Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes.

Von

L. Pontrjagin und G. Tolstowa in Moskau *).

Der Mengersche Einbettungssatz lautet: Jeder n-dimensionale kompakte metrisierbare Raum ist einer Teilmenge des R^{2n+1} homöomorph.

Seinen Beweis für diesen Satz hat Menger für $n=1$ durchgeführt, für ein allgemeines n dagegen nur skizziert[1]). Selbst im Falle $n=1$ ist der Beweis sehr umständlich und bedarf mühevoller mengentheoretischer und elementargeometrischer Überlegungen, die den einfachen und — wie wir sehen werden — im Grunde genommen kombinatorischen Kern der Sache nur verschleiern.

Im folgenden soll ein einfacher und — bis auf einen dem Wesen der Sache nach notwendigen Grenzübergang — rein kombinatorischer Beweis des Einbettungssatzes gegeben werden. Es wird sich dabei zeigen, daß dieser Satz als eine unmittelbare Anwendung des Alexandroffschen allgemeinen Approximationsverfahrens (für kompakte Räume)[2]) zu betrachten ist und sich mit Hilfe dieses Verfahrens leicht auf die entsprechende Behauptung für n-dimensionale Komplexe zurückführen läßt. Letztere Behauptung aber (d. h. die Tatsache, daß man einen n-dimensionalen Komplex in den $2n+1$-dimensionalen Euklidischen Raum topologisch einbetten kann) folgt aus den Elementen der mehrdimensionalen analytischen Geometrie und ist längst bekannt.

*) Der Inhalt dieser Arbeit wurde im Winter 1929/30 im Topologischen Seminar von Prof. Alexandroff (Universität Moskau) vorgetragen.

Nach Fertigstellung der Arbeit erfuhren die Verfasser, daß inzwischen Herr Nöbeling in den Math. Annalen **104** (1930) einen Beweis des Einbettungssatzes gegeben hat. Da aber der Beweis von Herrn Nöbeling auf ganz anderen (nämlich vorwiegend mengentheoretischen) Methoden beruht, dürfte der vorliegende Beweis dennoch sein Interesse behalten.

[1]) Menger, Dimensionstheorie (Leipzig, Teubner, 1928), S. 287—303.

[2]) Alexandroff, Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen (Annals of Mathematics (2) **30** (1928), S. 101—187); insbesondere Einleitung, § 10 und Kap. II.

Als Zusatz zum Einbettungssatz ergibt sich bei unserer Beweismethode von selbst folgendes neue Resultat: *Jede stetige Abbildung eines n-dimensionalen kompakten metrischen Raumes in einen mindestens $2n+1$-dimensionalen Euklidischen Raum läßt sich durch eine beliebig kleine stetige Abänderung in eine Homöomorphie verwandeln.*

Es werden benutzt: aus der kombinatorischen Topologie — nur die Begriffe des Komplexes, der baryzentrischen Unterteilung und der simplizialen Abbildung; aus der Alexandroffschen Approximationstheorie — nur der Begriff des Projektionsspektrums sowie die Tatsache, daß ein n-dimensionaler kompakter Raum durch ein n-dimensionales Projektionsspektrum approximiert werden kann [3]).

Hilfssatz I. Es sei ein Projektionsspektrum

$$(1) \qquad K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots, \quad K_m = \pi(K_{m+1})$$

gegeben. Man nehme an, daß auf Grund irgendeiner Eigenschaft gewisse Simplexpaare (t_m, t'_m) aus K_m *ausgezeichnet* werden, und zwar soll die Eigenschaft, die die Auszeichnung bedingt, die einzige Forderung erfüllen, daß die Projektion der Simplexe eines ausgezeichneten Paares (t_m, t'_m) wieder ein ausgezeichnetes Paar bilden. Dann gilt die Behauptung: wenn es für beliebig große n ausgezeichnete Paare (t_n, t'_n) gibt, so gibt es zwei Projektionsfolgen

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$$
$$t'_1, t'_2, \ldots, t'_n, \ldots,$$

deren Elemente t_n, t'_n für jedes n ein ausgezeichnetes Paar bilden.

Beweis. Aus unseren Voraussetzungen folgt unmittelbar, daß es für jedes n in K_n ausgezeichnete Paare gibt, und zwar solche, in die sich ausgezeichnete Paare aus K_h ($h > n$, sonst beliebig) projizieren. Somit projizieren sich unendlichviele ausgezeichnete Paare in (ausgezeichnete) Paare von K_n; da es aber in K_n überhaupt nur endlichviele Simplexpaare gibt, muß mindestens ein (ausgezeichnetes) Simplexpaar (t_n, t'_n) in K_n existieren, welches als Projektion von unendlichvielen ausgezeichneten Paaren aufgefaßt werden kann. Man wähle ein solches Paar (t_1, t'_1) insbesondere für $n=1$.

