Über Funktionen mit positivem Realteil.

Von

W. Cauer in Göttingen.

Einleitung.

Die praktischen Aufgaben der Elektrotechnik, Schaltungen zu entwerfen, deren Verhalten nach außen hin sich in vorgeschriebener Weise mit der Frequenz des Wechselstroms ändert, führen auf das folgende mathematische Problem [1]):

Gegeben seien drei nicht negative [2]) quadratische Formen von n Variabeln mit den Matrizen L, R, D [3]) und eine komplexe Veränderliche λ. Sei

$$L\lambda + R + D\lambda^{-1} = A.$$

Definition 1. Eine gegebene quadratische symmetrische q-reihige Funktionenmatrix Q, die als Hauptminor einer Matrix A^{-1}, bei der $n \geqq q$ ist, aufgefaßt, oder „dargestellt", werden kann, möge „darstellbar" [4]) heißen.

Hauptproblem. *Gesucht sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Funktionenmatrix* [5]) *darstellbar ist. Sind die*

---

[1]) Vgl. dazu Math. Annalen **105** (1931), S. 86–132, „Untersuchungen über ein Problem, das drei positiv definite quadratische Formen mit Streckenkomplexen in Beziehung setzt", weiterhin kurz als „QFS" zitiert. Um die vorliegende Arbeit von QFS unabhängig lesbar zu machen, wurden die erforderlichen Erläuterungen über Zuordnungen von quadratischen Formen und Streckenkomplexen in § 2 in gekürzter Form zusammengestellt.

[2]) Wir wollen voraussetzen, daß wenigstens für einen Punkt der rechten λ-Halbebene der Realteil von A positiv definit ist. Hinreichend dafür ist, daß wenigstens eine der drei Formen L, R, D positiv definit ist.

[3]) L repräsentiert die Induktivitäten, R die Ohmschen Widerstände, D die reziproken Kapazitäten von geschlossenen Stromkreisen einer Schaltung.

[4]) „Darstellung" in dieser Arbeit ist identisch mit „Darstellung im weiteren Sinne" in QFS.

[5]) Eine solche darstellbare Matrix von Funktionen repräsentiert physikalisch die Frequenzcharakteristiken eines „$2q$-Pols".

notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür erfüllt, so wird die Angabe einer Darstellung, oder, allgemeiner, aller Darstellungen verlangt

Notwendige Bedingungen. (§ 1.) Eine einfache Überlegung zeigt, daß jede darstellbare Matrix Q in der rechten λ-Halbebene regulär ist, der reelle Teil von Q dort zu einer positiv definiten quadratischen Form gehört, und Q für reelle λ reelle Werte annimmt.

Definition 2. Eine diesen notwendigen Bedingungen genügende symmetrische Matrix Q möge „positiv" genannt werden.

Vermutung. Eine positive Matrix ist darstellbar.

Diese Umkehrung der Tatsache, daß jede darstellbare Matrix positiv ist, ist nicht trivial, scheint aber allgemein richtig zu sein. Sie wird in dieser Arbeit für folgende Fälle bewiesen:

I. $q = 1.$[6]) Hier reduziert sich die Matrix Q auf eine positive Funktion.

a) (§ 3.) Beschränkung des Grades der positiven Funktion so, daß dem Grad nach eine Darstellung mit $n=2$ möglich erscheint, aber $n=2$ *oder* $n>2$.

b) (§ 4.) $n \to \infty$ in dem Sinne, daß jede positive Funktion in jedem abgeschlossenen Teilgebiet der Halbebene $\mathfrak{R}$[7]) $\lambda > 0$ beliebig gut gleichmäßig durch eine Funktion approximiert werden kann, die durch A mit hinreichend großem n dargestellt wird.

Daß die *Vermutung* im Falle $q = 1$ *für jede rationale positive Funktion* nicht nur approximativ, sondern *exakt richtig* ist, mit endlichem n, wurde kürzlich von Otto Brune[7a]) durch einen *Kettenbruchalgorithmus* bewiesen, der als Spezialfall die Stieltjesschen Kettenbrüche enthält.

II. $q = 2.$[8]) (§ 5.)

a) Gleichheit der Elemente der ersten Zeile (und Spalte) der Matrix Q.

b) Symmetrie der Matrix Q bezüglich der Nebendiagonale[9]).

Beide Fälle II. a) und II. b) können auf Fall I. reduziert werden.

Die Diskussion des Falles II. b) liefert einen sehr einfachen neuen Beweis eines unter anderm für die Theorie der Siebschaltungen grundlegenden Theorems über symmetrische Vierpole[10]) (vgl. die Definition 12).

Derjenige Teil des Hauptproblems, der nicht nur die Angabe einer, sondern allgemeiner, die Angabe *aller möglichen Darstellungen* ein und

[6]) Elektrotechnisch: Zweipol (Wechselstromwiderstand).

[7]) $\mathfrak{R}$ bedeutet „reeller Teil von".

[7a]) Genaues Zitat s. S. 385, Anm. [26b]).

[8]) Elektrotechnisch: Vierpol.

[9]) Elektrotechnisch: Symmetrischer Vierpol.

[10]) „Über die Variabeln eines passiven Vierpols", Sitzungsber. der Preußischen Akademie der Wiss., Dez. 1927.

derselben Matrix Q verlangt, wird in dieser Arbeit nicht behandelt. Dieser Teil des Hauptproblems führt im wesentlichen auf *invariantentheoretische* (*algebraisch-geometrische*) *Fragen.*

Im Einklang mit der ausgesprochenen Vermutung stehen die in QFS bewiesenen *Reziprozitätstheoreme,* die besagen, daß mit jedem Q auch Q^{-1} darstellbar ist. Wie hier in § 1 gezeigt wird, ist nämlich mit Q auch Q^{-1} positiv.

Neben dem Hauptproblem sind für die elektrotechnischen Anwendungen eine Reihe von *Interpolationsproblemen* von Interesse, die darauf hinauslaufen, daß eine numerisch oder graphisch oder durch gewisse ideale Forderungen gegebene Matrix Q^* durch positive Matrizen Q approximiert werden soll, deren Elemente rationale Funktionen sind.

1. Der Entwurf symmetrischer Siebschaltungen entspricht wesentlich der Lösung eines solchen dem obigen Fall II. b) angehörigen Interpolationsproblems, für das die idealen Forderungen formuliert werden (§ 6). Dieses Problem wurde theoretisch und praktisch befriedigend gelöst [11]).

2. Für den Fall I. und somit indirekt auch für die Fälle II. a) und II. b) wird das Interpolationsproblem behandelt, zu einer numerisch oder in Kurvenform auf einem Stück der imaginären Achse der λ-Ebene durch Realteil und Imaginärteil gegebenen Funktion die Bedingungen anzugeben, daß diese Funktion durch eine positive Funktion approximiert werden kann, und zutreffendenfalls approximierende rationale Funktionen konstruieren [12]). Ein Beitrag zur Lösung dieses Problems wird hier im Anschluß an eine Untersuchung von G. Pick [13]) geliefert. (§ 7.)

Die in dem besonderen Fall $q = 1$ auftretenden positiven Funktionen bilden, wenn man von einer linear gebrochenen Transformation absieht, einen Spezialfall der von Carathéodory u. a. untersuchten im Einheitskreis beschränkten Funktionen oder Funktionen mit positivem Realteil. Die Spezialisierung liegt in der Einschränkung, daß „positive" Funktionen nach der hier gegebenen Definition für reelle λ reellwertig sind. Die in jenen Arbeiten im Falle der Semidefinitheit gewisser positiver Hermitescher Formen

---

[11]) Vgl. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechanik, Okt. 1930, „Die Siebschaltungen der Fernmeldetechnik"; die in Buchform als Forschungsheft des V. D. I. mit Unterstützung des Elektrotechnischen Vereins herausgegebene Arbeit „Siebschaltungen", sowie eine in „Physics" erscheinende Arbeit „New theory and design of wave filters".

[12]) Elektrotechnisch: Ein Zweipol oder symmetrischer Vierpol von numerisch oder graphisch gegebener Frequenzabhängigkeit soll konstruiert werden.

[13]) Math. Annalen 77, S. 7, „Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bedingt werden". Ich bin Herrn G. Herglotz für den Hinweis auf diese Arbeit zu besonderem Dank verpflichtet.

auftretenden rationalen Funktionen bilden, abgesehen von der eben erwähnten Realitätsbedingung, ihrerseits nur einen Spezialfall der in unserer Fragestellung auftretenden rationalen Funktionen. Im hier vorliegenden Fall würde das eine Einschränkung auf solche rationale positive Funktionen bedeuten, die auf der imaginären Achse rein imaginäre Werte annehmen. Diese können bereits durch zwei nicht negative quadratische Formen dargestellt werden, nämlich $A = L\lambda + D\lambda^{-1}$.

