Einige Sätze über quadratfreie Zahlen.

Von

Theodor Estermann in London.

Eine Formel für die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von zwei quadratfreien Zahlen ist in einem Satze von Linfoot und Evelyn enthalten, für den ich einen sehr einfachen Beweis angegeben habe[1]).

Es handelt sich hier nun um die folgenden Sätze:

I. *Jede hinreichend große ganze Zahl läßt sich als Summe eines Quadrates und einer quadratfreien Zahl darstellen*[2]).

II. *Zu jeder positiven oder negativen ganzen Zahl l gibt es unendlich viele quadratfreie Zahlen von der Form z^2+l, wo z eine natürliche Zahl ist.*

Darüber hinaus werde ich asymptotische Formeln mit Fehlerabschätzungen beweisen, und zwar erstens für die Anzahl $G(n)$ der Darstellungen von n als Summe von einem Quadrat und einer quadratfreien Zahl, zweitens für die Anzahl $H(n)$ der quadratfreien Zahlen von der Form z^2+l, die $\leqq n$ sind.

Vorbemerkung. Die Zahlen unter den Summenzeichen bedeuten:

1. $x^2y+z^2=n$; 2. $x\leqq\sqrt[3]{n}$; 3. $y<\sqrt[3]{n}$; 4. $(x,n)=m$; 5. $m\,|\,n$;
6. $\mu(m)\neq 0,\ m^2\,|\,n$; 7. $s^2y+t^2=nm^{-2}$; 8. $s\leqq\sqrt[3]{n}\,m^{-1}$;
9. $(s,n)=1$; 10. $t<\sqrt{n}\,m^{-1}$; 11. $t^2\equiv nm^{-2}\pmod{s^2}$;
12. $u\leqq s^2,\ u^2\equiv nm^{-2}\pmod{s^2}$; 13. $t\equiv u\pmod{s^2}$; 14. $s>\sqrt[3]{n}\,m^{-1}$;
15. $x^2y\leqq n$; 16. $x^2y-z^2=l$; 17. $(x,l)=m$; 18. $\mu(m)\neq 0,\ m^2\,|\,l$;
19. $s^2y\leqq nm^{-2}$; 20. $s^2y-t^2=lm^{-2}$; 21. $(s,l)=1$;
22. $-lm^{-2}<t^2\leqq(n-l)\,m^{-2}$; 23. $t^2\equiv -lm^{-2}\pmod{s^2}$.

---

[1]) Journal London Math. Soc. **6** (1931), 37—40.

[2]) Unter einem Quadrat sei hier das Quadrat einer *positiven* ganzen Zahl verstanden, unter einer quadratfreien Zahl eine *positive* ganze Zahl, die durch kein Quadrat außer 1 teilbar ist. Im folgenden sollen auch alle Buchstaben, die als Summationsvariable auftreten, stets positive ganze Zahlen bedeuten.

$\mu(n)$ ist die Möbiussche Funktion, $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n.

1. Berechnung von $G(n)$. Es ist

$$\sum_{\substack{x,y \\ x^2 y = r}} \mu(x) = 1 \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem r quadratfrei ist oder nicht. Hieraus ergibt sich

$$G(n) = \sum_{\substack{x,y,z \\ 1}} \mu(x). \tag{1}$$

Ich setze

$$G_1 = \sum_{\substack{x,y,z \\ 1,2}} \mu(x). \tag{2}$$

Dann ist

$$|G(n) - G_1| \leqq \sum_{\substack{x,y,z \\ 1,3}} 1. \tag{3}$$

Nun ist $x^2 y + z^2$ die Norm[3]) der Zahl $x\sqrt{-y} + z$ im Körper $k(\sqrt{-y})$, und die Anzahl der Ideale dieses Körpers mit der Norm n ist $\leqq d(n)$. Die Anzahl der Hauptideale mit der Norm n ist also erst recht $\leqq d(n)$, und da ein imaginär-quadratischer Körper höchstens 6 Einheiten hat, so können höchstens $6\,d(n)$ ganze Zahlen des Körpers $k(\sqrt{-y})$ die Norm n haben. Die Gleichung $x^2 y + z^2 = n$ hat also bei gegebenem n und gegebenem y höchstens $6\,d(n)$ ganzzahlige Lösungen, und davon sind höchstens $\frac{3}{2}\,d(n)$ positiv. Nach (3) ist also