Man nehme an, die ausgezeichneten Paare

$$(2) \qquad (t_1, t'_1), (t_2, t'_2), \ldots, (t_m, t'_m)$$

seien bereits konstruiert, und zwar so, daß für $1 \leqq i < m$

$$t_i = \pi(t_{i+1}), \qquad t'_i = \pi(t'_{i+1}).$$

[3]) Alexandroff a. a. O., S. 107 und S. 130—133.

und jedes der Paare (2) Projektion von unendlichvielen ausgezeichneten Paaren ist. Man betrachte nun alle ausgezeichneten Paare (t_n, t_n'), $n \geqq m+1$, die sich auf (t_m, t_m') projizieren und nenne sie für einen Augenblick P-Paare. Da es unendlichviele P-Paare, aber nur endlichviele Simplexpaare in K_{m+1} gibt, existiert in K_{m+1} mindestens ein (ausgezeichnetes) Paar (t_{m+1}, t_{m+1}'), in welches unendlichviele P-Paare (also unendlichviele ausgezeichnete Paare) projiziert werden. Die Induktion geht also weiter.

Auf diese Weise fortfahrend, erhält man die ausgezeichneten Paare

$$(t_1, t_1'), (t_2, t_2'), \ldots, (t_n, t_n'), \ldots,$$

wobei für jedes n das Simplexpaar (t_n, t_n') die Projektion von $(t_{n+1}; t_{n+1}')$ ist. Die Folgen $(t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots)$ und $(t_1', t_2', \ldots, t_n', \ldots)$ sind also Projektionsfolgen, w. z. b. w.

3. Man betrachte wieder das Projektionsspektrum (1) und ein festes Simplex t_h von K_h; ein Simplex t_n von K_n, $n > h$, heißt *Nachfolger* von t_h, wenn $\pi(t_n) = t_h$ ist. Sodann besteht folgender

Hilfssatz II. Das Projektionsspektrum (1) und ein Simplex t_1 von K_1 seien gegeben. Für alle hinreichend großen n und jedes Simplex t_n aus K_n, welches mit einem Nachfolger von t_1 benachbart ist, ist $\pi_1^n(t_n)$ im Stern[4] um t_1 enthalten.

Wir nehmen an, der Hilfssatz sei falsch, und nennen ein Simplexpaar (t_n, t_n'), $n > 1$, ausgezeichnet, wenn t_n und t_n' benachbart sind und $t_1 = \pi_1^n(t_n)$ ist, während $\pi_1^n(t_n')$ nicht zum Stern um t_1 gehört; ein Paar (t_1, t_1') soll ausgezeichnet heißen, wenn es Projektion eines ausgezeichneten Paares ist. Sodann sind alle Bedingungen des Hilfssatzes I erfüllt, und es gibt zwei Projektionsfolgen

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \tag{3}$$

und

$$t_1', t_2', \ldots, t_n', \ldots, \tag{3'}$$

so daß für jedes n die Simplexe t_n, t_n' ein ausgezeichnetes Paar bilden, und folglich t_1' nicht zum Stern um t_1 gehört. Da aber zwei Simplexe eines ausgezeichneten Paares benachbart sind, sind auch die Folgen (3) und (3′) benachbart, so daß es eine diese beiden Folgen umfassende Projektionsfolge

$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$$

[4]) Unter dem Stern des Komplexes K um das Simplex t dieses Komplexes verstehen wir hier die Vereinigungsmenge aller (abgeschlossenen) Simplexe von K, die t als ihre Seite haben. Wenn t dem Simplex T als eine seiner Seiten angehört und t' eine andere Seite von T ist, so heißt t' ein inneres oder ein Randelement des Sternes, je nachdem t eine Seite von t' ist oder nicht.

gibt[5]). Somit sind die beiden Simplexe t_1 und t_1' Seiten desselben Simplexes T_1, folglich gehört t_1' zu dem Stern um t_1, was unserer Annahme widerspricht. Der Hilfssatz II ist damit bewiesen.

4. Es sei T^n ein Simplex mit den Eckpunkten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (wir schreiben kurz $T^n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$[6]). Unter der *Elementarzerlegung* von T^n in bezug auf seine Seite $t^r = (a_0, a_1, \ldots, a_r)$ verstehen wir die Zerlegung von T^n in die $r+1$ Simplexe

$$\begin{array}{l}(b, \; a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n)\\ (a_0, b, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (a_0, a_1, \ldots, b, \; a_{r+1}, \ldots, a_n),\end{array}$$

wobei b der Schwerpunkt von t^r ist.

