Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine.

Von

Giuseppe Scorza Dragoni in Neapel.

In questa Nota espongo (migliorandone la penetrazione e aumentandone la portata) alcuni risultati perseguiti di recente[1]) per le equazioni differenziali del secondo ordine nello studiarne in grande (cioè senza imporre limitazioni all'intervallo d'esistenza degli integrali) il classico problema dei valori ai limiti.

Alcuni dei criteri possono ritenersi come noti[2]). Però credo sempre di aver portato un certo contributo, oltre che per la semplicità dei mezzi con cui questi sono ritrovati, per la novità degli altri teoremi, per i casi singolari che vengono esaminati e perchè (cosa che non si richiede di rado nelle applicazioni) all'intervallo in cui si dimostra potersi definire un integrale vien lasciata la libertà di coincidere con una semiretta o con tutto l'asse delle ascisse.

§ 1.

1.° Le equazioni alle quali mi riferirò saranno della forma

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1}$$

e la f sarà continua nel suo insieme di definizione.

2.° Allora è noto che:

Se f è definita nello strato

$$S:\quad \bar{x}_0 \leqq x \leqq \bar{x}_1, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad -\infty < y' < +\infty,$$
$$(-\infty < \bar{x}_0,\ \bar{x}_1 < +\infty),$$

[1]) Vedi la mia Memoria in corso di stampa nel «Giornale di Battaglini» e intitolata come la Nota presente.

[2]) Birkhoff and Kellogg, *Invariant points in function space.* American M. S. Trans. 23 (1922), pp. 96–115. — R. Caccioppoli, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni funzionali.* Rendiconti dei Lincei (6) 11, maggio 1930.

e vi è limitata, esiste sempre un integrale della (1), $y(x)$, *che verifichi le condizioni*

$$(2) \qquad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

se x_0 *e* x_1, $(x_0 < x_1)$, *sono compresi fra* $\bar{x}_0$ *e* $\bar{x}_1$ *e* y_0 *e* y_1 *sono al finito*[3]).

3.° Gli altri criterii d'esistenza relativi alla medesima equazione si costruiscono facilmente sulle basi fornite da questo teorema.

Al sostrato delle ipotesi comuni aggiungeremo le seguenti:

α) f è definita e limitata nell'insieme

$$E:\ \bar{x}_0 \leqq x \leqq \bar{x}_1, \quad \bar{y}_0(x) \leqq y \leqq \bar{y}_1(x), \quad -\infty < y' < +\infty,$$
$$(-\infty < \bar{x}_0,\ \bar{x}_1 < +\infty),$$

dove $\bar{y}_0(x)$ e $\bar{y}_1(y)$ sono continue nel segmento $\bar{x}_0 \leqq x \leqq \bar{x}_1$ e, per semplicità, due volte derivabili nell'intervallo $\bar{x}_0 < x < \bar{x}_1$;

β) riesce

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{y}_0''(x) \geqq f(x, \bar{y}_0(x), y'), & \text{se} \quad \bar{x}_0 < x < \bar{x}_1, \quad y' \leqq \bar{y}_0'(x), \\ \bar{y}_1''(x) \leqq f(x, \bar{y}_1(x), y'), & \text{se} \quad \bar{x}_0 < x < \bar{x}_1, \quad y' \geqq \bar{y}_1'(x). \end{cases}$$

Allora:

Se per i numeri x_0, y_0, x_1, y_1 *è*

$$(4) \quad \bar{x}_0 \leqq x_0 < x_1 \leqq \bar{x}_1, \quad \bar{y}_0(x_0) \leqq y_0 \leqq \bar{y}_1(x_0), \quad \bar{y}_0(x_1) \leqq y_1 \leqq \bar{y}_1(x_1),$$

la conclusione del teorema precedente è sempre vera.

Per dimostrarla tale porremo

$$f_1 = f, \qquad \text{in} \quad E,$$
$$f_1(x, y, y') = f(x, \bar{y}_0(x), y'), \quad \text{se} \quad y < \bar{y}_0(x),$$
$$f_1(x, y, y') = f(x, \bar{y}_1(x), y'), \quad \text{se} \quad y > \bar{y}_1(x).$$

Con ciò esiste un integrale dell'equazione $y'' = f_1$, $y_1(x)$, che verifica le (2); faremo vedere che, se i numeri arbitrarii che compaiono nelle (2) sono soggetti alle (4), questa soluzione rappresenta una curva contenuta in E; e, poichè in E f ed f_1 coincidono, ne verrà il teorema.

