(-1, \cdots, 1)$ absolut integrable Funktion; dann konvergieren in jedem Punkte, wo $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon) = f(x+0)$ und $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x-\varepsilon) = f(x-0)$ beide existieren, die arithmetischen Mittel erster Ordnung der zu $f(x)$ gehörigen Legendreschen Reihe gegen den Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} s_n'\{f(x)\} = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right); \tag{81}$$

wenn $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ stetig ist, und $a < a' < b' < b$, so ist für $a' \leqq x \leqq b'$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} s_n'\{f(x)\} = f(x).$$

§ 8.

Die Konvergenz der arithmetischen Mittel zweiter Ordnung für absolut integrable Funktionen.

Die arithmetischen Mittel zweiter Ordnung der zu $f(\theta, \varphi)$ gehörigen Laplaceschen Reihe werden definiert durch

$$s_n''\{f(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu'\{f(\theta, \varphi)\};$$

setzen wir

$$s_n''(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_n'(x), \tag{82}$$

so wird offenbar

$$s_n''\{f(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_K f(\theta', \varphi')\, s_n''(\cos\gamma)\, do'.$$

Der Satz, daß für eine absolut integrable Funktion die arithmetischen Mittel zweiter Ordnung der Laplaceschen Reihe gegen $f(\theta, \varphi)$ konvergieren in jedem Punkte wo $f(\theta, \varphi)$ stetig ist, folgt selbstverständlich aus der in § 7 bewiesenen Konvergenz der arithmetischen Mittel erster Ordnung; er wurde aber zuerst auf direktem Wege von Herrn Fejér*) bewiesen. Seine

*) L. Fejér, Über die Laplacesche Reihe, Math. Ann. 67 (1909), S. 76—109.

einschränkende Voraussetzung, daß $f(\theta, \varphi)$ nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich wird, ist unwesentlich. Herrn Fejérs Beweis beruht auf den folgenden Eigenschaften der $s_n''(x)$:

I. Es ist $s_n''(\cos\theta) > 0$ für $0 < \theta < \pi$ und $n \geqq 0$.

II. Bei festem $\varepsilon > 0$ ist für $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi$ gleichmäßig
$$\lim_{n=\infty} s_n''(\cos\theta) = 0.$$

Wir wollen jetzt in einer Weise, welche den von Herrn Fejér eingeschlagenen Umweg über die Cesàroschen Mittel zweiter Ordnung vermeidet*), die Eigenschaften I und IIa ableiten, wovon IIa offenbar II enthält:

IIa. Es ist für $n \geqq 1$ und $0 < \theta \leqq \pi$
$$s_n''(\cos\theta) \leqq \frac{2+\log(n+1)}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4}.$$

Zunächst entwickeln wir einige Ausdrücke für $s_n''(\cos\theta)$. Zufolge (82) und (66) wird
$$s_n''(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-x} \sum_{\nu=0}^{n} (U_\nu(x) - P_{\nu+1}(x)),$$
woraus wegen (65)
$$s_n''(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-x} \left(\sum_{\nu=0}^{n} U_\nu(x) - (n+2) U_{n+1}(x) + 1 \right). \tag{83}$$

Aus der ersten Mehlerschen Formel folgt
$$U_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^\theta \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \cos\frac{2\nu+1}{2} u}{\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}\, du$$
oder
$$U_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\theta \frac{\sin(n+1)u}{\sin\frac{u}{2}\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}\, du, \tag{84}$$
sowie aus der zweiten Mehlerschen Formel
$$U_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi(n+1)} \int_\theta^\pi \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \sin\frac{2\nu+1}{2} u}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos u)}}\, du$$

*) Allerdings werden die Beweise nicht einfacher als diejenigen Herrn Fejérs.

oder

$$(85)\qquad U_n(\cos\theta)=\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{\theta}^{\pi}\frac{1-\cos(n+1)u}{\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{2(\cos\theta-\cos u)}}\,du.$$

Aus (83) und (84) folgt

$$(86)\quad s_n''(\cos\theta)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\pi\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\int_0^{\theta}\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n}\frac{\sin(\nu+1)u}{\nu+1}-\sin(n+2)u+\sin u}{\sin\frac{u}{2}\sqrt{2(\cos u-\cos\theta)}}\,du,$$

sowie aus (83) und (85)

$$(87)\quad s_n''(\cos\theta)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\pi\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n}\frac{1-\cos(\nu+1)u}{\nu+1}+\cos(n+2)u-\cos u}{\sin\frac{u}{2}\sqrt{2(\cos\theta-\cos u)}}\,du.$$