Dabei wird ausdrücklich auch das Simplex T^n selbst als seine einzige n-dimensionale („uneigentliche") Seite betrachtet.

Man nehme eine Elementarzerlegung von T^n in bezug auf sich selbst vor; es entstehen Simplexe von der Form $(b, a_0, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_n)$. Wenn man jedes dieser Simplexe in bezug auf seine a-Seite (d. h. die Seite $(a_0, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_n)$) elementar-zerlegt, entstehen Simplexe $(b, b_{i_1}, a_0, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_2-1}, a_{i_2+1}, \ldots, a_n)$. Wenn man jedes dieser Simplexe in bezug auf seine a-Seite zerlegt, entstehen Simplexe, deren erste drei Eckpunkte Schwerpunkte[7]) $b, b_{i_1}, b_{i_1 i_2}$ sind und deren übrige Eckpunkte zu den ursprünglichen Eckpunkten a_i gehören. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man schließlich zu den Simplexen von der Form $(b, b_{i_1}, b_{i_1 i_2}, \ldots, b_{i_1 i_2 \ldots i_n})$, d. h. den Simplexen der baryzentrischen Unterteilung von T^n.

5. Es sei jetzt K ein Komplex, t ein Simplex von K. Wenn man mit jedem Simplex von K, welches t als eigentliche oder uneigentliche Seite enthält, eine Elementarzerlegung in bezug auf t vornimmt und die übrigen Simplexe von K intakt läßt, entsteht eine *Elementarzerlegung von K* in bezug auf t; aus der Überlegung der vorigen Nummer ergibt sich sodann der eigentlich selbstverständliche

Hilfssatz III. Es seien

$$t_1, t_2, \ldots, t_s$$

sämtliche Simplexe aller Dimensionen des Komplexes K, in einer solchen

[5]) Alexandroff a. a. O., S. 107.

[6]) Orientierung des Simplexes kommt hier nicht in Frage, die Reihenfolge der Eckpunkte ist also gleichgültig.

[7]) Wenn t eine Seite von T ist, und $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ diejenigen Eckpunkte von T sind, die *nicht* zu t gehören, so bezeichnen wir den Schwerpunkt von t mit $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$.

Reihenfolge geschrieben, daß stets $\dim t_i \geqq \dim t_{i+1}$ ist; wenn man $K = K_0$ setzt und mit K_{i+1} den Komplex bezeichnet, welcher aus K_i durch Elementarzerlegung in bezug auf t_{i+1} entsteht, so ist K_s mit der baryzentrischen Unterteilung von K identisch.

6. Jetzt gehen wir zum Beweis des wichtigsten Hilfssatzes über.

Hilfssatz IV. Man betrachte ein Projektionsspektrum

$$(1) \qquad K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots, \qquad K_m = \pi(K_{m+1})$$

und ein Simplex t von K_1. Es sei K_1' der Komplex, der durch die Elementarzerlegung von K_1 in bezug auf t entsteht. Man bezeichne mit g eine (festzudenkende) simpliziale Abbildung von K_1' auf K_1, welche den Schwerpunkt b von t auf einen bestimmten (aber beliebigen) Eckpunkt a von t abbildet und alle übrigen Eckpunkte von K_1' (die ja zugleich Eckpunkte von K_1 sind) festläßt. Es existiert sodann ein K_m des Spektrums (1) und eine simpliziale Abbildung f von K_m auf K_1' von der Eigenschaft, daß die Abbildung gf von K_m auf K_1 mit der Projektion π_1^m identisch ist.

Beweis. Man wähle m so groß, daß für jedes Simplex t_m von K_m, welches mit einem Nachfolger von t benachbart ist, $\pi_1^m(t_m)$ zum Stern um t gehört. Nach Hilfssatz II ist ein solches m stets vorhanden. Es sei $a^{(m)}$ ein beliebiger Eckpunkt von K_m. Zwei Fälle sind möglich:

1. $\pi_1^m(a^{(m)}) \neq a$; dann setzen wir $f(a^{(m)}) = \pi_1^m(a^{(m)})$;

2. $\pi_1^m(a^{(m)}) = a$; dann unterscheiden wir die weiteren beiden Fälle:

 2'. $a^{(m)}$ gehört zu keinem Nachfolger von t; dann setzen wir

$$f(a^{(m)}) = a \quad (\text{also } f(a^{(m)}) = \pi_1^m(a^{(m)}));$$

 2''. $a^{(m)}$ gehört zu einem Nachfolger von t; dann sei

$$f(a^{(m)}) = b.$$

Für jeden Eckpunkt $a^{(m)}$ von K_m ist offenbar

$$gf(a^{(m)}) = \pi_1^m(a^{(m)}),$$

es bleibt also nur zu zeigen, daß die obige Eckpunktzuordnung tatsächlich eine simpliziale Abbildung von K_m auf K_1' bestimmt.