$$|G(n) - G_1| \leqq 2\,d(n) \sum_{\substack{y \\ 3}} 1 < 2\sqrt[3]{n}\,d(n). \tag{4}$$

Setze ich

$$G_2(m) = \sum_{\substack{x,y,z \\ 1,2,4}} \mu(x), \tag{5}$$

so ist nach (2)

$$G_1 = \sum_{\substack{m \\ 5}} G_2(m). \tag{6}$$

Nun kann $G_2(m)$ selbstverständlich nur dann von Null verschieden sein, wenn m quadratfrei ist. Aus 1 und 4 folgt aber $m \mid z^2$ und daher, falls m quadratfrei ist, $m \mid z$, und hieraus und aus 1 und 4 folgt $m^2 \mid n$. Statt (6) kann man also schreiben

$$G_1 = \sum_{\substack{m \\ 6}} G_2(m). \tag{7}$$

---

[3]) Im Anhang werde ich zeigen, daß man den Beweis auch ganz elementar (ohne Heranziehung der Theorie der algebraischen Zahlen) führen kann.

Aus (5) und 6 folgt, wenn $x = ms$, $z = mt$ gesetzt wird,

(8) $$G_2(m) = \mu(m) \sum_{\substack{s,\,y,\,t \\ 7,\,8,\,9}} \mu(s) = \mu(m) \sum_{\substack{s \\ 8,\,9}} \mu(s) \sum_{\substack{y,\,t \\ 7}} 1,$$

und es ist

(9) $$\sum_{\substack{y,\,t \\ 7}} 1 = \sum_{\substack{t \\ 10,\,11}} 1 = \sum_{\substack{u \\ 12}} \sum_{\substack{t \\ 10,\,13}} 1 = \sum_{\substack{u \\ 12}} \{\sqrt{n}\, m^{-1} s^{-2} + O(1)\}.$$

Es bezeichne $\nu(a, b)$ die Anzahl der mod b inkongruenten Lösungen der Kongruenz $u^2 \equiv a \pmod{b}$. Dann ist

(10) $$\nu(a, b^2) \leqq 2\, d(b) \qquad [(a, b) = 1],$$

und daher nach (9)

(11) $$\sum_{\substack{y,\,t \\ 7}} 1 = \sqrt{n}\, m^{-1} s^{-2} \nu(n, s^2) + O\{d(s)\}.$$

Nach (8) ist also

(12) $$G_2(m) = \mu(m) \sqrt{n}\, m^{-1} \sum_{\substack{s \\ 8,\,9}} \mu(s) s^{-2} \nu(n, s^2) + O\{\sum_{\substack{s \\ 8,\,9}} d(s)\}.$$

Setze ich

(13) $$G_3(n) = \sum_{\substack{s \\ 9}} \mu(s) s^{-2} \nu(n, s^2),$$

so ist nach (10)

$$|G_3(n) - \sum_{\substack{s \\ 8,\,9}} \mu(s) s^{-2} \nu(n, s^2)| < 2 \sum_{\substack{s \\ 14}} s^{-2} d(s) = O(n^{-\frac{1}{3}} m \log n).$$

Nach (12) ist also $G_2(m) = \sqrt{n}\, G_3(n) \mu(m) m^{-1} + O(n^{\frac{1}{3}} \log n)$, und daher ist nach (7)

(14) $$G_1 = \sqrt{n}\, G_3(n) \sum_{\substack{m \\ 6}} \mu(m) m^{-1} + O(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon})$$

für jedes positive ε.