Ferner leiten wir einige Hilfsformeln ab. Aus der für $0<u\leqq\pi$ gültigen Beziehung

$$\frac{1}{2}(\pi-u)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu u}{\nu}$$

folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\sin(\nu+1)u}{\nu+1}=\frac{1}{2}(\pi-u)-\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\frac{\sin\nu u}{\nu},$$

und es ist

$$\sin\frac{u}{2}\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\frac{\sin\nu u}{\nu}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\cos\frac{2\nu-1}{2}u-\cos\frac{2\nu+1}{2}u\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{2n+3}{2}u}{n+2}+\frac{1}{2}\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu}\right)\cos\frac{2\nu+1}{2}u,$$

$$\sin\frac{u}{2}\left|\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\frac{\sin\nu u}{\nu}\right|\leqq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2}\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)=\frac{1}{n+2},$$

sodaß

$$(88)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\frac{\sin(\nu+1)u}{\nu+1}\geqq\frac{1}{2}(\pi-u)-\frac{1}{(n+2)\sin\frac{u}{2}}.$$

Aus der für $0 < u \leqq \pi$ geltenden Gleichung

$$\log \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu u}{\nu}$$

folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\cos (\nu+1) u}{\nu+1} = \log \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} - \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \frac{\cos \nu u}{\nu},$$

und genau wie vorhin wird gezeigt, daß

$$\sin \frac{u}{2} \left| \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \frac{\cos \nu u}{\nu} \right| \leqq \frac{1}{n+2},$$

sodaß

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\cos (\nu+1) u}{\nu+1} \right| \leqq \left| \log \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} \right| + \frac{1}{(n+2) \sin \frac{u}{2}}. \tag{89}$$

Beweis von I.

Es sei erstens $0 < u \leqq \frac{\pi}{n+2}$; dann ist

$$\frac{\sin \nu u}{\nu u} > \frac{\sin (n+2) u}{(n+2) u}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n+1)$$

und infolgedessen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\sin (\nu+1) u}{\nu+1} - \sin (n+2) u + \sin u > \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\sin (n+2) u}{n+2} - \sin (\nu+2) u + \sin u$$

$$= \sin u - \frac{\sin (n+2) u}{n+2} > 0.$$

Zweitens sei $\frac{\pi}{n+2} \leqq u \leqq \frac{2\pi}{n+2}$; dann ist nach (88)

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\sin (\nu+1) u}{\nu+1} \geqq \frac{1}{2} (\pi - u) - \frac{1}{(n+2) \sin \frac{\pi}{2(n+2)}} > \frac{1}{2} (\pi - u) - 1,$$

ferner $\sin u - \frac{1}{2} u > 0$, $\sin (n+2) u \leqq 0$, und folglich

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\sin (\nu+1) u}{\nu+1} - \sin (n+2) u + \sin u > \frac{1}{2} \pi - 1 + \sin u - \frac{1}{2} u > \frac{\pi - 2}{2} > 0.$$

Drittens sei $\frac{2\pi}{n+2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}$; dann ist nach (88)

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\sin (\nu+1) u}{\nu+1} \geqq \frac{1}{2} (\pi - u) - \frac{1}{(n+2) \sin \frac{\pi}{n+2}} \geqq \frac{1}{2} (\pi - u) - \frac{1}{2},$$

ferner $\sin u - \frac{1}{2} u > 0$, $\sin(n+2)u \leqq 1$, und folglich

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\sin(\nu+1)u}{\nu+1} - \sin(n+2)u + \sin u \geqq \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} - 1 + \sin u - \frac{1}{2} u > \frac{\pi-3}{2} > 0.$$

Diese drei Fälle zusammen ergeben also, daß für $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ der Integrand in (86) positiv ist, sodaß $s_n''(\cos\theta) > 0$ für diese Werte von θ und $n \geqq 0$.

Viertens sei $\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \pi$; dann ist nach (89)

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\cos(\nu+1)u}{\nu+1} < \left|\log \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2}}\right| + \frac{1}{(n+2)\sin\frac{\pi}{4}} = \log 2 + \frac{\sqrt{2}}{n+2},$$

ferner $\cos(n+2)u \leqq 1$, $\cos u \leqq 0$ und folglich

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1-\cos(\nu+1)u}{\nu+1} + \cos(n+2)u - \cos u > \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu+1} - \log 2 - \frac{\sqrt{2}}{n+2} - 1 > 0$$
$$\text{für } n \geqq 3,$$

denn der letzte Ausdruck wächst monoton mit n. Daher ist für $n \geqq 3$ und $\frac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi$ der Integrand in (37) positiv und demnach $s_n''(\cos\theta) > 0$ für diese Werte von θ. Die übrig gebliebenen Fälle $n = 0$, 1 und 2 erledigen sich sofort aus den ausgerechneten Formeln

$$s_0''(x) = 1, \quad s_1''(x) = \frac{4+3x}{4}, \quad s_2''(x) = \frac{13+21x+15x^2}{18}.$$

Beweis von IIa.