Die zugrunde liegenden elektrotechnischen Fragen haben mit Schaltungen zu tun. Entsprechend handeln die ursprünglichen mathematischen Fragen von einer Zuordnung von positiven definiten Formen zu Streckenkomplexen (Graphen). In dem ursprünglichen Hauptproblem, das in QFS (Anm. [1]) formuliert wird, ist die L-Form vor den beiden anderen Formen R und D bevorzugt, wodurch eine unliebsame Unsymmetrie in die Problemstellung hineinkommt. In jener Arbeit wird gezeigt, daß sich die ursprüngliche Frage in gewisser Weise auf das hier formulierte Hauptproblem reduzieren laßt, das unmittelbar mit Streckenkomplexen nichts mehr zu tun hat. Trotzdem erscheint es nicht nur vom elektrotechnischen, sondern auch vom rein mathematischen Standpunkt aus ganz naturgemäß, wenn hier bei der Durchführung der Beweise und der Konstruktion darstellender Formen L, R, D von Streckenkomplexen Gebrauch gemacht wird. Man sieht das z. B. deutlich an denjenigen positiven Funktionsklassen, die schon durch zwei quadratische Formen dargestellt werden können, nämlich R und D, D und L oder L und R. Diese Funktionen sind für unbeschränktes n identisch mit den Stieltjesschen Kettenbrüchen und haben als solche eine wesentliche mathematische Beziehung zu Streckenkomplexen [14]).

§ 1.

Notwendige Bedingungen.

Es soll bewiesen werden, daß eine darstellbare Matrix Q gemäß der Definition 2 notwendig positiv ist. Aus der gemachten Voraussetzung, daß die zu

$$\Re A = L\Re\lambda + R + D\frac{\Re\lambda}{|\lambda|^2}$$

gehörige quadratische Form $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i\, x_j$ für wenigstens ein λ mit $\Re\lambda > 0$ positiv definit ist, folgt zunächst, daß sie in der ganzen rechten Halbebene positiv definit ist. Da die L, R, D als nicht negativ vorausgesetzt sind, kann $\Re A$ nicht negativ, könnte aber für gewisse λ der rechten Halbebene

---

[14]) S. Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 1929, S. 63, „Über eine Klasse von Funktionen, die die Stieltjesschen Kettenbrüche als Sonderfall enthält“.

positiv-semidefinit sein. Das würde aber bedeuten, daß für ein System nicht sämtlich verschwindender reeller x_ν-Werte die in λ analytische Funktion

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i\, x_j$$

für wenigstens ein λ in der rechten Halbebene verschwindenden Realteil und sonst nicht negativen Realteil hätte. Aus dem Satze, daß eine in einem Bereich harmonische Funktion ihr Minimum stets am Rande des Bereiches annimmt, folgt dann aber das identische Verschwinden des Realteils und somit ein Widerspruch gegen die Voraussetzung. Unter der engeren Voraussetzung, daß wenigstens eine der Formen L, R, D positiv definit ist, folgt ebenfalls sofort, daß die Form

$$\Re\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i\, x_j\right)$$

im Innern der rechten λ-Halbebene positiv definit ist. Denn sie ist die Summe dreier nicht negativer Formen, von denen wenigstens eine positiv definit ist. Die Matrix A ist ferner symmetrisch und in der rechten Halbebene regulär und reellwertig für reelle λ. Somit ist A positiv, was auch so ausgedrückt werden kann:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i\, x_j$$

ist eine positive Funktion von λ, sofern nicht gleichzeitig alle auftretenden n Parameter x_i verschwinden.

Wir beweisen nun im folgenden den

Satz 1. *Zu jeder positiven Funktionenmatrix B existiert eine Inverse B^{-1}, und diese ist wieder positiv.*

Die Anwendung dieses Satzes auf A zeigt, daß A^{-1}, und damit alle Hauptminoren Q von A^{-1} positiv sind, was nachgewiesen werden sollte. Die Anwendung auf irgendeine positive Matrix Q ist mit Rücksicht auf die in der Einleitung erwähnten Reziprozitätstheoreme von Interesse.

Nach Voraussetzung ist B speziell für positiv reelle λ positiv definit. Also kann $|B|$ [15]) nicht identisch und wegen der Regularitätsbedingung

---

[15]) Daß eine „Fundamentaldeterminante" $|A|$ nur Nullstellen in der linken Halbebene hat, wurde von Routh, „Die Dynamik der Systeme starrer Körper", Bd. II, Kap. VII, Teubner 1898, bewiesen. Vgl. auch Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges., 27, S. 25, „Ein Satz über zwei zusammenhängende Hurwitzsche Polynome". Daß jede komplexe Nullstelle einer Fundamentaldeterminante negativ reellen Teil besitzt, besagt physikalisch die einleuchtende Tatsache, daß in einem schwingungsfähigen System mit Energieverzehrung jede freie Schwingung abklingen muß. Der Realteil einer positiven Funktion (eines Wechselstromwiderstandes) ist für rein imaginäre $\lambda = i\omega$ proportional zum mittleren Energieverbrauch des Systems, wenn es sinusförmige erzwungene Schwingungen von der Kreisfrequenz ω ausführt.

höchstens in isolierten Punkten verschwinden, die im Innern der rechten Halbebene keinen Häufungspunkt besitzen dürfen. Beschränken wir λ zunächst auf das Innere der rechten Halbebene unter Ausschluß dieser isolierten Punkte, dann existiert zu B die inverse Matrix B^{-1} und ist wieder regulär und für reelle λ reell. Seien B_{ij} die b^2 Elemente von B, β_{ij} die Elemente von B^{-1}.

Nach Voraussetzung ist für die komplexe quadratische (nicht Hermitesche) Form

$$\sum_{i,j=1}^{b} B_{ij} x_i \bar{x}_j$$ [16]

der Realteil

$$\Re\left(\sum_{i,j=1}^{b} B_{ij} x_i \bar{x}_j\right) > 0, \tag{1}$$

für beliebige komplexe x_i, die nicht alle zugleich verschwinden. Da bei einer komplexen linearen Transformation der x_i der reelle Teil von

$$\sum_{i,j=1}^{b} B_{ij} x_i \bar{x}_j$$

in sich übergeht, bleibt die Definitheitsbedingung (1) bei einer nicht singulären komplexen linearen Transformation der x_i erhalten. Wählen wir speziell die Transformationen

$$x_i = \sum_{k=1}^{b} \beta_{ik} x'_k,$$

so geht die quadratische Form mit der Matrix B über in eine mit der Matrix

$$B^{-1\prime} B \bar{B}^{-1} = B^{-1} B \bar{B}^{-1} = \bar{B}^{-1}.$$

Demnach ist

$$\Re\left(\sum_{i,j=1}^{b} \bar{\beta}_{ij} x'_i \bar{x}'_j\right) = \Re\left(\sum_{i,j=1}^{b} \beta_{ij} x'_i \bar{x}'_j\right) > 0,$$

wenn nicht alle x_i zugleich verschwinden. Dies gilt zunächst nicht für alle Punkte in der rechten Halbebene, sondern mit Ausschluß eventuell von einer Menge isolierter Punkte, die sich im Innern der Halbebene nicht häufen, und in denen B verschwindet. Diese Punkte könnten für die in λ analytische Funktion $\sum_{i,j=1}^{b} \beta_{ij} x_i \bar{x}_j$ im Innern der rechten Halbebene keine anderen Singularitäten liefern, als Pole. Da aber die Umgebung eines solchen Poles die volle Umgebung des unendlich fernen Punktes mindestens einfach überdecken würde, kann in der Umgebung eines Poles nicht überall die

[16]) Ein Querstrich bezeichnet den konjugiert komplexen Wert.

dort bewiesene Ungleichung

$$\Re\left(\sum_{i,j=1}^{b} \beta_{ij}\, x_i'\, \bar{x}_j'\right) > 0$$

gelten. Somit sind solche Pole im Innern der rechten Halbebene nicht möglich, und der Satz 1 ist ausnahmslos bewiesen.

§ 2.

Zuordnung quadratischer Formen zu Streckenkomplexen.

In diesem Abschnitt werden einige später benutzte Hilfsmittel erläutert. Es sollen gewisse Zuordnungen der quadratischen Formen L, R, D zu Streckenkomplexen (linearen Komplexen, Graphen) definiert und einige einfache Hilfssätze darüber ausgesprochen werden[17]).

Definition 3. Ein (orientierter) Streckenkomplex ist eine Matrix $M \equiv (m_{rs})$ von k Zeilen, den „Knotenpunkten" und l Spalten, den Strecken oder „Zweigen", dadurch gekennzeichnet, daß ein Element jeder Spalte den Wert $+1$, ein anderes den Wert -1, und alle übrigen den Wert 0 besitzen.

Wir verabreden zu sagen, daß ein „Zweig" in einem „Knotenpunkt" „endigt", „beginnt" oder keinen Punkt mit ihm gemeinsam hat, je nachdem das betreffende Element der Matrix den Wert $+1$, -1 oder 0 hat, und veranschaulichen diese Verhältnisse statt durch Matrizenschreibweise auch in bekannter Weise durch die Figur eines Streckenkomplexes. Nur „zusammenhängende" Streckenkomplexe kommen hier in Betracht, d. h. solche, in denen von jedem Knotenpunkt ein Weg über Zweige des Streckenkomplexes zu jedem anderen Knotenpunkt führt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß M den *Rang* $k-1$ hat. Ferner möge vorausgesetzt werden, daß *jeder Zweig wenigstens einem „Kreis" angehört* (vgl. Def. 4), woraus u. a. folgt, daß $l \geqq k$ ist.