Jedes Simplex t_m von K_m gehört zu einer der drei folgenden Kategorien:

I. t_m enthält keinen Nachfolger des Eckpunktes a. In diesem Falle gehört $\pi_1^m(t_m)$ nicht nur zu K_1, sondern auch zu K_1', und es ist $f(t_m) = \pi_1^m(t_m)$.

II. t_m enthält mindestens einen Nachfolger des Eckpunktes a, aber keiner dieser Nachfolger gehört zu einem Nachfolger von t. In diesem Falle wird keine Seite von t_m auf t abgebildet, folglich gehört $\pi_1^m(t_m)$ nicht zu den Simplexen von K_1, die t als Seite enthalten, ist also unter den Simplexen von K_1' vorhanden; es ist sodann nach der Vorschrift 1. und 2'.:

$$f(t_m) = \pi_1^m(t_m).$$

III. t_m enthält einen Nachfolger von a, und zwar einen solchen, der zu einem Nachfolger von t gehört. Somit ist t_m mit einem Nachfolger von t benachbart, und laut unserer Voraussetzung über die Zahl m gehört $\pi_1^m(t_m)$ zum Stern um t. Unter den Eckpunkten von $\pi_1^m(t_m)$ ist ferner bestimmt der Eckpunkt a enthalten. Wir unterscheiden nun zwei weitere Fälle:

III'. t_m enthält keinen Nachfolger von t (d. h. $\pi_1^m(t_m)$ enthält t nicht). Dann gehört $\pi_1^m(t_m) = (a, a_1, \ldots, a_r)$ zum Rande des Sternes um t, folglich ist das Simplex $(b, a, a_1, \ldots, a_r)$ gewiß in K_1' enthalten. Nun sind aber die Bilder der Eckpunkte von t_m bei der Abbildung f unter den Punkten $b, a, a_1, \ldots, a_r$ enthalten, so daß $f(t_m)$ eine echte oder unechte Seite des Simplexes $(b, a, a_1, \ldots, a_r)$ und folglich ein Simplex von K_1' ist.

III''. t_m enthält einen Nachfolger von t (d. h. $\pi_1^m(t_m)$ enthält t). Dann wird jeder Eckpunkt von t_m, der ein Nachfolger von a ist, bei der Abbildung f auf b abgebildet; wenn $\pi_1^m(t_m) = (a, a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_r)$ und $t = (a, a_1, \ldots, a_s)$ ist, so ist $f(t_m) = (b, a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_r)$, und das ist ein Simplex von K_1'.

Die Eckpunkte von t_m werden also in allen Fällen mittels f auf das Eckpunktsystem eines Simplexes von K_1' abgebildet; f ist also tatsächlich eine simpliziale Abbildung, und der Hilfssatz IV ist bewiesen.

7. Wir beweisen nun den letzten Hilfssatz, aus dem dann der Einbettungssatz ganz leicht folgen wird.

Hilfssatz V. Zu jedem Projektionsspektrum

$$(1) \qquad K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots \qquad (K_m = \pi(K_{m+1}))$$

läßt sich ein äquivalentes (d. h. denselben Raum approximierendes) Projektionsspektrum

$$(4) \qquad Q_1, Q_1', Q_2, Q_2', \ldots, Q_h, Q_h', \ldots$$

unter folgenden Bedingungen konstruieren. Die Q_h bilden eine Teilfolge der K_m, $Q_h = K_{m_h}$, während für jedes h Q_h' ein Teilkomplex der baryzentrischen Unterteilung von Q_h ist. Die Projektionen werden als Abbildungen g_h von Q_h' auf Q_h bzw. Abbildungen f_h von Q_{h+1} auf Q_h' definiert, die folgenden Bedingungen genügen:

1. Wenn b ein Eckpunkt von Q_h', also der Schwerpunkt eines Simplexes t_h von Q_h ist, so ist $g_h(b)$ ein Eckpunkt von t_h. (Daraus folgt insbesondere, daß ein Eckpunkt von Q_h', der gleichzeitig Eckpunkt von Q_h ist, bei der Abbildung g_h in sich selbst übergeht.)