Aus (13) folgt leicht

(15) $$G_3(n) = \prod_{p \nmid n} \{1 - p^{-2} \nu(n, p^2)\},$$

und es ist, falls $p \nmid n$,

(16) $$\nu(n, p^2) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{n}{p}\right) & (p > 2), \\ 1 + (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} & (p = 2), \end{cases}$$

wo $\left(\frac{n}{p}\right)$ das Legendresche Restsymbol ist.

Aus (4) und (14) folgt

(17) $$G(n) = G_3(n) \sqrt{n} \prod_{p^2 | n} (1 - p^{-1}) + O(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}).$$

Nach (15) und (16) ist $G_3(n)$ nicht kleiner als die feste positive Zahl $\prod\limits_p (1-2p^{-2})$, und zu jedem positiven ε gibt es ein n_0, so daß für $n > n_0$ die Ungleichung $\prod\limits_{p^2 \mid n}(1-p^{-1}) > n^{-\varepsilon}$ gilt. Nach (17) ist also

$$G(n) \sim G_3(n)\sqrt{n} \prod_{p^2 \mid n}(1-p^{-1}),$$

und hieraus folgt Satz I.

2. Berechnung von $H(n)$. Es ist

$$H(n) = \sum_{\substack{x,y,z \\ 15,16}} \mu(x). \tag{18}$$

Setze ich

$$H_1 = \sum_{\substack{x,y,z \\ 15,16,2}} \mu(x), \tag{19}$$

so ist

$$|H(n) - H_1| \leqq \sum_{\substack{x,y,z \\ 15,16,3}} 1 = \sum_{\substack{y \\ 3}} A(y), \tag{20}$$

wo $A(y)$ die Anzahl der Lösungen von 15 und 16 bei gegebenem y ist. Es sei y zunächst ein Quadrat, etwa $= u^2$, wo u eine natürliche Zahl ist. Dann ist 16 gleichbedeutend mit $(xu+z)(xu-z) = l$. Die Anzahl der Zahlenpaare x, z, die diese Gleichung befriedigen, ist aber $\leqq d(|l|)$, und daher ist erst recht $A(y) \leqq d(|l|)$.

Nun sei y kein Quadrat. Dann betrachte ich zu jeder Lösung von 15 und 16 die ganze algebraische Zahl[3]) $z + x\sqrt{y}$ des Körpers $k(\sqrt{y})$. Diese hat die Norm $-l$ und ist > 2 und $< 2\sqrt{n+|l|}$. Das Ideal $(z + x\sqrt{y})$ hat also die Norm $|l|$. Die Anzahl der Hauptideale mit dieser Norm ist $\leqq d(|l|)$. Da die Grundeinheit des Körpers $k(\sqrt{y})$ jedenfalls $> \frac{3}{2}$ ist, so ist die Anzahl der Zahlen des Körpers, die zwischen 2 und $2\sqrt{n+|l|}$ liegen und ein gegebenes Ideal erzeugen, $< \log\sqrt{n+|l|}/\log\frac{3}{2} + 1$. Also ist $A(y) = O(\log n)$ (gleichmäßig in y bei festem l).

Nach (20) ist also

$$H(n) - H_1 = O(n^{\frac{1}{3}} \log n). \tag{21}$$

Setze ich

$$H_2(m) = \sum_{\substack{x,y,z \\ 15,16,2,17}} \mu(x), \tag{22}$$

so folgt aus (19) (vgl. den Beweis von (7))

$$H_1 = \sum_{\substack{m \\ 18}} H_2(m). \tag{23}$$

Aus (22) und 18 folgt, wenn wieder $x = ms$, $z = mt$ gesetzt wird,

$$(24) \qquad H_2(m) = \mu(m) \sum_{\substack{s, y, t \\ 19, 20, 8, 21}} \mu(s) = \mu(m) \sum_{\substack{s \\ 8, 21}} \mu(s) \sum_{\substack{y, t \\ 19, 20}} 1,$$

und es ist (vgl. den Beweis von (11))

$$\sum_{\substack{y, t \\ 19, 20}} 1 = \sum_{\substack{t \\ 22, 23}} 1 = \sqrt{n}\, m^{-1} s^{-2} \nu(-l, s^2) + O\{d(s)\}.$$