E infatti $y_1(x)$ non può mai esser minore di $\bar{y}_0(x)$. Poichè se in x' si ha $y_1(x') < \bar{y}_0(x')$, detto x'' il punto a sinistra di x' e ad x' più prossimo in cui riesca $y_1(x) = \bar{y}_0(x)$, nell'intervallo $x'' < x < x'$ deve esistere un punto $\bar{\bar{x}}$ tale che sia

$$y_1(\bar{\bar{x}}) < \bar{y}_0(\bar{\bar{x}}), \quad y_1'(\bar{\bar{x}}) < \bar{y}_0'(\bar{\bar{x}}).$$

E quindi (giacchè $\bar{x}_0 \leqq x'' < \bar{\bar{x}} < x' \leqq \bar{x}_1$),

$$(5) \quad y_1''(\bar{\bar{x}}) = f_1(\bar{\bar{x}}, y_1(\bar{\bar{x}}), y_1'(\bar{\bar{x}})) = f(\bar{\bar{x}}, \bar{y}_0(\bar{\bar{x}}), y_1'(\bar{\bar{x}})) \leqq \bar{y}_0''(\bar{\bar{x}}).$$

---

[3]) Confronta le Note già citate di Birkhoff-Kellogg e di Caccioppoli.

A destra di $\bar{x}$ sarà, almeno in un intorno,

$$\bar{y}_0(x) - y_1(x) \geqq \bar{y}_0(\bar{x}) - y_1(\bar{x}) > 0, \quad \bar{y}_0'(x) - y_1'(x) \geqq \bar{y}_0'(\bar{x}) - y_1'(\bar{x}) > 0,$$

e sarà ancora $\bar{y}_0''(x) \geqq y_1''(x)$. E si comprende che in queste condizioni la $y_1(x)$ non potrebbe mai rimontare la $\bar{y}_0(x)$ in modo da aversi in x_1 $y_1(x_1) = y_1 \geqq \bar{y}_0(x_1)$. Dunque è $\bar{y}_0(x) \leqq y_1(x)$.

Allo stesso modo si riconosce che è $y_1(x) \leqq \bar{y}_1(x)$; e il teorema è dimostrato.

4.° Le (3) possono esser sostituite rispettivamente da

$$\bar{y}_0''(x) \geqq f(x, \bar{y}_0(x), y'), \quad \text{se} \quad \bar{x}_0 < x < \bar{x}_1, \quad y' \geqq \bar{y}_0'(x),$$

$$\bar{y}_1''(x) \leqq f(x, \bar{y}_1(x), y'), \quad \text{se} \quad \bar{x}_0 < x < \bar{x}_1, \quad y' \leqq \bar{y}_1'(x).$$

In questo caso le diseguaglianze a cui si mirava nel numero precedente vanno ottenute procedendo da x_1 verso sinistra.

Per esempio sia $\bar{y}_0''(x) \geqq f(x, \bar{y}_0(x), y')$ se $y' \geqq \bar{y}_0'(x)$ e x varia nell'intervallo $\bar{x}_0 < x < \bar{x}_1$ ed ammettiamo che in un x' di $x_0 \leqq x \leqq x_1$ possa aversi

$$y_1(x') < \bar{y}_0(x').$$

Se x'' è il primo punto a destra di x' in cui riesce $y_1(x) = \bar{y}_0(x)$, nell'intervallo $x' < x < x''$ esiste un $\bar{x}$ tale da aversi

$$\bar{y}_0(\bar{x}) > y_1(\bar{x}), \qquad \bar{y}_0'(\bar{x}) < y_1'(\bar{x})$$

e quindi

$$y_1''(\bar{x}) = f_1(\bar{x}, y_1(\bar{x}), y_1'(\bar{x})) = f(\bar{x}, \bar{y}_0(\bar{x}), y_1'(\bar{x})) \leqq \bar{y}_0''(\bar{x}),$$

e a sinistra di $\bar{x}$ sarà ancora

$$\bar{y}_0'(x) - y_1'(x) \leqq \bar{y}_0'(\bar{x}) - y_1'(\bar{x}) < 0, \quad \bar{y}_0(x) - y_1(x) \geqq \bar{y}_0(\bar{x}) - y_1(\bar{x}) > 0, \ldots.$$

5.° Si può vedere di ampliare la portata dei teoremi precedenti eliminando, p. e., l'ipotesi che la f sia continua in tutto S o E; ma presenti invece delle discontinuità o manchi addirittura di definizione nei punti dei piani $x = \bar{x}_0$, $x = \bar{x}_1$, pur mantenendosi limitata o minore in valore assoluto di una funzione della sola x sommabile in $\bar{x}_0 < x < \bar{x}_1$.