2. Wenn a_{h+1} ein beliebiger Eckpunkt von $Q_{h+1} = K_{m_{h+1}}$ ist, so gilt

$$g_h f_h(a_{h+1}) = \pi_{m_h}^{m_{h+1}}(a_{h+1}).$$

Beweis. Es sei $K_1^{(0)}, K_1^{(1)}, \ldots, K_1^{(s-1)}, K_1^{(s)}$, $K_1^{(0)} = K_1$, $K_1^{(s)} = K_1'$ die endliche Folge von sukzessiven Elementarzerlegungen, die sich dem Hilfssatz III gemäß zwischen $K_1 = Q_1$ und seiner baryzentrischen Unterteilung $K_1' = Q_1'$ einschalten läßt. Durch sukzessive Anwendung des Hilfssatzes IV erhält man ein Projektionsspektrum

$$Q_1, Q_1', K_{m_1}, K_{m_1+1}, \ldots,$$

welches auf Grund des Hilfssatzes IV den Bedingungen 1 und 2 des Hilfssatzes V für Q_1, Q_1' und $K_{m_1} = Q_2$ genügt und im übrigen mit (1) zusammenfällt. Man nehme an, das Projektionsspektrum

$$Q_1, Q_1', \ldots, Q_h, Q_h', K_{m_h}, K_{m_h+1}, \ldots$$

wäre bereits konstruiert, so daß für $Q_1, Q_1', \ldots, Q_h, Q_h'$, $K_{m_h} = Q_{h+1}$ die Bedingungen 1 und 2 erfüllt sind und die Projektionen für K_m $(m > m_h + 1)$ mit denen des Spektrums (1) identisch sind. Man schaltet zwischen $K_{m_h} = Q_{h+1}$ und seiner baryzentrischen Unterteilung Q_{h+1}' wiederum eine Kette von Elementarzerlegungen ein und erhält durch Anwendung des Hilfssatzes IV ein Spektrum

$$Q_1, Q_1', \ldots, Q_{h+1}, Q_{h+1}', K_{m_{h+1}}, K_{m_{h+1}+1}, \ldots,$$

wobei wieder alle Bedingungen erfüllt sind. Die durch Fortsetzen des Verfahrens entstehende unendliche Folge

$$Q_1, Q_1', \ldots, Q_h, Q_h', \ldots$$

mit den zugehörigen Abbildungen g_h und f_h genügt sodann den beiden Bedingungen 1 und 2. Aus der Bedingung 2 folgt, daß diese Folge ein dem Spektrum (1) äquivalentes Projektionsspektrum bildet, w. z. b. w.

8. Beweis des Einbettungssatzes. Es sei F ein n-dimensionaler kompakter metrisierbarer Raum und

$$K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots \qquad (K_m = \pi(K_{m+1}),\ \dim K_m = n) \tag{1}$$

ein Projektionsspektrum von F. Auf Grund des Hilfssatzes V besitzt F ein Projektionsspektrum

$$Q_1, Q_1', Q_2, Q_2', \ldots, Q_h, Q_h', \ldots, \tag{4}$$

welches den Bedingungen dieses Hilfssatzes genügt.

Man betrachte jetzt einen polyedralen Komplex C_1 des R^{2n+1}, welcher ein eineindeutiges simpliziales Bild von Q_1 ist; man darf dabei voraussetzen, daß die Simplexe von C_1 sämtlich einen Durchmesser < 1 haben. Die baryzentrische Unterteilung von C_1 bezeichnen wir mit C_1'; die Simplexe von C_1' sind kleiner als $\frac{n}{n+1} = q$.[8]) Indem man C_1 bzw. C_1' mit Q_1 bzw. Q_1' als identisch betrachtet, kann man von der Abbildung f_1 von Q_2 auf C_1' sowie von der Abbildung g_1 von C_1' auf C_1 sprechen.

Jedem Simplex T_1 von C_1 ordne man eine feste Umgebung $U(T_1)$ zu, deren Durchmesser kleiner als 1 ist. Diese Umgebungen sollen so gewählt sein, daß zwei disjunkte Simplexe Umgebungen bekommen, die voneinander einen positiven Abstand haben.

Das Bild $f_1(t_2)$ eines beliebigen Simplexes t_2 von Q_2 ist ein Simplex t_1' von C_1', also ein baryzentrisches Teilsimplex eines gewissen Simplexes T_1 von C_1. Das Simplex $g_1 f_1(t_2)$ ist dabei eine echte oder unechte Seite von T_1, und zwar ist diese Seite jedenfalls unecht (d. h. sie fällt mit T_1 zusammen), wenn die Dimensionszahlen von t_2 und πt_2 gleich sind.