Jedem (orientierten) Zweige p möge eine „Zweigvariable" x_p' zugeordnet werden, derart, daß die Gleichungen

$$(2) \qquad \sum_{p=1}^{l} m_{ip}\, x_p' = 0$$

gelten, so daß die x_p' durch $n = l - k + 1$ (1. Bettische Zahl, „zyklomatische Ordnungszahl", z. B. $l = 8$, $k = 5$, $n = 4$ in Fig. 1a) unabhängige „Kreisvariable" x_r ausgedrückt werden können.

$$(3) \qquad x_p' = \sum_{r=1}^{n} \gamma_{pr}\, x_r.$$

---

[17]) Vgl. hierzu auch den Abschnitt II in QFS.

Bei passender Numerierung der x_p' besteht zwischen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ keine lineare Relation, und diese x_p' mögen dann mit den x_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ identifiziert werden, also

$$\gamma_{pr} = \begin{cases} 1 \text{ für } p = r, \\ 0 \text{ für } p \neq r, \end{cases} \quad \text{falls } r \leqq n.$$

Die γ_{pr} bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen des Diophantischen linearen Gleichungssystems

$$\sum_{p=1}^{l} m_{ip} \gamma_{pr} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

aus denen sich die übrigen γ_{pr} eindeutig bestimmen.

Hilfssatz 1. Jede aus M gebildete Determinante hat entweder den Wert $+1$, -1 oder 0 (leicht durch vollständige Induktion zu beweisen).

Hieraus folgt, daß alle γ_{pq} nur die Werte $+1$, -1 oder 0 annehmen können.

Definition 4. Eine zyklische Folge von orientierten Zweigen derart, daß jeder folgende Zweig in dem Knotenpunkt beginnt, in welchem der vorhergehende endigt, heißt (geschlossener) „Kreis".

Ein *Kreis* wird *vollständig charakterisiert* durch ein ganzzahliges nicht identisch verschwindendes *teilerfremdes Lösungssystem* $x_p' = d_p$ *von* (2). d_p gibt an, wie oft der Zweig p des Streckenkomplexes bei einmaliger Durchlaufung der den Kreis bildenden Zweigfolge vorkommt, wobei eine Durchlaufung im Sinne von M mit $+1$, im entgegengesetzten Sinne mit -1 gezählt wird.

Besteht irgendeine lineare Relation zwischen den Zweigen eines Streckenkomplexes, so heißt das demnach, daß ein geschlossener Kreis im Streckenkomplex vorhanden ist.

Die γ_{pr} charakterisieren speziell ein *Fundamentalsystem von n Kreisen mit folgenden Eigenschaften:*

a) In jedem Fundamentalkreis gibt es einen Zweig, der keinem anderen Fundamentalkreis angehört (Zweige $r = 1, 2, \ldots, n$).

b) Jeder Fundamentalkreis enthält jeden in ihm enthaltenen Knotenpunkt und Zweig nur einmal.

Als Orientierung eines Fundamentalkreises wird die Orientierung des in ihm ausgezeichneten Zweiges definiert.

γ_{pr} hat den Wert $+1$ oder -1, je nachdem der r-te Fundamentalkreis mit einem vorkommenden Zweig p gleichorientiert ist oder nicht, und γ_{pr} verschwindet, wenn der Kreis r den Zweig p nicht enthält.

Definition 5. In einem zusammenhängenden Streckenkomplex M heißt ein in ihm enthaltener zusammenhängender Teilkomplex ohne geschlossene Kreise mit Maximalzahl von Zweigen ein „Baum“[18]); die im Baum nicht enthaltenen (n) Zweige heißen „unabhängig“.

Die Zahl der Zweige eines Baumes und der Rang ist $k-1$, und umgekehrt ist jeder Teilkomplex von $k-1$ Zweigen vom Range $k-1$ ein Baum (z. B. Zweige 5, 6, 7, 8 in Fig. 1a). Die Zweige $n+1, n+2, \ldots, l$

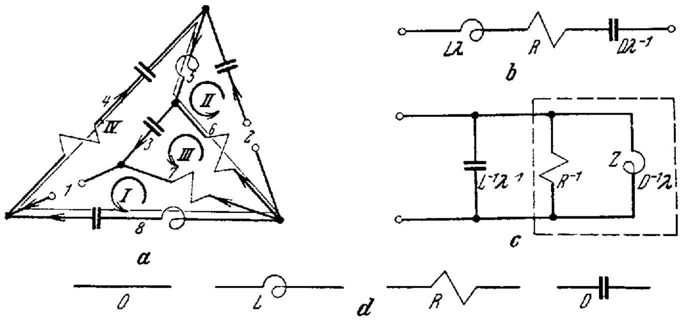

Fig. 1.

in der oben festgesetzten Numerierung bilden einen Baum. Jedem Baum entspricht eindeutig ein Fundamentalsystem von Kreisen (I, II, III, IV in Fig. 1a).

Die quadratischen Formen

$$\sum_{p=1}^{l} L_p x_p'^2, \qquad \sum_{p=1}^{l} R_p x_p'^2, \qquad \sum_{p=1}^{l} D_p x_p'^2,$$

mit den Matrizen L^*, R^*, D^*[19]) werden einem Streckenkomplex M dadurch zugeordnet, daß L_p, R_p, D_p dem p-ten Zweige von M zugeordnet werden. Durch die Transformation (3) gehen diese neu eingeführten quadratischen Formen in solche mit unabhängigen „Kreisvariabeln“

$$\sum_{i,j=1}^{n} L_{ij} x_i x_j, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} R_{ij} x_i x_j, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} x_i x_j$$

über[19a]). Sei $A^* = L^*\lambda + R^* + D^*\lambda^{-1}$. Den Nebenbedingungen (2) entspricht eine Ränderung der Matrix A^* mit der um eine Zeile verminderten Matrix M, welche M^* heißen möge:

$$C = \begin{pmatrix} A^* & M^{*\prime} \\ M^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

---

18) Etwas abweichend von der üblichen Definition eines „Baumes“.

19) Für die Zwecke dieser Arbeit genügt es, diese quadratischen Formen als Quadratsummen vorauszusetzen. Allgemeinere Zuordnungen von quadratischen Formen zu Streckenkomplexen sind in QFS behandelt.

19a) Für den Zusammenhang zwischen den L_{ij}, R_{ij}, D_{ij} und den L_p, R_p, D_p bestehen einfache geometrische Regeln, die unmittelbar aus dem über die γ_{pr} Gesagten folgen und am Ende des Abschnittes II 14 von QFS angegeben sind. Z. B. ist hier in Fig. 1a $D_{44} = D_4 + D_8$, $R_{33} = -R_6$.

Hilfssatz 2. Die aus den ersten n-Zeilen und Spalten von C^{-1} bestehende Matrix C^{-1*} ist identisch mit A^{-1}, wenn die in den unabhängigen Kreisvariabeln x_i geschriebenen quadratischen Formen L^*, R^*, D^* mit den Formen L, R, D unserer Problemstellung identifiziert werden.

Zum Beweis löse man z. B. das Extremalproblem

$$\delta\left(\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{l} A_p x_p'^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i\right) = 0$$

unter den Nebenbedingungen (2) einmal nach der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und das andere Mal durch das Einführen der unabhängigen Kreisvariabeln x_i und löse die so gewonnenen linearen Gleichungen nach $x_1 = x_1', \ldots, x_n = x_n'$ auf.

Definition 6. Wenn eine gegebene symmetrische quadratische Funktionenmatrix Q als Hauptminor einer Matrix C^{-1*} aufgefaßt oder dargestellt werden kann, so nennen wir das eine „Darstellung von Q in einem Streckenkomplex M“ [20]), falls die vermöge (3) transformierten quadratischen Formen L^*, R^*, D^* nicht negativ sind.

Hinreichend, aber nicht notwendig dafür, daß die aus L^*. R^*, D^* durch die Transformationen (3) entstehenden Formen L, R, D nicht negativ sind, ist, daß

$$L_p \geqq 0, \quad R_p \geqq 0, \quad D_p \geqq 0. \tag{6}$$

Nach Hilfssatz 2 ist eine „in einem Streckenkomplex darstellbare“ Matrix auch darstellbar im Sinne der Definition 1. Darstellungen in Streckenkomplexen werden demgemäß in den folgenden Paragraphen als Beweismittel für die „Darstellbarkeit“ benutzt.

Eine Darstellung durch einen Streckenkomplex wird statt durch die Matrix (5) mehr anschaulich durch das Bild eines Streckenkomplexes repräsentiert, wenn in die betreffenden Zweige noch Zeichen für die zugeordneten A_p (L_p, R_p, D_p) eingetragen werden. Die Zeichen für $0, L_p, R_p, D_p$ werden gemäß Fig. 1d verabredet. Diejenigen Zweige, welche der dargestellten Matrix Q speziell zugeordnet sind, d. h. die zu dem betreffenden Hauptminor in C^{-1*} (Definition 6 und Hilfssatz 2) gehörigen Zweige werden in der Darstellung durch „Öffnung“ der betreffenden Zweige, d. h. Zufügung zweier neuer Knotenpunkte oder „Pole“ in jedem solchen Zweig, hervorgehoben. Demgemäß möge definiert werden:

Definition 7. Eine Darstellung einer q-reihigen Matrix Q in einem Streckenkomplex heißt $2q$-Pol.