Così nella mia Memoria citata è dimostrato con tutto rigore che:

Se $\varphi(x, y, y')$ è definita nell'insieme

$$S': \quad \bar{x}_0 < x < \bar{x}_1, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty,$$

vi è continua e si ha

$$|\varphi(x, y, y')| \leqq g(x), \qquad (\bar{x}_0 < x < \bar{x}_1),$$

dove $g(x)$ è non negativa e sommabile in $\bar{x}_0 < x < \bar{x}_1$, e se i rapporti incrementali di φ rispetto a y e y' sono limitati in ogni porzione chiusa e limitata di S', esiste sempre un integrale, $y(x)$, della $y'' = \varphi$ che ri-

sulti definito in $x_0 < x < x_1$ *e verifichi le condizioni*

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y_0, \qquad \lim_{x \to x_1} y(x) = y_1, \tag{6}$$

se è $\bar{x}_0 \leqq x_0 < x_1 \leqq \bar{x}_1$ *e* y_0 *e* y_1 *sono due numeri reali arbitrarii.*

Di qui si trae facilmente un teorema analogo a quello del n.° 3, supponendo la φ definita in

$$E': \quad \bar{x}_0 < x < \bar{x}_1, \qquad \bar{y}_0(x) \leqq y \leqq \bar{y}_1(x), \qquad -\infty < y' < +\infty.$$

Inoltre non deve esser difficile liberare questi criterii da ogni residuo di ipotesi sui rapporti incrementali della φ, per esempio ricorrendo ai metodi di Caccioppoli e Birkhoff. Del resto nella mia Memoria è già dimostrato senza far nessun uso di ipotesi del genere il seguente criterio di unicità:

Se $\varphi(x, y, y')$ *non decresce rispetto a* y *ed è monotona rispetto a* y', *tutti gli integrali della* $y'' = \varphi$ *che verifichino le* (6) *coincidono nell'intervallo* $x_0 < x < x_1$.

§ 2.

6.° Per l'equazione differenziale lineare del secondo ordine[4]) è ormai classico il risultato:

Se $\bar{y}_0(x)$ *e* $\bar{y}_1(x)$ *sono due suoi integrali, e* $\bar{x}_0$ *e* $\bar{x}_1$ *due zeri consecutivi della differenza* $\bar{y}_0(x) - \bar{y}_1(x)$[5]), *per due punti* (x_0, y_0), (x_1, y_1), $x_0 < x_1$, *dell'insieme*

$$\bar{x}_0 \leqq x \leqq \bar{x}_1, \qquad \bar{y}_0(x) \leqq y \leqq \bar{y}_1(x)$$

passa sempre un'altra sua soluzione.

Questo teorema presenta affinità notevoli col criterio enunciato nei n^i. 3 e 4, quando il coefficiente di y' o non è mai negativo o non è mai positivo; ma non rientra affatto in esso.

Quindi bisogna procedere per altre vie se si vuol dissipare lo strano isolamento in cui questo teorema è rimasto finora.

Ora le ragioni essenziali per cui esso vale sono che gli integrali dell'equazione lineare vengono determinati in modo unico dai valori iniziali, ne dipendono con continuità e si mantengono limitati; e che, per quanto x_1 sia prossimo a x_0, esistono due integrali $y_0(x)$ e $y_1(x)$, tali, che sia $y_0(x_0) = y_1(x_0) = y_0$ e $y_0(x') = \bar{y}_0(x')$, $y_1(x'') = \bar{y}_1(x'')$, con x' e x'' contenuti nell'intervallo aperto $x_0 < x < x_1$.

---

[4]) L'equazione $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$; $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ sono supposte continue.

[5]) Supporremo che fra $\bar{x}_0$ e $\bar{x}_1$ sia sempre $\bar{y}_0(x) < \bar{y}_1(x)$.