Aus (85) folgt sofort, da der Integrand positiv ist

$$0 < U_n(\cos\theta) < \frac{2}{\pi(n+1)\sin\frac{\theta}{2}} \int_{\theta}^{\pi} \frac{du}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos u)}},$$

und weil für $\cos\frac{u}{2} = \cos\frac{\theta}{2}\sin t$

$$\int_{\theta}^{\pi} \frac{du}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos u)}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2 t}} < \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

so erhalten wir

(90) $$0 < U_n(\cos\theta) < \frac{1}{(n+1)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}, \qquad (0 < \theta < \pi).$$

Aus (83) und (90) schließen wir, daß für $0 < \theta < \pi$

$$s_n''(\cos\theta) = \frac{1}{2(n+1)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\left(\sum_{\nu=0}^{n} U_\nu(\cos\theta) - (n+2)\,U_{n+1}(\cos\theta) + 1\right)$$

$$< \frac{1}{2(n+1)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\left(\sum_{\nu=0}^{n} U_\nu(\cos\theta) + 1\right)$$

$$< \frac{1}{2(n+1)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4}\left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu+1} + 1\right)$$

$$< \frac{1}{2(n+1)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4}\,(1 + \log(n+1) + 1),$$

woraus wegen der Stetigkeit beider Seiten für $\theta = \pi$ der Satz folgt.

Der Satz

$$\lim_{n=\infty} s_n''\{f(\theta, \varphi)\} = f(\theta, \varphi)$$

wenn f im Punkte (θ, φ) stetig ist, läßt sich nun folgendermaßen beweisen.

Ein Kreis mit dem sphärischen Radius ε um (θ, φ) teilt die Einheitskugel in zwei Teile, von welchen der (θ, φ) enthaltende mit K_1, der andere mit K_2 bezeichnet werde. Dann haben wir die Zerlegung

$$s_n''\{f(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_K f(\theta', \varphi')\, s_n''(\cos\gamma)\, do' = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2}.$$

Wird ε so klein gewählt, daß in jedem Punkte von K_1

$$|f(\theta', \varphi') - f(\theta, \varphi)| < \frac{\delta}{2},$$

wo δ eine beliebig kleine positive Größe ist, so wird

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} f(\theta', \varphi')\, s_n''(\cos\gamma)\, do' - f(\theta, \varphi)\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} s_n''(\cos\gamma)\, do'\right|$$

$$< \frac{\delta}{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} |s_n''(\cos\gamma)|\, do' < \frac{\delta}{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K} |s_n''(\cos\gamma)|\, do'.$$

Weil, wegen Eigenschaft I, $s_n''(\cos\gamma)$ niemals negativ wird, so sind die Lebesgueschen Konstanten zweiter Ordnung

$$\varrho_n'' = \frac{1}{4\pi}\int\limits_K |s_n''(\cos\gamma)|\, do' = \frac{1}{4\pi}\int\limits_K s_n''(\cos\gamma)\, do' = 1,$$

wie auf Grund von $s_n''(x) = 1 + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x)$, wo $c_1, \cdots, c_n$ Konstanten, und $\int\limits_K P_n(\cos\gamma)\, do' = 0$ für $n \geqq 1$ sofort einleuchtet. Wir haben ferner

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} s_n''(\cos\gamma)\,do' - 1\right| = \left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} s_n''(\cos\gamma)\,do' - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K} s_n''(\cos\gamma)\,do'\right|$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2} s_n''(\cos\gamma)\,do' < \frac{2+\log(n+1)}{2(n+1)\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2} do'$$

$$< \frac{2+\log(n+1)}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4},$$

was auf Grund von IIa sich ergibt, sowie endlich

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2} f(\theta',\varphi')\, s_n''(\cos\gamma)\,do' < \frac{2+\log(n+1)}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2} |f(\theta',\varphi')|\,do'$$

$$< \frac{2+\log(n+1)}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\cdot G,$$

woraus wir

$$|s_n''\{f(\theta,\varphi)\} - f(\theta,\varphi)| < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\left(|f(\theta,\varphi)| + G\right)\cdot\frac{2+\log(n+1)}{2(n+1)}$$

erhalten, und der Beweis wird wie in § 7 zu Ende geführt.