Nach (24) ist also

$$(25) \qquad H_2(m) = \mu(m) \sqrt{n}\, m^{-1} \sum_{\substack{s \\ 8, 21}} \mu(s) s^{-2} \nu(-l, s^2) + O(n^{\frac{1}{3}} \log n).$$

Nach (13) und (10) ist

$$\left| G_3(-l) - \sum_{\substack{s \\ 8, 21}} \mu(s) s^{-2} \nu(-l, s^2) \right| < 2 \sum_{\substack{s \\ 14}} s^{-2} d(s) = O(n^{-\frac{1}{3}} \log n).$$

Nach (25) ist also $H_2(m) = G_3(-l) \sqrt{n}\, \mu(m) m^{-1} + O(n^{\frac{1}{3}} \log n)$, und daher ist nach (21) und (23)

$$(26) \qquad H(n) = G_3(-l) \sqrt{n} \prod_{p^2 | l} (1 - p^{-1}) + O(n^{\frac{1}{3}} \log n).$$

Nach (15) und (16) ist $G_3(-l) > 0$. Es ist also

$$H(n) \sim G_3(-l) \sqrt{n} \prod_{p^2 | l} (1 - p^{-1}),$$

und hieraus folgt Satz II.

Anhang.

1. Bei der Berechnung von $G(n)$ wurde die Theorie der algebraischen Zahlen nur zum Beweise der Formel

$$(27) \qquad \sum_{\substack{x, z \\ 1}} 1 \leqq 2\, d(n)$$

benutzt, mit deren Hilfe (4) aus (3) abgeleitet wurde. Im folgenden werde ich (27) auf ganz elementarem Wege beweisen.

Die Zahlen unter den Summenzeichen bedeuten:

24. $ax^2 + bz^2 = n$; 25. $(x, z) = m$; 26. $as^2 + bt^2 = r$;
27. $(s, t) = 1$; 28. $h \leqq r$; 29. $s \equiv ht \pmod{r}$;
30. $ah^2 + b \equiv 0 \pmod{r}$; 31. $dl = r$; 32. $\mu(d) \neq 0$;
33. $m^2 dl = n$; 34. $a_1 x^2 + b_1 z^2 = n_0$; 35. $\frac{a_1}{m} x^2 + b_1 m y^2 = \frac{n_0}{m}$.

Hilfssatz 1[4]). *Es sei für beliebige natürliche Zahlen n, a und b*

$$Q(n; a, b) = \sum_{\substack{x, z \\ 24}} 1. \tag{28}$$

Dann ist

$$Q(n; a, b) \leqq 2d(n). \tag{29}$$

Beweis. Es sei zunächst

$$(a, n) = (b, n) = 1. \tag{30}$$

Dann ist

$$Q(n; a, b) = \sum_{\substack{m \\ m^2 | n}} \sum_{\substack{x, z \\ 24, 25}} 1.$$

Setze ich also

$$Q_0(r; a, b) = \sum_{\substack{s, t \\ 26, 27}} 1, \tag{31}$$

so ist (wenn wieder $x = ms$, $z = mt$ gesetzt wird)

$$Q(n; a, b) = \sum_{\substack{m, r \\ m^2 r = n}} Q_0(r; a, b). \tag{32}$$

Aus (30) und $m^2 r = n$ folgt

$$(a, r) = (b, r) = 1. \tag{33}$$

Aus 26 und 27 folgt daher $(t, r) = 1$. Nach (31) ist also

$$Q_0(r; a, b) = \sum_{\substack{s, t \\ 26, 27}} \sum_{\substack{h \\ 28, 29}} 1 = \sum_{\substack{h, s, t \\ 26, 27, 28, 29, 30}} 1 = \sum_{\substack{h \\ 28, 30}} \sum_{\substack{s, t \\ 26, 27, 29}} 1. \tag{34}$$