---

[20]) Dieser Begriff „Darstellung in einem Streckenkomplex“ deckt sich nur teilweise mit der „Darstellung im engeren Sinne“ von QFS.

Fig. 1a zeigt einen Vierpol, Fig. 1b und 1c Zweipole. Die Orientierung der Zweige wird durch Pfeile markiert.

Hilfssatz 3. Eine durch einen $2q$-Pol dargestellte Funktionenmatrix ist invariant gegenüber Orientierungsänderungen der ihr nicht speziell zugeordneten (geöffneten) Zweige und ebenso unabhängig von der Wahl des Systems von Fundamentalkreisen, sofern nur die geöffneten Zweige dem entsprechenden System von unabhängigen Zweigen angehören.

Eine Orientierungsänderung eines geöffneten Zweiges bewirkt lediglich eine Vorzeichenänderung der zugehörigen Zeile und Kolonne der dargestellten Matrix.

Der Beweis folgt unmittelbar durch Bildung der zu (5) inversen Matrix C^{-1}. Insbesondere also ändert eine gleichzeitige Orientierungsänderung sämtlicher geöffneten Zweige nichts an der dargestellten Matrix. Demgemäß erübrigt sich bei einem Zweipol jede Orientierung (Fig. 1b und 1c).

Definition 8. A_p heißt „Funktionswert“, L_p, R_p, D_p „Elemente“ des Zweiges p. Werden für A_p statt $L_p\lambda + R_p + D_p\lambda^{-1}$ beliebige Funktionen von λ zugelassen, so heißt die Darstellung durch den Streckenkomplex „uneigentlich“.

Folgende Hilfssätze erlauben eine kombinatorische und anschauliche Ermittlung der Elemente α_{ij} einer dargestellten Matrix aus dem darstellenden Streckenkomplex. Sei c die Determinante von C (5), c_{ij} das algebraische Komplement zu C_{ij}, so daß $\alpha_{ij} = \frac{c_{ij}}{c}$.

Hilfssatz 4[20a]). $(-1)^{k-1}c$ ist gleich der Summe aller Produkte der Funktionswerte von je $n = l - k + 1$ unabhängigen Zweigen.

$(-1)^{k-1}c_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ ist gleich der Summe aller Produkte der Funktionswerte von je $n - 1$ Zweigen, nach deren Entfernung noch ein geschlossener Kreis, der den Zweig i enthält, vorhanden ist, derart, daß nach weiterer Entfernung des i-ten Zweiges ein Baum übrig bleibt.

$(-1)^{k-1}c_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, l;\ i \neq j)$ ist gleich der algebraischen Summe aller mit passendem Vorzeichen versehenen Produkte der Elemente von je $n - 1$ Zweigen, nach deren Entfernung noch ein zugleich durch Zweig i und Zweig j laufender Kreis vorhanden ist, derart, daß sowohl nach weiterer Entfernung des i-ten Zweiges, als auch nach weiterer Entfernung des j-ten Zweiges ein Baum übrig bleibt. Dabei ist das Vorzeichen eines Produktes positiv zu nehmen, wenn die Zweige i und j relativ zu dem durch sie laufenden ausgezeichneten Kreis gleich orientiert sind, andernfalls negativ.

[20a]) Dieser Satz findet sich in anderer Form bei G. Kirchhoff, Pogg. Annalen 72 (1847).

Der Beweis kann durch Laplace-Entwicklung der Determinante von $C(5)$ nach den letzten $k-1$ Zeilen und Spalten unter Berücksichtigung des Hilfssatzes 1 erbracht werden.

Hilfssatz 5. Die durch einen $2q$-Pol dargestellte Matrix ändert sich nicht, wenn ein in ihm enthaltener Zweipol ohne geöffnete Zweige (wie z. B. Z in Fig. 1c) durch einen einzigen Zweig mit einem Funktionswert ersetzt wird, welcher zu der durch diesen Zweipol dargestellten Funktion reziprok ist[21]).

Definition 9. Der durch den „Verkürzungsprozeß" von Hilfssatz 5 entstehende Ersatz-$2q$-Pol heißt eine „verkürzte Darstellung".

Verkürzte Darstellungen sind im allgemeinen uneigentlich gemäß Definition 8, aber nicht jede uneigentliche Darstellung kann als verkürzte aufgefaßt werden.

Definition 10. Zwei Zweige „liegen in Reihe", wenn sie in einem Knotenpunkt zusammenstoßen, der für keinen weiteren Zweig Anfangs- oder Endpunkt ist; zwei Zweige „liegen parallel", wenn sie in zwei Knotenpunkten aneinanderstoßen. Die Verkürzung zweier in Reihe liegender Zweige zu einem einzigen Zweig heißt „Reihenverkürzung", die Verkürzung zweier parallel liegender Zweige zu einem einzigen Zweig „Parallelverkürzung".

Hilfssatz 6. Ein aus zwei in Reihe liegenden Zweigen mit den Funktionswerten $z_1(\lambda)$ und $z_2(\lambda)$ bestehender Zweipol stellt die Funktion $\frac{1}{z_1(\lambda)+z_2(\lambda)}$; ein aus zwei parallel liegenden Zweigen mit den Funktionswerten $z_1(\lambda)$ und $z_2(\lambda)$ bestehender Zweipol stellt die Funktion $z_1^{-1}(\lambda)+z_2^{-1}(\lambda)$ dar.

(Zu beweisen z. B. wieder durch Ausrechnung der Determinanten von C (5).)

Damit kennt man gemäß Hilfssatz 5 einfache Regeln für die Änderung der zugeordneten Funktionswerte bei dem Prozeß der „Reihenverkürzung" und der „Parallelverkürzung".

Definition 11. Zweipole, die durch fortgesetzte Reihen- und Parallelverkürzung zu einem einzigen Zweig zusammengezogen werden können, heißen „einfach"[22]).

[21]) Der Beweis kann durch Umformung der Determinanten von $C(5)$ geführt werden. Ein natürlicherer Beweis des Hilfssatzes 5 ergibt sich durch Einführung von neuen Variabeln, die den Knotenpunkten zugeordnet sind und den elektrischen Potentialen entsprechen, so wie die x' den elektrischen Strömen entsprechen.

[22]) Von den in QFS benutzten Begriffen „Reihen-" und „Parallelverkürzung" und „einfacher Zweipol" bilden die hier eingeführten gleichnamigen Begriffe einen Spezialfall, da „Verknüpfungselemente" in dieser Arbeit nicht in Betracht gezogen werden.

Die weiterhin hier vorkommenden Zweipole sind einfach (z. B. Fig. 1b, 1c, 3, 4).

Nach den Hilfssätzen 5 und 6 kann jede Partialbruchzerlegung und Kettenbruchentwicklung einer Funktion als (eventuell uneigentliche) Darstellung der Funktion durch einen Streckenkomplex oder als einfacher Zweipol aufgefaßt werden.

Zu jedem einfachen Zweipol kann man einen reziproken angeben, der dem ersten Zweig für Zweig zugeordnet wird, derart, daß zwei Zweige oder Teilzweipole, die in dem ersten Zweipol parallel liegen, in dem zweiten Zweipol in Reihe liegen und umgekehrt, und die Zweige des zweiten Zweipols Funktionswerte haben, die zu denen des ersten Zweipols reziprok sind. Speziell sind Fig. 1b und 1c reziproke einfache Zweipole. Reziproke Zweipole stellen reziproke Funktionen dar.

Kann man eine positive Funktion in zwei Summanden zerlegen, die beide positiv sind, und die Summanden oder ihre reziproken Werte, die wieder positive Funktionen sind, in gleicher Weise weiter zerlegen usf., bis man schließlich nur einfache Glieder $L\lambda$, R, $D\lambda^{-1}$ übrig behält, so entspricht diesem Zerlegungsprozeß, der eine Mischung von Partialbruchzerlegung und Kettenbruchentwicklung ist, offenbar eine Darstellung der Ausgangsfunktion durch einen (eigentlichen) einfachen Zweipol.

§ 3.

Fall $q = 1$.

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall $q = 1$, d. h. auf Zweipole und dargestellte skalare positive Funktionen und hier wiederum auf solche dargestellte rationale Funktionen, deren Grad dem Fall $n = 2$ entspricht, nämlich rationale Funktionen der Form

$$\alpha_{11} = \frac{b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda}{a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4}, \tag{7}$$

deren Koeffizienten ohne Einschränkung der Allgemeinheit als reell angenommen werden können. Unter α_{ij} sind die Elemente der Matrix A^{-1} zu verstehen.

Satz 2. *Jede positive Funktion der Form* (7) *ist darstellbar.*

Wir gehen davon aus, daß die Voraussetzung der Positivheit für eine in der rechten Halbebene reguläre rationale Funktion oder, allgemeiner, für eine im Innern der rechten Halbebene reguläre Funktion, die auf der imaginären Achse keine anderen Singularitäten als Pole besitzt, lediglich durch das Verhalten der Funktion auf der imaginären Achse charakterisiert werden kann.

Hilfssatz 7. Eine im Innern der rechten Halbebene reguläre und für reelle λ reellwertige Funktion $f(\lambda)$, die auf der imaginären Achse keine anderen Singularitäten als Pole besitzt und nicht identisch verschwindet, ist dann und nur dann positiv, wenn sie in den regulären Punkten der imaginären Achse nicht negativen reellen Teil, und dort als Singularitäten nur einfache Pole hat, deren Residuen alle positiv sind. Ist Unendlich ein Pol, so ist dabei das zu diesem Pol gehörige Residuum als das Residuum von $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ für $\lambda = 0$ definiert.