Così, p. e.,

Se la funzione $f(x, y, y')$ è assegnata nel cilindro

$$C: \quad \bar{x}_0 \leqq x \leqq \bar{x}_1, \quad \bar{y}_0(x) \leqq y \leqq \bar{y}_1(x), \quad -\infty < y' < +\infty,$$

vi è continua e limitata, vi soddisfa alla condizione di Lipschitz rispetto a y e y', e l'equazione

$$y'' = f \tag{7}$$

ha $\bar{y}_0(x)$ e $\bar{y}_1(x)$ come integrali in tutto $\bar{x}_0 \leqq x \leqq \bar{x}_1$ [6]) *essa ammette sempre una soluzione, $y(x)$, per la quale sia*

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

se $x_0 < x_1$ e se (x_0, y_0), (x_1, y_1) appartengono alla base — diciamola B — di C.

7.° Supponiamo (x_0, y_0), (x_1, y_1) entrambi interni a questa base.

Allora è evidente che da (x_0, y_0) esce una semiretta r di equazione $y = r(x)$ che incontra la curva $\bar{c}_0$, diagramma di $\bar{y}_0(x)$, in un punto di ascissa $\bar{x} < x_1$ e non incontra la curva $\bar{c}_1$ di equazione $y = \bar{y}_1(x)$ prima di aver incontrato la $\bar{c}_0$ (analiticamente ciò vuol dire che in $\bar{x}$ è $r(\bar{x}) = \bar{y}_0(\bar{x})$ e che in $x_0 \leqq x \leqq \bar{x}$ è $r(x) < \bar{y}_1(x)$).

E se $y(x)$ è un integrale della $y'' = f$ per cui sia $y(x_0) = y_0$ con

$$y'(x_0) < r'(x_0) - m(\bar{x}_1 - x_0) \text{ [7]},$$

è sempre a destra di x_0

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t), y'(t))\,dt \\ &< r'(x_0) - m(\bar{x}_1 - x_0) + m(x - x_0) < r'(x_0), \\ y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt \\ &< r(x_0) + \int_{x_0}^{x} r'(t)\,dt = r(x); \end{aligned} \tag{8}$$

quindi fra le due verticali $x = x_0$, $x = \bar{x}$ la curva c di equazione $y = y(x)$ non potrà mai incontrare la $\bar{c}_1$, e poichè la curva

$$y = y(x), \quad y' = y'(x)$$

si può prolungare fino all'incontro della frontiera di C [8]), $y(x)$ si potrà de-

---

[6]) In conseguenza delle ipotesi fatte, nell'insieme $\bar{x}_0 < x < \bar{x}_1$ deve essere $\bar{y}_0(x) < \bar{y}_1(x)$.

[7]) m è l'estremo superiore di $|f(x, y, y')|$ in C.

[8]) Questo teorema nelle ipotesi più generali è stato enunciato da Kamke in una Memoria comparsa nel volume del 1929 degli Acta Mathematica 52, pp. 327—339.

Nel caso nostro, poichè la derivata $y'(x)$ di un integrale $y(x)$ della (7) è sempre finita, la frontiera di C sarà raggiunta dalla curva $y = y(x)$, $y' = y'(x)$ solo quando è $x = \bar{x}_0$, $x = \bar{x}_1$, oppure quando in un x' riesce $y(x') = \bar{y}_0(x')$, o $y(x') = \bar{y}_1(x')$.

In quest'ultimo caso la c incontrerà $\bar{c}_0$ o $\bar{c}_1$ in un punto della verticale $x = x'$.

finire finchè la c non abbia raggiunto la $\bar{c}_0$, come dovrà accadere di necessità, per la (8) e la $r(\bar{x}) = \bar{y}_0(\bar{x})$, a sinistra della verticale $x = \bar{x}$, e, quindi, a sinistra della retta $x = x_1$.

Allo stesso modo si vedrebbe che da un certo valore in su del coefficiente angolare della tangente nel punto (x_0, y_0) tutte le curve del tipo $y = y(x)$, dove $y(x)$ è un integrale della (7) con $y(x_0) = y_0$, incontrano la $\bar{c}_1$ a sinistra della verticale $x = x_1$.