Ein weiterer, ebenfalls von Herrn Fejér l. c. aufgestellter Satz ist der folgende: Ist auf der Einheitskugel $m < f(\theta, \varphi) < M$, so ist auch

$$m < s_n''\{f(\theta,\varphi)\} < M, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Weil $s_n''(\cos\gamma)$ niemals negativ wird, so ist nach dem ersten Mittelwertsatze

$$m = \frac{1}{4\pi}\int\limits_K m\, s_n''(\cos\gamma)\,do' < \frac{1}{4\pi}\int\limits_K f(\theta,\varphi)\, s_n''(\cos\gamma)\,do' < \frac{1}{4\pi}\int\limits_K M s_n''(\cos\gamma)\,do' = M,$$

woraus der Satz folgt. Dieser Satz ist für die arithmetischen Mittel zweiter Ordnung charakteristisch und gilt, wie aus geeigneten Beispielen hervorgeht (man wähle etwa für $f(\theta, \varphi)$ ein Polynom in $\cos\theta$), nicht für die arithmetischen Mittel erster Ordnung.

§ 9.

Die Konvergenz der arithmetischen Mittel zweiter Ordnung für bedingt integrable Funktionen.

Wir wollen der Einfachheit halber uns auf den Fall beschränken, wo $f(\theta, \varphi)$ in einem einzigen Punkte (θ_1, φ_1) unendlich oder auch nur unstetig wird.*)

Es besteht dann der Satz, daß *in jedem von* (θ_1, φ_1) *verschiedenen Punkte*

$$\lim_{n=\infty} s_n''\{(f\theta, \varphi)\} = f(\theta, \varphi)$$

ist. Zum Beweise werden wir aus einem später ersichtlichen Grunde den Umweg über die Cesàroschen Mittel zweiter Ordnung machen. Das $(n+1)^{\text{te}}$ Cesàrosche Mittel zweiter Ordnung einer beliebigen Reihe $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$ ist, wenn wir $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ setzen,

$$S_n'' = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu} s_\mu,$$

während das entsprechende arithmetische Mittel zweiter Ordnung

$$s_n'' = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu+1} \sum_{\mu=0}^{n} s_\mu$$

ist. Zwischen beiden besteht die Identität**)

$$s_n'' = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu'' + \frac{1}{2} S_n'',$$

sodaß, wenn $\lim\limits_{n=\infty} S_n''$ existiert, $\lim\limits_{n=\infty} s_n'' = \lim\limits_{n=\infty} S_n''$. Wenn wir mit $S_n''\{f(\theta, \varphi)\}$ das $(n+1)^{\text{te}}$ Cesàrosche Mittel zweiter Ordnung der zu $f(\theta, \varphi)$ gehörigen Laplaceschen Reihe bezeichnen, so ist folglich unser Satz bewiesen, wenn wir zeigen, daß

$$\lim_{n=\infty} S_n''\{f(\theta, \varphi)\} = f(\theta, \varphi).$$

Es sei jetzt $S_n''(x)$ das $(n+1)^{\text{te}}$ Cesàrosche Mittel zweiter Ordnung der Reihe $P_0(x) + 3P_1(x) + \cdots + (2n+1) P_n(x) + \cdots$; dann ist

$$\text{(91)} \qquad S_n''\{f(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{4\pi} \int_K f(\theta', \varphi') S_n''(\cos\gamma)\, do'.$$

---

*) Es möge ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die im folgenden dargelegte Beweismethode sich ohne Schwierigkeit auf den allgemeinsten Fall ausdehnen läßt, wo die Unstetigkeitspunkte eine Menge vom Inhaltsmaße Null bilden.

**) l. c. S. 88, wo in unserer Bezeichnungsweise $\sigma_n'' = \frac{(n+1)(n+2)}{2} S_n''$ ist.

Nach Herrn Fejér ist*)

(92) $$S_n''(\cos\theta) > 0, \qquad (0 \leqq \theta < \pi),$$

(93) $$S_n''(\cos\theta) < \frac{4}{n+2}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}, \qquad (0 < \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi).$$

Es sei ψ die zum Punkte (θ, φ) als Nordpol gehörige geographische Länge des veränderlichen Punktes (θ', φ') (wobei der Nullpunkt von ψ beliebig festzulegen ist), sowie γ_1 und ψ_1 die Werte von γ und ψ für $\theta' = \theta_1$, $\varphi' = \varphi_1$. Es sei K_1 der durch einen Kreis vom sphärischen Radius ε um den Punkt (θ, φ) begrenzte und diesen Punkt enthaltende Teil der Kugel; ferner K_2 das den Punkt (θ_1, φ_1) enthaltende, von den Kreisbögen $\gamma = \gamma_1 + \varepsilon_1$, $\gamma = \gamma_1 - \varepsilon_1$ $\psi = \psi_1 + \varepsilon_2$, $\psi = \psi_1 - \varepsilon_2$ begrenzte Viereck, sowie K_3 der übrige Teil der Kugel. Wir zerlegen nun das Integrationsgebiet in (91) in $K_1 + K_2 + K_3$.