Beweis des Hilfssatzes 7. Die Notwendigkeit der Bedingungen für einen Pol auf der imaginären Achse folgt sofort daraus, daß für Pole anderer Beschaffenheit Bildpunkte der Umgebung dieses Poles negativ reellen Teil erhalten. Jedem Pol auf der imaginären Achse entspricht ein konjugiert komplexer Pol mit gleichem Residuum, beide addiert mit einem Partialbruchanteil

$$\frac{a\lambda}{\lambda^2+b}; \tag{8}$$

ist der Nullpunkt Pol, so entspricht ihm speziell der Partialbruchanteil

$$\frac{a}{\lambda}; \tag{9}$$

ist Punkt ∞ Pol, so entspricht ihm der ganze rationale Anteil

$$a\lambda, \tag{10}$$

worin immer $a > 0$, $b > 0$ gelten muß. Diese drei einfachen Typen von Funktionen sind offenbar positiv. Nach Subtraktion solcher höchstens in endlicher Anzahl auftretender Partialbruchanteile von $f(\lambda)$, die mit Ausnahme des betreffenden Poles auf der ganzen imaginären Achse rein imaginär sind, bleibt eine Funktion mit reellen Koeffizienten übrig, die in der abgeschlossenen rechten Halbebene regulär ist und auf der imaginären Achse nicht negativ reellen Teil besitzt. Aus dem Umstande, daß der Realteil als harmonische Funktion sein Minimum auf dem Rande annehmen muß, folgt, daß die Restfunktion eine positive Funktion ist, ausgenommen, wenn sie auf der ganzen imaginären Achse verschwindenden Realteil hat. In diesem Ausnahmefall ergibt sich nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip[23]) aber, daß die Restfunktion in der ganzen λ-Halbebene regulär, also eine rein imaginäre Konstante und somit identisch Null ist. Für die ursprüngliche Funktion folgt die Posivität dann einfach daraus, daß die Summe zweier positiver Funktionen wieder eine positive Funktion liefert. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

---

[23]) Um den folgenden Schluß zu machen, genügt schon die Voraussetzung, daß der Restteil nur in einem Intervall der imaginären Achse rein imaginär ist.

Man bemerke, was für das Folgende wichtig ist, daß die Funktionen (8), (9), (10), bzw. eine Darstellung gestatten durch ein Element $L = a^{-1}$ und ein Element $D = b \cdot a^{-1}$ in Reihe, ein Element $L = a^{-1}$, ein Element $D = a^{-1}$ und die zu (8), (9), (10) reziproken Funktionen, bzw. durch eine Parallelanordnung eines Elementes $L = a b^{-1}$ und eines Elementes $D = a$, durch ein Element $D = a$, ein Element $L = a$. Die Bedingung dafür, daß der Realteil von (7) auf der imaginären Achse nicht negative Werte annimmt, lautet

$$V_1 \xi_1^2 + V_2 \xi_1 \xi_2 + V_3 \xi_2^2 \geqq 0 \quad \text{für} \quad \xi_1 \geqq 0, \ \xi_2 \geqq 0, \tag{11}$$

worin

$$\left\{ \begin{aligned} V_1 &= a_1 b_1 - a_0 b_2, \\ V_2 &= a_2 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_1, \\ V_3 &= a_3 b_3 - a_4 b_2. \end{aligned} \right. \tag{12}$$

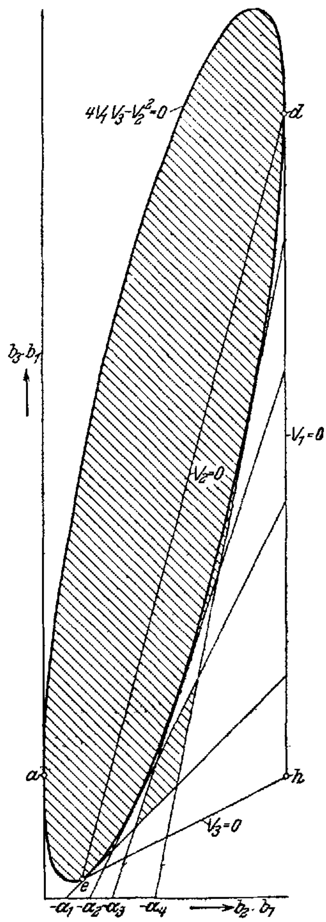

Fig. 2.

Um Weitschweifigkeiten zu vermeiden, beschränken wir uns auf den Fall, daß die Nullstellen des Nenners von (7) im Innern der linken Halbebene liegen[24]). Hier ist die Funktion (7) noch auf der ganzen imaginären Achse regulär und daher die Bedingung (11) nach Hilfssatz (7) auch hinreichend für die Positivität. In dieser Bedingung ist enthalten, daß a_0 und b_1 gleiches Zeichen haben[25]). Setzen wir dies voraus und denken wir uns die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ des Nenners von (7) irgendwie in der linken Halbebene gegeben, so ist der für positive Funktionen (7) charakteristische Bereich in der kartesischen $\frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_1}$-Ebene (Fig. 2) durch das Innere der Ellipse

$$4 V_1 V_3 - V_2^2 = 0 \tag{13}$$

---

[24]) Dieses ist der komplizierteste Fall. Ist z. B. a_0 oder a_4, oder sind beide gleich 0, so ist der im folgenden Beweis vorgenommene Reduktionsprozeß in vereinfachter Form anwendbar. Im Fall $a_0 = 0$ wird aus der Ellipse Fig. 2 eine Parabel. Enthält der Nenner zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, so hat man zuerst gemäß dem Beweis von Hilfssatz 7 einen Partialbruchanteil der Form (8) abzuspalten und gelangt sofort zu einer positiven Funktion der Form eines Gliedes der rechten Seite von (15).

[25]) Bedingung (11) enthält unter anderem die notwendige Bedingung, daß *alle* Koeffizienten von (7) gleiches Zeichen haben.

zusammen mit dem von ihren Tangenten $V_1 = 0$ und $V_3 = 0$ und der Ellipse eingeschlossenen Gebiet gekennzeichnet. Die Positivheitsbedingung entspricht also in Fig. 2 dem konvexen Bereich *aehda*. Darin ist *a* der Berührungspunkt der Ellipse mit der Geraden $b_2 = 0$, *d* ihr Berührungspunkt mit $V_1 = 0$ und *e* ihr Berührungspunkt mit $V_3 = 0$, *h* der Schnittpunkt von $V_1 = 0$ und $V_3 = 0$. Die vollständige Diskussion der mit $n = 2$ darstellbaren Funktionen[26]) (7) ergab das Resultat, daß nur ein Teil des eben beschriebenen Gebietes darstellbar ist, der von der Ellipse (13) und dem reellen Teil der gleich Null gesetzten Resultante von Zähler und Nenner in (7) begrenzt wird, die vier Tangenten der Ellipse darstellt. In Fig. 2 ist ein Beispiel des kompliziertesten Falles gezeichnet, in dem diese vier Tangenten sämtlich reell sind. Das darstellbare Gebiet ist schraffiert.

Für das Folgende ist es nur wesentlich, daß in allen Fällen das Innere der Ellipse (13) mit $n = 2$ darstellbar ist.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß das von den drei Geraden $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ eingeschlossene Dreiecksgebiet *hde* ($V_1 \geqq 0$, $V_2 \geqq 0$, $V_3 \geqq 0$) stets mit $n > 2$ darstellbar ist. Zum Beweis sollen „einfache" Zweipole konstruiert werden, welche eine Darstellung durch einen Streckenkomplex leisten. Wir nehmen eine Zerlegung der Funktion (7) derart vor, wie sie am Ende von § 2 geschildert wurde.

α_{11}^{-1} hat für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ je einen einfachen Pol. Die zugehörigen Partialbruchanteile $\frac{a_0 \lambda}{b_1}$, $\frac{a_4}{b_3 \lambda}$ spalten wir ab. Die Funktion

$$\alpha_{11}^{-1} - \frac{a_0 \lambda}{b_1} - \frac{a_4}{b_3 \lambda} = \frac{a_1' \lambda^2 + a_2' \lambda + a_3'}{b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + \lambda_3}$$

ist wieder positiv. Bei dieser Operation bleibt $V_1 = V_1'$, $V_2 = V_2'$, $V_3 = V_3'$ invariant. Es ist daher auch insbesondere

$$V_2' = a_2' b_2 - a_1' b_3 - a_3' b_1 \geqq 0 . \tag{14}$$

Für Punkte des Dreiecks *hde* ist eine weitere Zerlegung in zwei positive Funktionen auf unendlich viele Weisen möglich:

$$\frac{a_1' \lambda^2 + a_2' \lambda + a_3'}{b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3} = \frac{a_1' \lambda^2 + a_2'' \lambda}{b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3} + \frac{a_2''' \lambda + a_3'}{b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3} = u + v. \tag{15}$$

Nach (14) kann man nämlich auf unendlich viele Weisen setzen:

$$a_2' = a_2'' + a_2''',$$

derart, daß $\operatorname{sgn} a_2' = \operatorname{sgn} a_2'' = \operatorname{sgn} a_2'''$ und ferner die Ungleichungen

$$a_2'' b_2 - a_1' b_3 \geqq 0$$

und

$$a_2''' b_2 - a_3' b_1 \geqq 0$$

---

[26]) R. M. Foster, The Bell Syst. Techn. Journ., Okt. 1924, und Cauer, Archiv für Elektrotechnik 1926.

erfüllt sind. Da außerdem

$$V_1' = a_1' b_1 \geqq 0$$

und

$$V_2' = a_3' b_3 \geqq 0$$

ist, sind hinreichende Bedingungen für die Positivheit von u und v vorhanden. Von u^{-1} wird wiederum das Glied $\frac{b_3}{a_3'' \lambda}$, von v^{-1} das Glied $\frac{b_1 \lambda}{a_3'''}$ abgespalten, wobei die restlichen Funktionen wieder notwendig positiv sind. Alles ist nun darauf reduziert, von einer linear gebrochenen positiven Funktion, d. h. von einer linear gebrochenen Funktion mit positiven Koeffizienten, die Darstellbarkeit nachzuweisen.