Nun ist

$$\sum_{\substack{s, t \\ 26, 27, 29}} 1 \leqq 1. \tag{35}$$

Andernfalls gäbe es nämlich zwei verschiedene Paare natürlicher Zahlen s, t, die den Bedingungen 26, 27 und 29 genügen, d. h. vier natürliche Zahlen s_1, t_1, s_2, t_2, so daß

$$a s_1^2 + b t_1^2 = a s_2^2 + b t_2^2 = r, \qquad s_1 \equiv h t_1, \qquad s_2 \equiv h t_2 \pmod{r}, \tag{36}$$

aber *nicht*

$$s_1 = s_2, \qquad t_1 = t_2 \tag{37}$$

wäre. Aus (36) folgt nun

$$r^2 = (a s_1^2 + b t_1^2)(a s_2^2 + b t_2^2) = (a s_1 s_2 + b t_1 t_2)^2 + ab(s_1 t_2 - s_2 t_1)^2 \tag{38}$$

---

[4]) Zusatz bei der Korrektur. Einer inzwischen erschienenen Arbeit der Herren Linfoot und Evelyn (Journal für Math. **164**, S. 131–140) entnehme ich, daß Herr Rademacher diesen Hilfssatz schon früher aufgestellt hatte. Mein elementarer Beweis scheint indessen neu zu sein.

und (wegen 30)

(39) $$a s_1 s_2 + b t_1 t_2 \equiv (a h^2 + b) t_1 t_2 \equiv 0 \pmod r.$$

Wegen (38) wäre $0 < a s_1 s_2 + b t_1 t_2 \leqq r$, also nach (39) $a s_1 s_2 + b t_1 t_2 = r$ und daher $s_1 t_2 - s_2 t_1 = 0$, mithin $s_1 r = a s_1^2 s_2 + b s_1 t_1 t_2 = a s_1^2 s_2 + b s_2 t_1^2 = s_2 r$, also $s_1 = s_2$ und daher nach (36) auch $t_1 = t_2$. Die Annahme, daß (36), aber nicht (37) gelte, führt also zu einem Widerspruch, und hiermit ist (35) bewiesen.

Aus (33), (34) und (35) folgt nach einem bekannten Satze über die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Kongruenz $Q_0(r; a, b) \leqq \sum\limits_{\substack{h \\ 28, 30}} 1 \leqq 2 \sum\limits_{\substack{d, l \\ 31, 32}} 1$. Nach (32) ist also

(40) $$Q(n; a, b) \leqq 2 \sum_{\substack{m, d, l \\ 32, 33}} 1 = 2 \sum_{\substack{l \\ l \mid n}} \sum_{\substack{m, d \\ 32, 33}} 1 = 2 \sum_{\substack{l \\ l \mid n}} 1 = 2 d(n),$$

w. z. b. w.

Ich gehe jetzt zum allgemeinen Fall über. Angenommen, der Hilfssatz sei falsch, und es sei n_0 das kleinste n, für das er falsch ist. Dann gibt es Zahlen a_0 und b_0, so daß $Q(n_0; a_0, b_0) > 2 d(n_0)$ ist. Es sei $a_0 = a_1 a_2^2$ und $b_0 = b_1 b_2^2$, wo a_1 und b_1 quadratfrei sind. Dann ist, wie man leicht einsieht, $Q(n_0; a_1, b_1) \geqq Q(n_0; a_0, b_0)$, also

(41) $$Q(n_0; a_1, b_1) > 2 d(n_0), \quad \mu(a_1) \neq 0, \quad \mu(a_2) \neq 0.$$

Es ist ferner

(42) $$(n_0, a_1, b_1) = 1.$$

Wäre nämlich $(n_0, a_1, b_1) = m > 1$, so wäre offenbar

$$Q\left(\frac{n_0}{m}; \frac{a_1}{m}, \frac{b_1}{m}\right) = Q(n_0; a_1, b_1) > 2 d(n_0) > 2 d\left(\frac{n_0}{m}\right).$$

Der Satz wäre also auch für $n = \frac{n_0}{m}$ falsch, entgegen der Definition von n_0.