Nehmen wir ε so klein, daß für jeden Punkt in K_1

(94) $$|f(\theta, \varphi) - f(\theta', \varphi')| < \frac{\delta}{3},$$

wo δ beliebig klein aber positiv vorgelegt ist, so wird, weil nach (92) $S_n''(\cos\gamma)$ niemals negativ wird,

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} f(\theta', \varphi')\, S_n''(\cos\gamma)\, do' - f(\theta, \varphi)\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} S_n''(\cos\gamma)\, do'\right|$$
$$< \frac{\delta}{3}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} S_n''(\cos\gamma)\, do' < \frac{\delta}{3}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K} S_n''(\cos\gamma)\, do' = \frac{\delta}{3}.^{**})$$

Außerdem ist nach (93)

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} S_n''(\cos\gamma)\, do' - 1\right| = \left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} S_n''(\cos\gamma)\, do' - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K} S_n''(\cos\gamma)\, do'\right|$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2+K_3} S_n''(\cos\gamma)\, do' < \frac{4}{n+2}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2+K_3} do' < \frac{4}{n+2}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4},$$

sodaß

(95) $$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_1} f(\theta', \varphi')\, S_n''(\cos\gamma)\, do' - f(\theta, \varphi)\right| < \frac{\delta}{3} + \frac{4}{n+2}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\cdot|f(\theta, \varphi)|.$$

---

*) l. c., S. 84 bez. Gl. (19), S. 86.

**) Es ist nämlich offenbar $S_n''(x) = 1 + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x)$, wo $c_1, \cdots, c_n$ Konstanten sind, und nach der Grundeigenschaft der Kugelfunktionen ist

$$\int\limits_{K} P_n(\cos\gamma)\, do' = 0 \quad \text{für} \quad n \geqq 1.$$

Um das Integral in K_2 abzuschätzen, bezeichnen wir mit K_2' das Gebiet zwischen den beiden, den Punkt (θ_1, φ_1) im Inneren enthaltenden, sphärischen Vierecke (a) und (b), welche begrenzt sind von den Kreisbögen

$$\text{(a)} \quad \gamma = \gamma_1 + \varepsilon_1, \quad \gamma = \gamma_1 - \varepsilon_1, \quad \psi = \psi_1 + \varepsilon_2, \quad \psi = \psi_1 - \varepsilon_2$$

bez.

$$\text{(b)} \quad \gamma = \gamma_1 + \varepsilon_1', \quad \gamma = \gamma_1 - \varepsilon_1', \quad \psi = \psi_1 + \varepsilon_2', \quad \psi = \psi_1 - \varepsilon_2',$$

wobei selbstverständlich $\varepsilon_1' < \varepsilon_1$, $\varepsilon_2' < \varepsilon_2$ anzunehmen ist. Dann ist, nach der Definition eines uneigentlichen Integrals,

$$(96) \qquad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2} f(\theta', \varphi')\, S_n''(\cos\gamma)\, do' = \lim_{\varepsilon_1', \varepsilon_2' = 0} \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2'} f(\theta', \varphi')\, S_n''(\cos\gamma)\, do'.$$

Verlängert man die beiden durch $\gamma = \gamma_1 + \varepsilon_1'$ und $\gamma = \gamma_1 - \varepsilon_1'$ gegebenen Seiten des Vierecks (b), bis sie die durch $\psi = \psi_1 + \varepsilon_2$ und $\psi = \psi_1 - \varepsilon_2$ gegebenen Seiten des Vierecks (a) schneiden, so zerfällt K_2' in vier Vierecke (p), (q), (r) und (s), deren Seiten gegeben sind durch

$$\begin{array}{lllll}
(p) & \gamma = \gamma_1 + \varepsilon_1, & \gamma = \gamma_1 + \varepsilon_1', & \psi = \psi_1 + \varepsilon_2, & \psi = \psi_1 - \varepsilon_2, \\
(q) & \gamma = \gamma_1 - \varepsilon_1', & \gamma = \gamma_1 - \varepsilon_1, & \psi = \psi_1 + \varepsilon_2, & \psi = \psi_1 - \varepsilon_2, \\
(r) & \gamma = \gamma_1 + \varepsilon_1, & \gamma = \gamma_1 - \varepsilon_1, & \psi = \psi_1 + \varepsilon_2, & \psi = \psi_1 + \varepsilon_2', \\
(s) & \gamma = \gamma_1 + \varepsilon_1, & \gamma = \gamma_1 - \varepsilon_1, & \psi = \psi_1 - \varepsilon_2', & \psi = \psi_1 - \varepsilon_2,
\end{array}$$

und wir haben

$$(97) \qquad \int\limits_{K_2'} f(\theta', \varphi')\, S_n''(\cos\gamma)\, do' = \int\limits_{(p)} + \int\limits_{(q)} + \int\limits_{(r)} + \int\limits_{(s)}.$$