Die linear gebrochene positive[26a]) Funktion

$$\frac{\alpha \lambda + \beta}{\gamma \lambda + \delta}$$

wird nun aber z. B. durch einen einfachen Zweipol gemäß Fig. 3a oder Fig. 3b dargestellt, je nachdem

$$\alpha \delta - \beta \gamma \gtrless 0,$$

womit der Beweis von Satz 2 beendet ist.

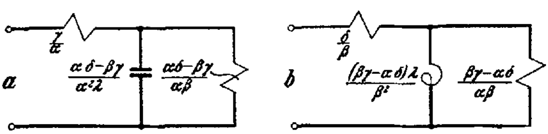

Fig. 3.

Der wesentliche Gesichtspunkt bei der Konstruktion einer Darstellung für irgendeine positive Funktion, deren Grad dem Fall $n = 2$ entspricht, war, daß man außer $n = 2$ auch ausgeartete Fälle (semidefinite Formen L, R, D) $n > 2$ zur Darstellung mit heranziehen muß.

Ausgehend von Satz 2 hat kürzlich Otto Brune einen sehr einfachen und funktionentheoretisch durchsichtigen, für beliebige positive Funktionen anwendbaren Kettenbruchalgorithmus (Darstellung durch einfache Zweipole) entwickelt, der den Stieltjesschen Kettenbruchalgorithmus als Sonderfall enthält, und dadurch die *Darstellbarkeit jeder positiven rationalen Funktion bewiesen*[26b]).

§ 4.

Approximation beliebiger positiver Funktionen durch darstellbare Funktionen.

In diesem Abschnitt wird der Satz bewiesen:

Satz 3. *Jede positive Funktion kann in jedem abgeschlossenen Teilgebiet der Halbebene $\Re \lambda > 0$ gleichmäßig durch eine mit hinreichend großem*

[26a]) „Positiv" ist in diesem Fall gleichwertig mit $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\gamma \geqq 0$, $\delta \geqq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

[26b]) Otto Brune, „Synthesis of a finite two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency", Journal of Mathematics and Physics, 10, No. 3 (1931).

endlichem n darstellbare Funktion approximiert werden, wobei die Darstellung nur zwei quadratische Formen, nämlich die L- und die D-Form, enthält.

Beweis. Für positive Funktionen w gilt nämlich die Poissonsche Integraldarstellung[27])

$$w = \lambda\left(C + \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\lambda^2 + x}\right), \tag{16}$$

worin $C \geqq 0$ und ψ eine nicht abnehmende Funktion ist, die der Bedingung genügt, daß $\int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{x}$ für $a > 0$ existiert und das Integral im Stieltjesschen Sinne genommen werden soll. Ist w noch auf der imaginären Achse regulär, so ist ψ differentiierbar und die Ableitung ψ' proportional $\Re w$:

$$\psi'(x) = \frac{\Re w(i\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}} \geqq 0. \tag{16a}$$

Ein solches Integral (16) kann aber in jedem abgeschlossenen Teilgebiet der Halbebene $\Re\lambda > 0$ gleichmäßig durch eine Summe angenähert werden, welche die Form

$$\lambda\left(C + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{a_\nu}{\lambda^2 + b_\nu}\right) \tag{17}$$

besitzt, wo $C \geqq 0$, $a_\nu > 0$, $b_\nu \geqq 0$.

Jede Summe (17) wird aber z. B. durch einen Zweipol Fig. 4a dargestellt[28]). Man vergleiche dazu die Bemerkungen über die Darstellbarkeit der Funktionen (8), (9), (10) auf S. 382 und den Hilfssatz 6.

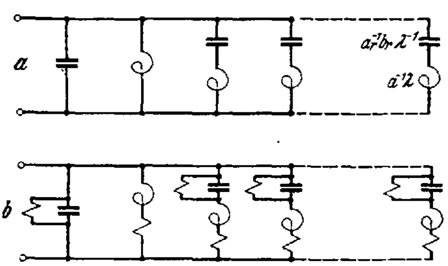

Fig. 4.

In den Anwendungen handelt es sich gewöhnlich um solche positive Funktionen, die als Funktionen von $\lambda + \varepsilon$, mit genügend kleinem $\varepsilon > 0$, noch positiv sind. Für sie gilt die zu (17) analoge Partialbruchapproximation

$$\mu\left(C + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{a_\nu}{\mu^2 + b_\nu}\right), \tag{18}$$

[27]) Sie wurde abgeleitet aus einem Resultat von G. Herglotz in den Leipziger Berichten 1911 unter Anwendung einer linear gebrochenen Transformation und unter Berücksichtigung des Umstandes, daß es sich um Funktionen handelt, die für reelle λ reellwertig sind.

[28]) Über äquivalente Darstellungen siehe loc. cit. Archiv f. Elektrotechn. 1926 und QFS.

wo $C \geqq 0$, $a_\nu > 0$, $b_\nu \geqq 0$, $\mu = \lambda + \varepsilon$. Sie ist in λ auch noch auf der imaginären Achse selbst gültig[29]). Die Funktion (18) ist nicht nur eine in μ positive Funktion, sondern erst recht eine in λ positive Funktion, und kann demnach gemäß § 3 dargestellt werden. Es läßt sich aber sehr leicht unmittelbar eine Fig. 4a entsprechende Darstellung durch einen Streckenkomplex angeben (Fig. 4b), die wieder ein einfacher Zweipol ist. Fig. 4b geht aus Fig. 4a dadurch hervor, daß neben jedes D-Element von Fig. 4a ein R-Element parallel gelegt wird, derart, daß

$$\frac{D}{R} = \varepsilon, \tag{19}$$

und ebenso mit jedem L-Element ein R-Element in Reihe gelegt wird, derart, daß

$$\frac{R}{L} = \varepsilon. \tag{20}$$

§ 5.
Fall $q = 2$.

Von dem Fall $q = 2$, d. h. positiver zweireihiger Matrizen

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

werden hier zwei Spezialfälle behandelt. Zu der stets geltenden Einschränkung $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ nehmen wir erstens die weitere Einschränkung $\alpha_{11} = \alpha_{12}$ hinzu. Dann kann leicht der Satz bewiesen werden:

Satz 4. *Jede positive Matrix der Form* $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11} \\ \alpha_{11} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ *ist darstellbar.*

Beweis. Wir betrachten den uneigentlichen Vierpol Fig. 5a und berechnen die durch ihn dargestellte Matrix, ausgedrückt durch $z_1(\lambda)$ und $z_2(\lambda)$, die Funktionswerte seiner Zweige. Dieser Vierpol enthält nach Schließung von Zweig 1 und 2 zwei Knotenpunkte und drei Zweige, letztere mit den Funktionswerten z_1, 0, z_2.

Nach Hilfssatz 4 erhält man sofort

$$\begin{aligned} -c &= z_1 z_2, \\ -c_{11} &= z_2, \\ -c_{22} &= z_1 + z_2, \\ -c_{12} &= z_2, \end{aligned}$$

[29]) In den Anwendungen interessieren hauptsächlich rein imaginäre λ, d. h. reelle Frequenzen des Wechselstroms.

also

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{c_{11}}{c} = z_1^{-1}, \\ \alpha_{22} &= \frac{c_{22}}{c} = z_1^{-1} - z_2^{-1}, \\ \alpha_{12} &= \frac{c_{12}}{c} = z_1^{-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Da die Bedingung $\alpha_{11} = \alpha_{12}$ erfüllt ist, lassen sich z_1 und z_2 so bestimmen, daß Fig. 5a eine (zunächst uneigentliche) Darstellung von $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{11}\\ \alpha_{11} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$ gibt. Durch Auflösung von (22) folgt

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_{11}^{-1}, \\ z_2 &= (\alpha_{22} - \alpha_{11})^{-1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Die Positivheitsvoraussetzung besagt im wesentlichen

$$\Re\,\alpha_{11} > 0 \qquad \text{für} \quad \Re\,\lambda > 0$$

und

$$\Re\,\alpha_{11}\,\Re\,\alpha_{22} - (\Re\,\alpha_{11})^2 > 0 \quad \text{für} \quad \Re\,\lambda > 0,$$

wovon die letzte Ungleichung ersetzt werden kann durch

$$\Re\,(\alpha_{22} - \alpha_{11}) > 0 \quad \text{für} \quad \Re\,\lambda > 0.$$

Danach sind z_1 und z_2 in (23) positive Funktionen und als solche nach § 3 darstellbar. Die uneigentliche Darstellung Fig. 5a kann danach als verkürzte (eigentliche) Darstellung aufgefaßt werden, und damit ist Satz 4 durch Reduktion auf $q = 1$ bewiesen.