8.° *Evidentemente una curva integrale, uscente dal punto* (x_0, y_0) *interno a* B, *che incontri la* $\bar{c}_0$ *a destra della* $x = x_0$, *a destra della* $x = x_0$ *non potrà incontrare la* $\bar{c}_1$; *e viceversa.*

Infatti se una curva integrale c di equazione $y = y(x)$ della (7) che esce dal punto (x_0, y_0), interno a B, incontra per la prima volta la $\bar{c}_0$ in un punto di ascissa $\bar{x}$, sarà

$$y'(\bar{x}) < \bar{y}_0'(\bar{x}) \text{ [9]};$$

se invece incontra la $\bar{c}_1$ sarà

$$y'(\bar{x}) > \bar{y}_1'(\bar{x}).$$

In ogni caso $y(x)$ non si può definire a destra di $\bar{x}$; e di qui segue il teorema e si trae anche che

Ogni curva integrale della (7) *che unisca i due punti* (x_0, y_0), (x_1, y_1) *interni a* B *è interna a* B *finchè* x *varia nel segmento* $x_0 \leqq x \leqq x_1$;

e che

Se in $\bar{x}$, $(x_0 < \bar{x} < x_1)$, *è* $y(\bar{x}) < \bar{y}_1(\bar{x})$, *si ha* $y(x) < \bar{y}_1(x)$ *in tutto* $x_0 \leqq x \leqq \bar{x}$; *un teorema analogo sussistendo nel caso che sia* $y(\bar{x}) > \bar{y}_0(\bar{x})$.

9.° Consideriamo delle curve integrali della (7) uscenti da (x_0, y_0) quelle tali, che, presane una, essa e tutte quelle che hanno in (x_0, y_0) una tangente di coefficiente angolare minore o incontrano la $\bar{c}_0$ fra le due verticali $x = x_0$, $x = x_1$, o, potendosi definire per $x = x_1$, in x_1 hanno un valor minore di y_1.

Indichiamo con $\{c\}'$ quest'insieme di curve; con I' l'insieme dei coefficienti angolari in x_0 corrispondenti; con $\{c\}''$ e I'' gli insiemi delle rimanenti curve integrali uscenti da (x_0, y_0) e dei relativi coefficienti angolari iniziali.

Dall'analisi fatta nel n.° 7 segue che:

I' *non è vuoto, ed è limitato superiormente.*

---

[9]) Infatti è evidente che in $\bar{x}$ non può essere $\bar{y}_0'(\bar{x}) > y'(\bar{x})$, perchè a sinistra di $\bar{x}$ è $\bar{y}_0(x) < y(x)$. E non può nemmeno essere $\bar{y}_0'(\bar{x}) = y'(\bar{x})$, perchè altrimenti per il teorema d'unicità si avrebbe $y(x) \equiv \bar{y}_0(x)$, mentre è $y(x_0) = y_0 > \bar{y}_0(x_0)$; quindi....

Sia y_0' l'estremo superiore di I'. Io affermo che:

Se $y_0(x)$ *è l'integrale della* (7) *definito dalle condizioni*

$$y_0(x_0) = y_0, \quad y_0'(x_0) = y_0',$$

$y_0(x)$ *si può definire in tutto il segmento* $x_0 \leqq x \leqq x_1$ *e in* x_1 *vale* y_1:

$$y(x_1) = y_1.$$

10.° Mostriamo che la curva c_0 di equazione $y = y_0(x)$ non può incontrare nè $\bar{c}_0$ nè $\bar{c}_1$ finchè x si mantiene $< x_1$ e $\geqq x_0$.

Poniamo che per un $\bar{x} < x_1$ sia $y_0(\bar{x}) = \bar{y}_0(\bar{x})$ e quindi

$$h = y_0'(\bar{x}) - \bar{y}_0'(\bar{x}) < 0. \tag{9}$$

Allora in tutto $x_0 \leqq x \leqq \bar{x}$ riesce (n°. 8)

$$\bar{y}_1(x) - y_0(x) > 0,$$

e, siccome $\bar{y}_1(x)$ e $y_0(x)$ sono continue, sarà di più

$$\bar{y}_1(x) - y_0(x) \geqq \eta > 0, \qquad (\eta = \text{cost.});$$

dato poi che le soluzioni della (7) dipendono con continuità dai valori iniziali, possiamo fare in modo che sia

$$\bar{y}_1(x) - y(x) \geqq \frac{\eta}{2} \tag{10}$$

in tutti i punti di $x_0 \leqq x \leqq \bar{x}$ in cui si può definire l'integrale $y(x)$ della (7) col semplice mantenere $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0)$ poco distante da $y_0'(x_0)$, poniamo meno di un numero positivo δ.