Man ändere jetzt die Abbildung f_1 von Q_2 auf C_1' unter Wahrung ihres simplizialen Charakters durch eine kleine Verrückung der Bildpunkte der Eckpunkte von Q_2 zu einer *topologischen* Abbildung f_1' von Q_2 auf einen Komplex C_2 ab, und zwar sollen die Verrückungen der Bildeckpunkte so gering sein, daß das Bildsimplex $f_1'(t_2) = T_2$ in $U(T_1)$ liegt und noch immer kleiner als q ist. Der Projektionsabbildung $\pi = g_1 f_1$ von Q_2 auf Q_1 bzw. C_1 entspricht (vermöge der Homöomorphie f_1' zwischen Q_2 und C_2) eine Abbildung von C_2 auf C_1, die ebenfalls Projektion genannt und mit π bezeichnet werden soll.

Dabei gilt die Relation

$$T_2 \subset U(T_1), \tag{5_1}$$

und $\pi(T_2)$ ist eine echte oder unechte Seite von T_1, die notwendig mit T_1 zusammenfällt, wenn die Dimensionszahlen von T_2 und von $\pi(T_2)$ gleich sind.

Schließlich wählen wir eine $U(T_2) \subset U(T_1)$ so, daß dabei disjunkten Simplexen positiv-entfernte Umgebungen zugeordnet werden und daß der Durchmesser von $U(T_2)$ stets $< q$ ist.

Man nehme jetzt an, daß die Komplexe $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ durch eineindeutige simpliziale Abbildungen als Polyederkomplexe $C_1, C_2, \ldots, C_m$ in den R^{2n+1} bereits eingebettet sind; daß den Projektionen von Q_{i+1} auf Q_i $(1 \leqq i \leqq m-1)$ Projektionen von C_{i+1} auf C_i entsprechen und für jedes Simplex T_i von C_i $(1 \leqq i \leqq m)$ eine feste Umgebung $U(T_i)$ gewählt ist, die kleiner als q^{i-1} und so beschaffen ist, daß disjunkte Simplexe Umgebungen bekommen, die voneinander eine positive Entfernung haben.

---

[8]) Wenn der Durchmesser eines n-dimensionalen Simplexes α ist, so ist der Durchmesser eines Simplexes seiner baryzentrischen Unterteilung $\leqq \frac{n}{n+1}\alpha$.

Ferner soll $U(T_{i+1})$ in einer $U(T_i)$ liegen, wobei $T_i > \pi(T_{i+1})$ und insbesondere $T_i = \pi(T_{i+1})$ ist, wenn die Dimensionen von T_{i+1} und $\pi(T_{i+1})$ zusammenfallen.

Indem wir zwischen Q_m und C_m nicht unterscheiden, betrachten wir die Abbildung f_m von Q_{m+1} auf die baryzentrische Unterteilung C'_m von C_m. Da die Simplexe von C_m kleiner als q^{m-1} waren, sind diese von C'_m kleiner als q^m; wenn t_{m+1} ein beliebiges Simplex von Q_{m+1} ist, so ist $f_m(t_{m+1})$ ein baryzentrisches Teilsimplex eines bestimmten Simplexes T_m von C_m, zu dem auch $g_m f_m(t_{m+1}) = \pi(t_{m+1})$ als echte oder unechte Seite gehört; wenn dabei t_{m+1} die gleiche Dimensionszahl wie $\pi(t_{m+1})$ hat, ist $\pi(t_{m+1}) = T_m$. Man ändere jetzt die Abbildung f_m unter Wahrung ihres simplizialen Charakters durch eine kleine Verrückung der Bildpunkte der Eckpunkte von Q_{m+1} zu einer *topologischen* Abbildung f'_m von Q_{m+1} auf einen Komplex C_{m+1} ab; dabei sollen die Verrückungen der Bildeckpunkte so gering sein, daß $f'_m(t_{m+1}) = T_{m+1}$ in $U(T_m)$ liegt und noch immer kleiner als q^m ist. Die Projektion $\pi = g_m f_m$ von Q_{m+1} auf Q_m bzw. C_m geht in die Projektion von C_{m+1} auf C_m über, und, wenn man mit T_{m+1} ein willkürliches Simplex von C_{m+1} bezeichnet, gibt es in C_m ein solches T_m, daß

$$(5_m) \qquad T_{m+1} < U(T_m), \quad T_m > \pi(T_{m+1}),$$

wobei, wenn die Dimensionszahlen von T_{m+1} und $\pi(T_{m+1})$ gleich sind, die Simplexe T_m und $\pi(T_{m+1})$ zusammenfallen. Schließlich wählen wir für jedes T_{m+1} von C_{m+1} eine $U(T_{m+1}) < U(T_m)$; diese Umgebungen sollen $< q^m$ sein und die Eigenschaft haben, daß disjunkten Simplexen positiv entfernte Umgebungen entsprechen.