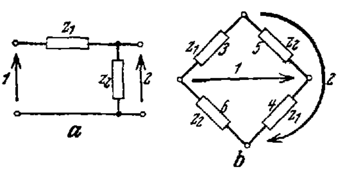

Fig. 5.

Mathematisch interessanter und für die Anwendungen wichtiger ist ein zweiter Spezialfall von (21), nämlich der Fall, wo die Einschränkung $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ gilt.

Definition 12. Unterliegt die durch einen Vierpol dargestellte Matrix $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$ der Einschränkung $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, so heißt der Vierpol „symmetrisch".

Die durch einen „symmetrischen" Vierpol dargestellte Matrix ändert sich nicht, wenn die beiden geöffneten Zweige miteinander vertauscht werden.

Satz 5. *Jede positive Matrix der Form* $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{12} & \alpha_{11}\end{pmatrix}$ *ist darstellbar.*

Beweis. Wir betrachten den uneigentlichen Vierpol Fig. 5b und berechnen die durch ihn dargestellte Matrix. Dieser Vierpol enthält (nach Schließung der Zweige 1 und 2) vier Knotenpunkte und sechs Zweige, der Reihe nach mit den Funktionswerten $0, 0, z_1, z_1, z_2, z_2$. Die Anwendung von Hilfssatz 4 ergibt:

$$\begin{aligned} -c &= 2z_1z_2^2 + 2z_1^2z_2, \\ -c_{11} &= -c_{22} = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2, \\ -c_{12} &= z_1^2 - z_2^2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{22} = \frac{c_{11}}{c} = \frac{c_{22}}{c} = \frac{z_1+z_2}{2z_1z_2}, \\ \alpha_{12} &= \frac{c_{12}}{c} = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2z_1z_2(z_1+z_2)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Die Auflösung der Gleichungen (24) nach z_1 und z_2 ergibt

$$\begin{aligned} z_1 &= (\alpha_{11} + \alpha_{12})^{-1}, \\ z_2 &= (\alpha_{11} - \alpha_{12})^{-1}. \end{aligned} \tag{25}$$

Die Positivheitsvoraussetzung besagt im vorliegenden Fall in der Hauptsache

$$\begin{aligned} &\Re\alpha_{11} > 0 && \text{für } \Re\lambda > 0, \\ &(\Re\alpha_{11})^2 - (\Re\alpha_{12})^2 > 0 && \text{für } \Re\lambda > 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Also haben entweder $\Re\alpha_{11} + \Re\alpha_{12}$ und $\Re\alpha_{11} - \Re\alpha_{12}$ beide negatives oder beide positives Zeichen für $\Re\lambda > 0$. Das erste würde einen Widerspruch gegen $\Re\alpha_{11} > 0$ für $\Re\lambda > 0$ ergeben. Somit sind die Bedingungen (26) äquivalent zu

$$\Re(\alpha_{11} \pm \alpha_{12}) > 0 \quad \text{für} \quad \Re\lambda > 0. \tag{27}$$

Danach sind z_1 und z_2 in (25) positive Funktionen und nach § 3 darstellbar. Somit ist auch Satz 5 durch Reduktion auf $q = 1$ bewiesen.

§ 6.

Das Interpolationsproblem der symmetrischen Siebschaltungen.

Das in diesem Abschnitt behandelte Interpolationsproblem ist ein typisches Beispiel einer Aufgabe, in der nicht eine gegebene positive Matrix Q dargestellt, sondern eine gewissen idealen Forderungen genügende Matrix Q^* approximativ dargestellt werden soll[30]). Soweit die Aufgabe, eine gegebene positive Matrix Q darzustellen, gelöst ist (unser Hauptproblem), reduzieren sich derartige Aufgaben darauf, den idealen Forderungen approximativ durch eine positive Matrix Q mit rationalen Elementen zu genügen[31]).

Der Entwurf symmetrischer elektrischer Siebschaltungen, die in gewissen Frequenzintervallen nahezu verschwindende „Gesamtdämpfung“ (Be-

[30]) Solche Aufgaben treten häufig in der Technik der Wechselstromschaltungen auf.

[31]) Die folgenden Ausführungen über das Interpolationsproblem der symmetrischen Siebschaltungen beschränken sich auf ein kurzes Referat, da ausführlichere Veröffentlichungen darüber an anderer Stelle schon erschienen sind oder noch erscheinen. Siehe die Literaturangaben Anm. [11]).

triebsdämpfung), in den komplementären Frequenzintervallen aber praktisch unendlich große Dämpfung haben sollen, führt auf ein Interpolationsproblem mit positiven Matrizen der Form des Satzes 5 (§ 5):

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{11} \end{pmatrix}.$$

Die idealen Forderungen lauten: Es soll

$$U = \log \left| \frac{(\alpha_{11}+1)^2 - \alpha_{12}^2}{2\,\alpha_{12}} \right| = 0$$

sein in gewissen vorgeschriebenen Intervallen der positiven imaginären Achse (und damit von selbst in den konjugiert imaginären Intervallen) und

$$U = \infty$$

in den komplementären Intervallen.

Unter der Benutzung der Parameter z_1 und z_2 von § 5 läßt sich demnach das Interpolationsproblem so formulieren:

Interpolationsproblem 1. Zwei rationale positive Funktionen z_1 und z_2 sind so zu bestimmen, daß die Forderungen

$$U = \log \left| \frac{(1+z_1)(1+z_2)}{z_2 - z_1} \right| = 0 \tag{28}$$

in gegebenen Intervallen der positiv imaginären Achse und

$$U = \infty \tag{29}$$

in den komplementären Intervallen approximativ erfüllt werden.

Es ist leicht zu sehen, daß wegen der Forderung (28) z_1 und z_2 (von Polen abgesehen) auf der imaginären Achse nahezu rein imaginär sein müssen. Um Weitläufigkeit in der Ausdrucksweise zu vermeiden, setzen wir weiterhin voraus, daß z_1 und z_2 solche rationale positive Funktionen sind, die auf der imaginären Achse bis auf Pole rein imaginär sind. Solche Funktionen sind nach den Erläuterungen zu Hilfssatz 7 bereits durch zwei quadratische Formen, nämlich L und D, darstellbar.

Definition 13. Positive Matrizen, die durch lediglich R und D dargestellt werden können, heißen Matrizen der Klasse $\mathfrak{B}$.

Positive Matrizen, die durch lediglich D und L dargestellt werden können, heißen Matrizen der Klasse $\mathfrak{C}$.

Positive Matrizen, die durch lediglich L und R dargestellt werden können, heißen Matrizen der Klasse $\mathfrak{D}$.

Weiterhin ist leicht zu sehen, daß sich das Interpolationsproblem 1 ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf das folgende einfachere Problem reduzieren läßt:

Interpolationsproblem 1a. Es sollen rationale Funktionen $z_1(\lambda)$ und $z_2(\lambda)$ der Klasse $\mathfrak{C}$ so bestimmt werden, daß die Gleichungen

$$z_1 z_2 = 1 \tag{30}$$

in gegebenen Intervallen der positiv imaginären λ-Achse und

$$\frac{z_1}{z_2} = 1 \tag{31}$$

in den komplementären Intervallen approximativ erfüllt werden.

Da mit z_2 auch $\frac{1}{z_2}$ Funktion der Klasse $\mathfrak{C}$ ist, sind beide Forderungen (30) und (31) gleicher Art. Mit (30) allein ist (28) erfüllt, mit (31) die Forderung (29). Es gilt

Satz 6. *Interpolationsproblem* 1a *ist lösbar in dem Sinne, daß die Approximation gleichmäßig beliebig gut gemacht werden kann in jedem Teilintervall*[31a]) *der gegebenen Intervalle für die Forderung* (30) *und zugleich in jedem Teilintervall der komplementären Intervalle für die Forderung* (31).

Verschiedene Lösungen des Interpolationsproblems 1 bzw. 1a, und somit Beweise des Satzes 6, findet man in den zitierten Arbeiten. Eine Lösung zeigt mittels einer Integraldarstellung den Grenzfall, wo der Grad der Funktionen z_1 und z_2 nach ∞ strebt und die Approximation ideal wird. Besonders wertvoll für die elektrotechnischen Anwendungen ist eine Approximation im Sinne von Tschebyscheff, welche bei genügend kleiner Zahl der gegebenen Intervalle, d. h. für die praktisch vorwiegend interessierenden Fälle, auf das Transformationsproblem der elliptischen Integrale zurückgeführt werden kann. Für alle diese Fälle wurden die Parameter der im Tschebyscheffschen Sinne approximierenden rationalen Funktionen z_1 und z_2 explizit ausgerechnet und durch ein umfangreiches Kurvenmaterial[31b]) dem Ingenieur, der Siebschaltungen zu entwerfen hat, zugänglich gemacht.