Betrachten wir zuerst das über (p) erstreckte Integral. Nehmen wir γ und ψ als Integrationsveränderliche und schreiben noch $f(\theta', \varphi') = F(\gamma, \psi)$, so wird

$$\int\limits_{(p)} = \int\limits_{\gamma_1 + \varepsilon_1'}^{\gamma_1 + \varepsilon_1} \int\limits_{\psi_1 - \varepsilon_2}^{\psi_1 + \varepsilon_2} F(\gamma, \psi)\, S_n''(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma\, d\psi.$$

Es hat $S_n''(\cos\gamma)\sin\gamma$ im Intervalle $0 \leqq \gamma \leqq \pi$ höchstens $n + 3$ Maxima und Minima, wenn man die Endpunkte des Intervalles mitzählt.*) Es seien nun $\gamma_1', \gamma_2', \cdots, \gamma_m'$, wo $m < n + 1$ und

*) Denn $\frac{d}{d\gamma}\,[S_n''(\cos\gamma)\sin\gamma] = 0$ ist eine algebraische Gleichung $n + 1^{\text{ten}}$ Grades in $\cos\gamma$.

$$\gamma_0' = \gamma_1 + \varepsilon_1' \leqq \gamma_1' < \gamma_2' < \cdots < \gamma_m' \leqq \gamma_1 + \varepsilon_1 = \gamma_{m+1}',$$

diejenigen Maximum- und Minimumpunkte, welche zwischen $\gamma_1 + \varepsilon_1'$ und $\gamma_1 + \varepsilon_1$ liegen. Weil, für $\gamma_\lambda' \leqq \gamma \leqq \gamma_{\lambda+1}'$, $S_n''(\cos\gamma)\sin\gamma$ positiv und monoton, ferner $F(\gamma, \psi)$ für alle Punkte von (p) endlich und stetig, also auch

$$\int\limits_{\psi_1-\varepsilon_2}^{\psi_1+\varepsilon_2} F(\gamma, \psi) = H(\gamma)$$

für $\gamma_1 + \varepsilon_1' \leqq \gamma \leqq \gamma + \varepsilon$ endlich und stetig ist, so folgt aus dem zweiten Mittelwertsatze

$$(99)\quad \int\limits_{\gamma_\lambda}^{\gamma_{\lambda+1}} \int\limits_{\psi_1-\varepsilon_2}^{\psi_1+\varepsilon_2} F(\gamma, \psi)\, S_n''(\cos\gamma)\sin\gamma\, d\gamma\, d\psi = \int\limits_{\gamma_\lambda}^{\gamma_{\lambda+1}} H(\gamma)\, S_n''(\cos\gamma)\sin\gamma\, d\gamma$$

$$= S_n''(\cos\gamma_\lambda)\sin\gamma_\lambda \int\limits_{\gamma_\lambda}^{\xi_\lambda} H(\gamma)\, d\gamma + S_n''(\cos\gamma_{\lambda+1})\sin\gamma_{\lambda+1} \int\limits_{\xi_\lambda}^{\gamma_\lambda+1} H(\gamma)\, d\gamma,$$

$$(\gamma_\lambda < \xi_\lambda < \gamma_{\lambda+1},\ \lambda = 0, 1, \cdots, m).$$

Nun läßt sich, wegen der Integrabilität von $F(\gamma, \psi)$, eine, für hinreichend kleine ε_1 und ε_2 beliebig kleine Größe $h(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ derart angeben, daß

$$(100)\quad \begin{aligned} \left| \int\limits_{\gamma_\lambda}^{\xi_\lambda} H(\gamma)\, d\gamma \right| &= \left| \int\limits_{\gamma_\lambda}^{\xi_\lambda} \int\limits_{\psi_1-\varepsilon_2}^{\psi_1+\varepsilon_2} F(\gamma, \psi)\, d\gamma\, d\psi \right| < h(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ \left| \int\limits_{\xi_\lambda}^{\gamma_{\lambda+1}} H(\gamma)\, d\gamma \right| &= \left| \int\limits_{\xi_\lambda}^{\gamma_{\lambda+1}} \int\limits_{\psi_1-\varepsilon_2}^{\psi_1+\varepsilon_2} F(\gamma, \psi)\, d\gamma\, d\psi \right| < h(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \end{aligned}$$