Die Induktion geht also weiter; wir merken uns noch, daß aus (5_m) die Ungleichung

$$(6) \qquad \varrho(T_{m+1}, \pi(T_{m+1})) < q^{m-1}$$

folgt.

9. Jedem Punkt x von F entspricht eine Kette des Projektionsspektrums

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, \ldots,$$

also eine Kette

$$(7) \qquad (T_1^x, T_2^x, \ldots, T_m^x, \ldots)$$

des Projektionsspektrums

$$(8) \qquad C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots.$$

Da die Dimensionszahlen der Simplexe von (7) mit wachsendem m jedenfalls nicht abnehmen können und andererseits immer höchstens gleich n bleiben, muß von einem bestimmten m_x an

$$\dim T_m^x = \dim T_{m+1}^x = \ldots$$

und folglich für alle $m \geqq m_x$

$$U(T_{m+1}^x) \subset U(T_m^x)$$

sein. Da $\delta U(T_m^x)$ kleiner als q^{m-1} ist, konvergieren die Simplexe T_m^x gegen den einzigen Durchschnittspunkt der $U(T_i^x)$, $i \geqq m_x$; diesen bezeichnen wir mit $\varphi(x)$. Dabei gilt nach (6) folgende Abschätzung

$$(9)\quad \varrho(\varphi(x), T_m^x) \leqq \sum_{i=m}^{\infty} [\varrho(T_i^x, T_{i+1}^x) + \delta(T_{i+1}^x)] < \sum_{i=m}^{\infty} (q^{i-1} + q^{i-1}) < 2\frac{q^{m-1}}{1-q}.$$

10. Wir beweisen jetzt der Reihe nach folgendes.

1. *Die Abbildung φ ist stetig.*

Man wähle in der Tat einen beliebigen Punkt x_0 von F und eine positive Zahl ε. Ihm entspricht eine Kette des Projektionsspektrums (8):

$$x_0 = (T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, \ldots, T_m^{(0)}, \ldots).$$

Wir wählen m so groß, daß $\dim T_m^{(0)} = \dim T_{m+1}^{(0)} = \ldots$ und

$$\frac{q^{m-1}}{1-q} < \varepsilon$$

ist. Es sei x ein beliebiger Punkt der m-ten Umgebung[9]) von x_0, d. h. es sei

$$x = (T_1^x, T_2^x, \ldots, T_m^x, \ldots),$$

wobei für $1 \leqq i \leqq m$ das Simplex T_i^x eine echte oder unechte Seite von $T_i^{(0)}$ ist. Dann ist zunächst

$$\varphi(x_0) \subset U(T_m^{(0)}), \qquad \delta(U(T_m^{(0)})) < q^{m-1} < \varepsilon,$$

also

$$(10)\qquad \varrho(\varphi(x_0), T_m^{(0)}) < \varepsilon.$$

Wegen (9) ist (unter Berücksichtigung der Relation $T_m^x \subset T_m^{(0)}$)

$$(11)\qquad \varrho(\varphi(x), T_m^{(0)}) \leqq \varrho(\varphi(x), T_m^x) < 2\frac{q^{m-1}}{1-q} < 2\varepsilon,$$

also nach (10) und (11)

$$\varrho(\varphi(x), \varphi(x_0)) \leqq \varrho(\varphi(x), T_m^{(0)}) + \delta(T_m^{(0)}) + \varrho(T_m^{(0)}, \varphi(x_0)) < 4\varepsilon,$$

womit die Stetigkeit von φ bewiesen ist.

Die Bildmenge Φ von F ist als stetiges Bild eines kompakten metrischen Raumes in sich kompakt; Φ ist also eine beschränkte abgeschlossene Menge des R^{2n+1}.

2. *Die Abbildung φ ist eineindeutig.* Denn sind x und x' zwei verschiedene Punkte von F, so sind die betreffenden Ketten nicht benachbart, d. h. von einem gewissen m an sind die Simplexe T_m^x und $T_m^{x'}$ zueinander

---

[9]) Alexandroff, a. a. O. S. 108.

fremd. Wir nehmen dieses m sogleich so groß, daß $\dim T_m^x = \dim T_{m+1}^x = \ldots$ und $\dim T_m^{x'} = \dim T_{m+1}^{x'} = \ldots$ ist. Da die zugehörigen Umgebungen $U(T_m^x)$ und $U(T_m^{x'})$ voneinander einen positiven Abstand haben und die Punkte x und x' in $U(T_m^x)$ bzw. $U(T_m^{x'})$ liegen, sind sie gewiß verschieden.

Eine eineindeutige und in einer Richtung stetige Abbildung eines kompakten Raumes ist bekanntlich eine Homöomorphie[10]. Somit sind F und Φ homöomorph, und der Einbettungssatz ist bewiesen.