Inoltre con lo scegliere opportunamente δ potremo fare in modo che in tutti gli stessi punti sia

$$|y(x) - y_0(x)| \leqq \varepsilon, \quad |y'(x) - y_0'(x)| \leqq \varepsilon,$$

dove ε è un numero positivo prefissato a piacere[10]).

Ciò posto, le curve integrali che consideriamo, o incontrano la $\bar{c}_0$ in un punto di ascissa $\leqq \bar{x}$; o altrimenti, poichè per un $x \leqq \bar{x}$ non possono incontrare nemmeno la $\bar{c}_1$, — per la (10) —, si potranno definire in tutto il segmento $x_0 \leqq x \leqq \bar{x}$.

Per queste ultime, collo scegliere δ in modo opportuno possiamo far sì che la differenza $y'(\bar{x}) - \bar{y}_0'(\bar{x})$ sia prossima quanto vogliamo al numero negativo h; e la differenza $y(\bar{x}) - \bar{y}_0(\bar{x}) = y(\bar{x}) - y_0(\bar{x})$ piccola quanto ci pare.

---

[10]) Su questo modo di enunciare il teorema della dipendenza continua dai valori iniziali, cfr. la mia Memoria: *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità....* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1930.

Inoltre sarà, a destra di $\bar{x}$,

$$11)\quad y(x)-\bar{y}_0(x)=y(\bar{x})-\bar{y}_0(\bar{x})+\int_{\bar{x}}^{x}[y'(t)-\bar{y}_0'(t)]\,dt$$

$$=y(\bar{x})-\bar{y}_0(\bar{x})+\int_{\bar{x}}^{x}\{y'(\bar{x})-\bar{y}_0'(\bar{x})+\int_{\bar{x}}^{t}[y''(u)-\bar{y}_0''(u)]\,d$$

$$\leqq y(\bar{x})-\bar{y}_0(\bar{x})+\int_{\bar{x}}^{x}\{y'(\bar{x})-\bar{y}_0'(\bar{x})+2m(t-\bar{x})\}\,dt$$

$$=y(\bar{x})-\bar{y}_0(\bar{x})+[y'(\bar{x})-\bar{y}_0'(\bar{x})](x-\bar{x})+m(x-\bar{x})^2.$$

Noi possiamo supporre che sia $\frac{3h}{2}\leqq y'(\bar{x})-\bar{y}_0'(\bar{x})\leqq\frac{h}{2}<0$; ciò posto determiniamo un $\bar{x}'<x_1$ e $>\bar{x}$ per cui si abbia

$$m(\bar{x}'-\bar{x})^2<|h|\frac{\bar{x}'-\bar{x}}{4}$$

e supponiamo ancora, come è lecito, che $y(\bar{x})-\bar{y}_0(\bar{x})$ sia tanto piccolo da risultare minore di $|h|\frac{\bar{x}'-\bar{x}}{4}$.

Inoltre se $\bar{x}'$ è abbastanza prossimo a $\bar{x}$ noi possiamo supporre che in tutto $\bar{x}\leqq x\leqq\bar{x}'$ sia

$$\bar{y}_1(x)-\bar{y}_0(x)\geqq\frac{1}{2}[\bar{y}_1(\bar{x})-\bar{y}_0(\bar{x})]>0 \text{ [11]},$$

e

$$y(x)-\bar{y}_0(x)\leqq y(\bar{x})-\bar{y}_0(\bar{x})+|y'(\bar{x})-\bar{y}_0'(\bar{x})|(\bar{x}'-\bar{x})+m(\bar{x}'-\bar{x})^2$$

$$\leqq |h|\frac{\bar{x}'-\bar{x}}{4}+|2h|(\bar{x}'-\bar{x})+|h|\frac{\bar{x}'-\bar{x}}{4}<\frac{1}{2}[\bar{y}_1(\bar{x})-\bar{y}_0(\bar{x})];$$

e quindi

$$y(x)<\bar{y}_1(x), \qquad (\bar{x}<x<\bar{x}'),$$

di guisa che le curve c di equazione $y=y(x)$ non possono incontrare la $\bar{c}_1$ in un punto che abbia l'ascissa contenuta nel segmento $\bar{x}\leqq x\leqq\bar{x}'$.