Nach dem ersten Teil des Beweises kann nicht $(a_1, n_0) = (b_1, n_0) = 1$ sein. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit

(43) $$(a_1, n_0) = m > 1$$

annehmen. Dann ist nach (41) und (42)

(44) $$\mu(m) \neq 0, \quad (m, b_1) = 1.$$

Aus (43), 34 und (44) folgt $m \mid z$. Es ist also (mit $z = m y$)

$$Q(n_0; a_1, b_1) = \sum_{\substack{x, z \\ 34,\, m \mid z}} 1 = \sum_{\substack{x, y \\ 35}} 1 = Q\left(\frac{n_0}{m}; \frac{a_1}{m}, b_1 m\right)$$

und daher nach (41)

$$Q\left(\frac{n_0}{m}; \frac{a_1}{m}, b_1 m\right) > 2 d(n_0) > 2 d\left(\frac{n_0}{m}\right),$$

was wiederum der Definition von n_0 widerspricht. Der Hilfssatz ist also richtig. Setzen wir in ihm $a=y$ und $b=1$, so erhalten wir die Formel (27).

2. Bei der Berechnung von $H(n)$ ist die Theorie der algebraischen Zahlen nur zum Beweise der Formel

$$A(y)=O(\log n) \tag{45}$$

herangezogen worden, übrigens nur für den Fall, daß y kein Quadrat ist. Im folgenden werde ich auch diese Formel mit ganz elementaren Mitteln beweisen.

Die Zahlen unter den Summenzeichen bedeuten:

$$36.\ ax^2-bz^2=l; \quad 37.\ ax^2 \leqq n; \quad 38.\ as^2-bt^2=r;$$
$$39.\ as^2 \leqq c; \quad 40.\ ah^2-b \equiv 0 \pmod r.$$

Es seien n, a und b natürliche Zahlen und l eine positive oder negative ganze Zahl. Dann setze ich

$$R(n,l;a,b)=\sum_{\substack{x,z\\36,37}} 1. \tag{46}$$

Hilfssatz 2. *Es sei l positiv und ab kein Quadrat. Dann ist*

$$R(n,l;a,b) \leqq 2d(l)(\log n+1).$$

Beweis. Es sei zunächst

$$(a,l)=(b,l)=1. \tag{47}$$

Dann ist

$$R(n,l;a,b)=\sum_{\substack{m,r\\m^2r=l}} \sum_{\substack{x,z\\36,37,25}} 1. \tag{48}$$

Setze ich also (für beliebiges $c>0$)

$$R_0(c,r;a,b)=\sum_{\substack{s,t\\38,39,27}} 1, \tag{49}$$

so ist

$$R(n,l;a,b)=\sum_{\substack{m,r\\m^2r=l}} R_0\left(\frac{n}{m^2},r;a,b\right). \tag{50}$$

Aus (47) und $m^2r=l$ folgt

$$(a,r)=(b,r)=1. \tag{51}$$

Aus 38 und 27 folgt daher $(t,r)=1$. Nach (49) ist also (unter den Voraussetzungen (47) und $m^2r=l$)

$$R_0(c,r;a,b)=\sum_{\substack{s,t\\38,39,27}} \sum_{\substack{h\\28,29}} 1=\sum_{\substack{s,t,h\\38,39,27,28,29,40}} 1 \leqq \sum_{\substack{h\\28,40}} \sum_{\substack{s,t\\38,39,29}} 1. \tag{52}$$