§ 7.

Approximation numerisch oder graphisch auf einem Stück der imaginären Achse gegebener komplexer Funktionen durch positive Funktionen[32]).

Die allgemeine Problemstellung dieses Abschnittes ist die folgende:

Interpolationsprobleme 2. In einem Intervall der positiven imaginären λ-Achse sind Realteil und Imaginärteil als stetige oder stückweise stetige Funktionen gegeben. Gesucht sind rationale positive Funktionen,

---

[31a]) dessen Enden innere Punkte eines der gegebenen Intervalle sind.

[31b]) Veröffentlicht in der in Anm. [11]) an zweiter Stelle genannten Arbeit.

[32]) Diese Interpolationsprobleme lassen sich natürlich auch auf positive Matrizen ausdehnen und sind auch in dieser Verallgemeinerung von praktisch großer Bedeutung.

bzw. Funktionen der Klassen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, welche diese gegebenen Funktionen approximieren, sowie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Approximierbarkeit[33]).

Eine Vereinfachung dieser Interpolationsprobleme besteht darin, daß verlangt wird, w in einer *endlichen Anzahl von Punkten* der imaginären λ-Achse durch rationale positive Approximationsfunktionen, bzw. solche Funktionen der Klassen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ *exakt wiederzugeben*. Für die Lösung dieser Aufgaben sind die Resultate der erwähnten Arbeit von G. Pick[34]) von Interesse. Zu beachten ist, daß die von Pick untersuchten Funktionen nicht für reelle λ reell sind, und daß die Interpolationsstellen bei Pick nach unserer Redeweise im Innern der rechten λ-Halbebene liegen.

Definition 14. Vorgeschriebene Wertepaare $(\lambda_1, w_1), (\lambda_2, w_2), \ldots, (\lambda_n, w_n)$ heißen für positive Funktionen (Funktionen der Klassen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$) „zulässig", wenn positive Funktionen (Funktionen der Klassen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$) existieren, welche die vorgeschriebenen Werte annehmen.

Im folgenden wird eine praktisch brauchbare Lösung für das vereinfachte Interpolationsproblem[35]) im Fall der Klasse $\mathfrak{B}$ mitgeteilt. Durch Vertauschung von λ mit λ^{-1} erhält man daraus die entsprechende Lösung für den Fall der Klasse $\mathfrak{D}$.

Alle Funktionen α_{11} der Klasse $\mathfrak{B}$ gestatten die Schreibweise

$$\alpha_{11}^{-1} = C + \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\lambda + x}, \tag{39}$$

wo $C \geqq 0$ ist, ψ eine nicht abnehmende Funktion und das Integral im Stieltjesschen Sinne zu nehmen ist.

Durch die Transformation $\lambda = y^2$ wird

$$y\alpha_{11}^{-1} = y\left(C + \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{y^2 + x}\right)$$

als Funktion von y eine allgemeine positive Funktion (vgl. (16) § 4). Die

---

[33]) Die Ausführungen dieses Paragraphen haben wie die des § 6 nur referierenden Charakter, da beabsichtigt ist, auf diese für die elektrotechnischen Anwendungen besonders wichtigen Interpolationsprobleme in einer besonderen Arbeit ausführlich zurückzukommen. Die elektrotechnischen Aufgaben, Nachbildungsschaltungen, Phasen- und Dämpfungsausgleichsschaltungen, Entzerrungsschaltungen zu entwerfen, führen z. B. auf Interpolationsprobleme 2.

[34]) Siehe l. c. [13]).

[35]) Das äquivalente elektrotechnische Problem lautet: Einfachste Zweipolschaltungen aus Kapazitäten und Ohmschen Widerständen zu finden, deren Wechselstromwiderstand für eine endliche Anzahl gegebener Frequenzen vorgeschriebene Werte annimmt.

Interpolationsstellen λ_α werden bei dieser Transformation auf die Halbgerade

$$\Re y = \Im y \text{ [36]}) > 0,$$

also jedenfalls in das Innere der rechten Halbebene transformiert.

Eine Modifizierung der Überlegungen von Pick ergibt nun

Satz 7. *Sind für die Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der positiv imaginären Achse die komplexen Werte $w_1, w_2, \ldots, w_n$ bzw. vorgeschrieben, so liefert das folgende Interpolationsverfahren nacheinander je zwei rationale Funktionen u_α, v_α der Klasse $\mathfrak{B}$ niedrigsten Grades, welche die Wertepaare (λ_i, w_i) für $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ annehmen, vorausgesetzt, daß die (λ_i, w_i) für Funktionen der Klasse $\mathfrak{B}$ zulässig sind. Notwendig und hinreichend für die Zulässigkeit ist sowohl, daß die im Verlauf des Interpolationsverfahrens ermittelten Konstanten a_α, b_α, als auch, daß die c_α, d_α nicht negativ ausfallen.*

Man bestimme die Konstanten $a_1, b_1;\ c_1, d_1$ eindeutig so, daß

$$u_1 = \frac{p_1(\lambda)}{\lambda q_1(\lambda)} = \frac{a_1 \lambda + b_1}{\lambda}$$

und

$$v_1 = \frac{r_1(\lambda)}{s_1(\lambda)} = \frac{1}{c_1 \lambda + d_1}$$

beide das Wertepaar (λ_1, w_1) annehmen.

Hat man

$$(40) \qquad \begin{aligned} u_\alpha &= \frac{p_\alpha(\lambda)}{\lambda q_\alpha(\lambda)}, \\ v_\alpha &= \frac{r_\alpha(\lambda)}{s_\alpha(\lambda)} \end{aligned}$$

so bestimmt, daß beide die Wertepaare $(\lambda_1, w_1), (\lambda_2, w_2), \ldots, (\lambda_\alpha, w_\alpha)$ annehmen, wobei p_α, s_α Polynome in λ vom α-ten Grade mit positiven Koeffizienten und q_α, r_α Polynome in λ vom $(\alpha - 1)$-ten Grade mit positiven Koeffizienten bedeuten, so findet man die entsprechenden $u_{\alpha+1}$, $v_{\alpha+1}$ durch die Ansätze

$$(41) \qquad \begin{aligned} u_{\alpha+1} &= \frac{(a_{\alpha+1}\lambda + b_{\alpha+1}) p_\alpha + \lambda r_\alpha}{\lambda[(a_{\alpha+1}\lambda + b_{\alpha+1}) q_\alpha + s_\alpha]}, \\ v_{\alpha+1} &= \frac{p_\alpha + (c_{\alpha+1}\lambda + d_{\alpha+1}) r_\alpha}{\lambda q_\alpha + (c_{\alpha+1}\lambda + d_{\alpha+1}) s_\alpha}, \end{aligned}$$

indem man $a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1};\ c_{\alpha+1}, d_{\alpha+1}$ eindeutig so bestimmt, daß $u_{\alpha+1}$ und $v_{\alpha+1}$ beide auch noch das Wertepaar $(\lambda_{\alpha+1}, w_{\alpha+1})$ annehmen.

Die in Satz 7 genannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zulässigkeit für Funktionen der Klasse $\mathfrak{B}$ lauten mit

$$\lambda_\alpha = i\,\omega_\alpha$$

---

[36]) $\Im y$ bedeutet Imaginärteil von y dividiert durch i.

und

$$w_\alpha = f_\alpha + i g_\alpha$$

in den einfachsten Fällen explizit folgendermaßen:

$$(42)\quad \alpha = 1. \qquad \begin{array}{l} f_1 \geqq 0,\ g_1 \leqq 0; \\ f_1 \geqq 0,\ g_1 \leqq 0, \end{array}$$

$$(43)\quad \alpha = 2. \qquad \begin{array}{r} g_1 g_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) - [(f_1 - f_2)^2 + g_1^2 + g_2^2]\, \omega_1 \omega_2 \geqq 0, \\ (f_1 f_2 - f_1^2 - g_1^2)\, \omega_1^2 + 2 g_1 g_2\, \omega_1 \omega_2 + (f_1 f_2 - f_2^2 - g_2^2)\, \omega_2^2 \geqq 0. \end{array}$$

Damit als stetige Kurve gegebener Realteil $\mathfrak{R}\, w = f(\omega)$ und Imaginärteil $\mathfrak{J} w = g(\omega)$ durch Funktionen der Klasse $\mathfrak{B}$ approximiert werden können, sind für den Kurvenverlauf nach (42) und (43) notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen

$$f \geqq 0,\ g \leqq 0$$

und (ohne die Bedingungen (43) zu erschöpfen) f *monoton fallend,* g *monoton wachsend.*

Durch Grenzübergang ergeben sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für f und g und die ersten Ableitungen f' und g' für *einen* vorgeschriebenen Punkt:

$$(44)\qquad \begin{array}{c} f \geqq 0,\ g \leqq 0, \\ (f'^2 + g'^2)\, \omega^2 - g^2 \leqq 0, \\ (f'^2 + g'^2)\, \omega^2 + (f^2 + g^2)'\, \omega + g^2 \leqq 0. \end{array}$$

Realteil und Imaginärteil sowohl von u_1 als auch von v_1 genügen den beiden Differentialgleichungen, die sich aus den beiden letzten Relationen (44) für den Fall des Gleichheitszeichens ergeben.

(Eingegangen am 20. 3. 1931.)