$$(\lambda = 0, 1, \cdots, m);$$

ferner ist nach (93)

$$0 \leqq S_n''(\cos\gamma)\sin\gamma \leqq \frac{4}{n+2} \cdot \frac{8}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4},$$

sodaß zufolge (98), (99) und (100)

$$(101)\quad \left| \int\limits_{(p)} \right| < \sum_{\lambda=0}^{m} 2 \cdot \frac{4}{n+2} \cdot \frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4} h(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{m+1}{n+2} \cdot \frac{8}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4} h(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$\leqq \frac{n+1+1}{n+2} \cdot \frac{8}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4} \cdot h(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{8}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4} \cdot h(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Für die Integrale über (q), (r) und (s) gilt dieselbe Ungleichung, wenn wir nur $h(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ angemessen wählen, und wir erhalten aus (97) und (96)

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_2}\right| < \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{4}\right)^4}\cdot h(\varepsilon_1,\varepsilon_2). \tag{102}$$

In K_3 ist schließlich $|f(\theta',\varphi')| < M(\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, wo M endlich ist, und aus (93) folgt dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_3}\right| &< \frac{4}{n+2}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4} M(\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_3} do' \\ &< \frac{4}{n+2}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4} M(\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2).\end{aligned} \tag{103}$$

Fassen wir (95), (102) und (103) zusammen, so kommt infolge (91)

$$\begin{aligned}|S_n''\{f(\theta,\varphi)\} - f(\theta,\varphi)| &< \frac{\delta}{3} + \frac{8}{\pi}\frac{h(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4} \\ &+ \frac{4}{n+2}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^4}\left(M(\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + |f(\theta,\varphi)|\right).\end{aligned}$$

Nachdem ε gemäß (94) festgelegt ist, können wir ε_1 und ε_2 so klein wählen, daß das zweite Glied rechts $< \frac{\delta}{3}$ wird, und bei festem ε, ε_1 und ε_2 wird für $n \geqq N$, wo N genügend groß, auch das dritte Glied $< \frac{\delta}{3}$, sodaß

$$|S_n''\{f(\theta,\varphi)\} - f(\theta,\varphi)| < \delta \qquad (n \geqq N),$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} S_n''\{f(\theta,\varphi)\} = f(\theta,\varphi),$$

und wie wir vorhin gesehen haben, ist wegen der Existenz obigen Grenzwertes

$$\lim_{n=\infty} s_n''\{f(\theta,\varphi)\} = \lim_{n=\infty} S_n''\{f(\theta,\varphi)\} = f(\theta,\varphi).$$

Man sieht nun ein, warum die Cesàroschen Mittel zur Erzielung dieses Resultates notwendig waren. Bei der Aufstellung der zu (102) analogen Formel für die arithmetischen Mittel würde nämlich, infolge Eigenschaft IIa (§ 8) die rechte Seite mit dem Faktor $2 + \log(n+1)$ behaftet auftreten, und die weiteren Schlüsse würden hinfällig. Daß diese Schwierigkeit keine scheinbare ist, erhellt daraus, daß infolge (83) und (96) für $0 < \theta < \pi$ die asymptotische Gleichung besteht

$$S_n''(\cos\theta) = \frac{\log(n+1) + O(1)}{4(n+1)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}.$$

Der obige Beweisgang läßt sich leicht ergänzen zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz in jedem Gebiete T, für welches (θ_1, φ_1) ein äußerer Punkt ist. Auch läßt sich eine zu (79) analoge Formel aufstellen. Statt aber auf diese einfachen Dinge näher einzugehen, möchte ich zum Schluß eine Bemerkung machen, die sich auf die Konvergenzfrage der arithmetischen Mittel erster Ordnung der zu einer bedingt integrablen Funktion gehörigen Laplaceschen Reihe bezieht.