Ist nun die letzte Summe nicht leer, so gibt es zwei natürliche Zahlen s_0, t_0, für welche

$$(53)\qquad a s_0^2 - b t_0^2 = r, \qquad s_0 \equiv h t_0 \pmod r$$

gilt. Es sei u_0, v_0 die kleinste positive Lösung der Pellschen Gleichung

$$(54)\qquad u^2 - a b v^2 = 1,$$

und es sei

$$(55)\qquad \xi = u_0 + v_0 \sqrt{a b}.$$

Ist dann u, v irgendeine ganzzahlige Lösung von (54) und $u + v\sqrt{ab} > 0$, so ist bekanntlich $u + v\sqrt{ab}$ eine Potenz von ξ. Ist nun s, t irgendein Paar natürlicher Zahlen, das den Bedingungen 38 und 29 genügt, so ist nach (53)

$$(56)\qquad \frac{s\sqrt{a} + t\sqrt{b}}{s_0\sqrt{a} + t_0\sqrt{b}} = u + v\sqrt{ab},$$

wo

$$(57)\qquad u = \frac{1}{r}(a s s_0 - b t t_0), \qquad v = \frac{1}{r}(s_0 t - s t_0)$$

ist. Aus 40, 29 und (53) folgt, daß u und v ganz sind, und aus 38, (53) und der Identität

$$(a s s_0 - b t t_0)^2 - a b (s_0 t - s t_0)^2 = (a s^2 - b t^2)(a s_0^2 - b t_0^2)$$

folgt (54), so daß also $u + v\sqrt{ab}$ eine Potenz von ξ ist:

$$(58)\qquad u + v\sqrt{ab} = \xi^k.$$

Jedem Paar natürlicher Zahlen s, t, das 38 und 29 erfüllt, wird also durch (56) und (58) eine ganze Zahl k zugeordnet, und verschiedenen Zahlenpaaren s, t entsprechen wegen der Irrationalität von $\sqrt{a}/\sqrt{b}$ verschiedene Zahlen k. Wenn s überdies 39 erfüllt, so ist

$$\frac{2}{s_0\sqrt{a} + t_0\sqrt{b}} < \xi^k < \frac{2\sqrt{c}}{s_0\sqrt{a} + t_0\sqrt{b}},$$

und dieser Ungleichung genügen (falls $c \geqq 1$ ist) weniger als $\frac{\log\sqrt{c}}{\log\xi} + 1$ ganze Zahlen k. Da nach (55) $\xi > 2$ ist, so ist also $\sum\limits_{\substack{s,t\\ 38,39,29}} 1 < \log c + 1$ und daher nach (52)

$$(59)\qquad R_0(c, r; a, b) \leqq (\log c + 1) \sum_{\substack{h\\ 28,40}} 1 \qquad (c \geqq 1).$$

Hieraus und aus (51) und (50) schließt man wie beim Beweise von (40)

$$(60)\qquad R(n, l; a, b) \leqq 2 d(l)(\log n + 1).$$

Hiermit ist der Hilfssatz unter der speziellen Voraussetzung (47) bewiesen. Die Ausdehnung des Beweises auf den allgemeinen Fall kann im wesentlichen wie beim Hilfssatz 1 erfolgen.

Hilfssatz 3. *Es sei l negativ und ab kein Quadrat. Dann ist*

$$R(n, l; a, b) \leqq 2d(-l)[\log(n-l)+1].$$

Beweis. Nach (46) und Hilfssatz 2 ist offenbar

$$R(n, l; a, b) = R(n-l, -l; b, a) \leqq 2d(-l)[\log(n-l)+1], \text{ w. z. b. w.}$$

Nun ist

$$A(y) = \sum_{\substack{x, z \\ 15, 16}} 1 = R(n, l; y, 1),$$

und hieraus und aus den Hilfssätzen 2 und 3 folgt (45) (falls y kein Quadrat ist).

(Eingegangen am 16. 3. 1931.)