Korollar. Für jeden kompakten metrischen Raum F der Dimension n kann man stets im $(2n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum eine Teilfolge $C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots$ von n-dimensionalen polyedralen Komplexen finden, deren topologischer Limes existiert und mit F homöomorph ist; dabei kann man die Folge $C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots$ so konstruieren, daß, wenn ein endlicher Abschnitt von ihr $(C_1, C_2, \ldots, C_m)$ schon konstruiert ist, der Komplex C_{m+1} in eine beliebig kleine Umgebung von C_m verlegt wird.

Diese Bemerkung folgt unmittelbar aus dem obigen Beweis des Satzes.

11. Zusatz. *Eine stetige Abbildung f eines n-dimensionalen kompakten metrischen Raumes F in einen Euklidischen Raum R von einer Dimension $\geqq 2n+1$ kann durch eine beliebig kleine stetige Abänderung in eine Homöomorphie verwandelt werden.*

Man betrachte wieder die Projektionsspektra (1) bzw. (4) von F. Jedes Q_m kann als Nerv einer ε_m-Überdeckung P_m von F, bestehend aus den Mengen

$$F_m^{(1)}, F_m^{(2)}, \ldots, F_m^{(s_m)},$$

aufgefaßt werden. Diesen Überdeckungen entsprechen Überdeckungen

$$f(F_m^{(1)}), f(F_m^{(2)}), \ldots, f(F_m^{(s_m)})$$

der Bildmenge $f(F)$, und man kann von vornherein die ε_m so klein wählen, daß schon die $f(F_1^{(i)})$ sämtlich kleiner als das beliebig vorgeschriebene $\alpha > 0$ sind. Den Eckpunkten von Q_m sind eineindeutig die Mengen $F_m^{(i)}$, folglich auch die Mengen $f(F_m^{(i)})$ zugeordnet. Man wähle nun die den Eckpunkten von Q_1 entsprechenden Eckpunkte c_1^i von C_1 (Nr. 8) so nahe zu den betreffenden Mengen $f(F_1^i)$, daß die Entfernung von c_1^i bis $f(F_1^i)$ kleiner als α und jedes Simplex T_1 von C_1 kleiner als 2α ist; auch die Umgebungen $U(T_1)$ wähle man kleiner als 2α. Sodann führe man die Konstruktion des Projektionsspektrums

$$C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots \tag{8}$$

wörtlich wie in Nr. 8 aus, mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt die Umgebungen $U(T_m)$ der Simplexe von C_m sinngemäß kleiner als $2\alpha q^{m-1}$

[10] Siehe z. B. Hausdorff, Mengenlehre (zweite Auflage), S. 196.

sein sollen, was zur Folge hat, daß auf der rechten Seite der Ungleichung (6), sowie im letzten Glied der Formel (9) der Faktor 2α hinzukommt.

12. Genau wie früher unterscheiden wir zwischen Q_m und C_m nicht mehr.

Das Projektionsspektrum (8) definiert nach Nr. 9 und 10 eine topologische Abbildung φ von F auf eine abgeschlossene beschränkte Menge Φ des Raumes R. Wir behaupten, *daß für jeden Punkt x von F die Entfernung zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ kleiner als $\frac{9\alpha}{1-q}$ ist*; mit dieser Behauptung ist auch der Zusatz bewiesen: um die stetige Überführung von f in φ zu erhalten, braucht man ja nur jeden Punkt $f(x)$ bis zum Punkte $\varphi(x)$ während derselben Zeiteinheit gleichförmig und geradlinig laufen zu lassen.

Unsere Behauptung beweist man aber so. Ist

$$x \equiv (T_1^x, T_2^x, \ldots, T_m^x, \ldots)$$

ein Punkt von F, c_1 ein Eckpunkt von T_1^x, F_1 die diesem Eckpunkt entsprechende Menge der Überdeckung P_1, so liegt x in F_1, $f(x)$ in $f(F_1)$. Unter Berücksichtigung der am Schluß der vorigen Nummer gemachten Bemerkung folgt aus (9)

$$\varrho(\varphi(x), T_1^x) < \frac{4\alpha}{1-q}, \quad \text{also} \quad \varrho(\varphi(x), c_1) < \frac{4\alpha}{1-q} + 2\alpha \quad .$$

und

$$\varrho(\varphi(x), f(x)) < \varrho(\varphi(x), c_1) + \varrho(c_1, f(F_1)) + \delta f(F_1)$$
$$< \left(\frac{4\alpha}{1-q} + 2\alpha\right) + \alpha + 2\alpha < \frac{9\alpha}{1-q},$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 5. 2. 1931.)