Es sei $f(\theta, \varphi)$ eine Funktion, die endlich und stetig ist ausgenommen im Punkte (θ_1, φ_1), wo sie integrabel (aber nicht absolut integrabel) unendlich wird. Der Punkt (θ, φ) sowie sein Gegenpol $(\pi - \theta, \varphi + \pi)$ seien beide von (θ_1, φ_1) verschieden. Um

$$s_n'\{f(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_K f(\theta', \varphi')\, s_n'(\cos\gamma)\, do'$$

zu berechnen, zerlegen wir K in vier Teile: K_1 und K_2 seien wie in § 7 durch Kreise vom sphärischen Radius ε um (θ, φ) bez. seinen Gegenpol begrenzt, K_3 sei das soeben betrachtete kleine Viereck um (θ_1, φ_1), endlich K_4 der übrig bleibende Teil von K. Die Summe der über K_1, K_2 und K_4 genommenen Teilintegrale unterscheidet sich nach dem Vorherigen von $f(\theta, \varphi)$ um einen Betrag, der durch geeignete Verfügung über ε, ε_1, ε_2 und n beliebig klein gemacht werden kann. Es fragt sich nur noch, ob das Teilintegral über K_3 zum Grenzwert Null gebracht werden kann. Laut (66), (69) und (14) ist

$$(104)\quad s_n'(\cos\theta) = \frac{4}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\sin\theta}} \cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta + \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{A(n, \theta)}{n(\sin\theta)^{\frac{7}{2}}},$$

wo $A(n, \theta)$ für $0 \leqq \theta \leqq \pi$ und $n \geqq 1$ beschränkt ist. Aus dieser Formel folgt, daß $\frac{A(n, \theta)}{(\sin\theta)^{\frac{5}{2}}}$ eine algebraische Funktion von $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ ist, die folglich im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq \pi$ höchstens kn Maxima und Minima besitzt, wo k von n unabhängig ist (es werden hierbei $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ zu den Maximum- und Minimumstellen mitgerechnet). Fast wörtlich wie oben läßt sich durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes zeigen, daß

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_3} f(\theta', \varphi')\, \frac{A(n, \gamma)}{n(\sin\gamma)^{\frac{7}{2}}}\, do'\right| < \frac{h'(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{(\sin\varepsilon)^{\frac{5}{2}}},$$

wo $h'(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ durch zweckmäßige Wahl von ε_1 und ε_2 beliebig klein gemacht werden kann. Schreiben wir weiter

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sin \gamma}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} f(\theta', \varphi') = F(\gamma, \psi),$$

so bleibt uns das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{K_3} F(\gamma, \psi) \cos\left(\frac{2n+3}{2}\gamma + \frac{3\pi}{4}\right) d\gamma\, d\psi; \tag{105}$$

je nachdem dieses, nach Festlegung von ε, ε_1 und ε_2, für wachsendes n gegen Null konvergiert oder nicht, ist

$$\lim_{n=\infty} s_n'\{f(\theta, \varphi)\} = f(\theta, \varphi)$$

oder nicht, wo (θ, φ) ein beliebiger, nur von (θ_1, φ_1) und seinem Gegenpol $(\pi - \theta_1, \psi_1 + \pi)$ verschiedener Punkt ist.

Nun hat Riemann*) gezeigt, daß es sogar analytische Funktionen $f(x)$ gibt, die nur in einem einzigen Punkte unendlich werden, und für welche die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n(x-a)\, dx = 0$$

nicht gilt, wenn a einer gewissen Punktmenge vom Inhaltsmaße > 0 angehört. Seine Analyse läßt sich wörtlich auf den Ausdruck

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos\left(\frac{2n+3}{2}(x-a) + \frac{3\pi}{4}\right) dx$$

übertragen. Es ist also die Entscheidung über das Verhalten von (105) im wesentlichen identisch mit dem folgenden Problem: Ist für jede, in nur einem Punkte des Intervalles $0 \leqq x \leqq 2\pi$ unendlich werdende, integrable Funktion $f(x)$

$$\text{I.}\quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n(x-a)\, dx = 0$$

für $0 \leqq a \leqq 2\pi$? oder II. gibt es eine integrable Funktion derart, daß obige Gleichung aufhört zu gelten für alle a einer Punktmenge vom Inhaltsmaße > 0?

Schreibt man $n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ statt $\sqrt{n}$, wo $\varepsilon > 0$ aber beliebig klein, so lassen sich nach der Riemannschen Methode leicht Beispiele bilden, für welche der Fall II. eintritt. Schreibt man dagegen n statt $\sqrt{n}$, so tritt der

---

*) B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Ges. Werke 2. Aufl. (Leipzig, Teubner 1892), S. 227—265. Siehe Nr. 13, S. 260ff.

Fall I. immer ein.*) Für eine absolut integrable Funktion $f(x)$ tritt der Fall I. selbstverständlich ein, denn wir haben dann

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx.$$

Es wäre nun sehr interessant, das gestellte Problem im allgemeinen Fall (eventuell unter Beschränkung auf analytische Funktionen) anzugreifen.

Chicago, U. S., den 16. Juli 1912.

---

*) L. Fejér, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Ann. 58 (1904), S. 51—69. Siehe S. 56.