Allora tutte queste curve si potranno prolungare a destra di $\bar{x}$ finchè non abbiano incontrato la $\bar{c}_0$ [12]) come deve accadere di necessità a sinistra della verticale $x=\bar{x}'$, poichè per $x=\bar{x}'$ l'ultimo membro della (11) è negativo, in virtù di quanto abbiam supposto.

In definitiva delle curve considerate, (che son tutte quelle che hanno in x_0 una tangente di coefficiente angolare superiore a y_0' e a y_0' abbastanza prossimo), quelle che non incontrano la $\bar{c}_0$ a sinistra di $x=\bar{x}$ o sulla $x=\bar{x}$,

---

[11]) Si rammenti che nell'intervallo $\bar{x}_0<x<\bar{x}_1$ è sempre $\bar{y}_1(x)>\bar{y}_0(x)$; cfr. la nota [6]).

[12]) Cfr. il n.° 7 e la nota [8]).

l'incontrano a sinistra della $x = \bar{x}'$ cioè della $x = x_1$; ma allora y_0' non è l'estremo superiore di I'.

Allo stesso modo si vede che c_0 non può incontrare $\bar{c}_1$ in un punto di ascissa minore di x_1.

Quindi $y_0(x)$ si può definire in tutto $x_0 \leqq x < x_1$ e posto

$$y_0(x_1) = \lim_{x \to x_1} y_0(x)$$

si riconosce facilmente che la (7) è valida anche per $x = x_1$; cioè $y_0(x)$ si può definire anche per $x = x_1$ [13]).

11.° *Dico che in* x_1 *non può essere* $y_0(x_1) < y_1$.

Perchè altrimenti in $x_0 \leqq x \leqq x_1$ è, — n.° 8 —, $y(x) < \bar{y}_1(x)$ e quindi anche [14])

$$y(x) < \bar{y}_1(x) - \eta,$$

con η positivo e piccolo; e le soluzioni della (7), $y(x)$, che hanno in x_0 una derivata $> y_0'$ e abbastanza prossima a y_0' si debbono mantenere minori di $\bar{y}_1(x) - \frac{\eta}{2}$; quindi, o si ha $y(x) = \bar{y}_0(x)$ in qualche punto di $x_0 \leqq x \leqq x_1$, oppure le $y(x)$ si possono definire in tutto $x_0 \leqq x \leqq x_1$ e, data la dipendenza continua dai valori iniziali, se $y'(x_0) - y_0'$ è sufficientemente piccolo, queste soluzioni avranno in x_1 un valor minore di y_1.

E di nuovo y_0' non è l'estremo superiore di I'.

Allo stesso modo si ha che in x_1 non può essere $y_0(x_1) > y_1$; ....

12.° Nel caso che uno dei punti (x_0, y_0), (x_1, y_1) vada alla frontiera di B, si può vedere di applicare direttamente i ragionamenti fatti, per giungere alla stessa conclusione; oppure, e ciò è più conveniente, si possono approssimare (x_0, y_0) e (x_1, y_1) con due successioni di punti $P_1, P_2, \ldots$; $P_1', P_2', \ldots$ interni a B, considerare una successione di integrali passanti per le coppie $P_1, P_1'; P_2, P_2'; \ldots$, estrarne, trattandosi di funzioni equicontinue insieme con le derivate prime, una successione convergente insieme con quella delle derivate e passare al limite [15]).

Con questo artifizio si può tentare di introdurre nell'ambito dei nostri criterii casi singolari supponendo che la f manchi di definizione nei punti dei piani $x = \bar{x}_0$, $x = \bar{x}_1$.

Inoltre facendo tendere all'infinito negativo $\bar{x}_0$ e all'infinito positivo $\bar{x}_1$, contemporaneamente o non, si hanno teoremi relativi a integrali definiti in una retta o in una semiretta.

---

[13]) Cfr. la mia Memoria, loc. cit. [1]), n.° 2.

[14]) Data la continuità di $y_0(x)$ e $\bar{y}_1(x)$.

[15]) In questo procedimento non è necessario che $P_1, P_2, \ldots$ appartengano ad una stessa verticale, e ad un'altra $P_1', P_2', \ldots$.

§ 3.

13.° Questo passaggio al limite può effettuarsi anche partendo dai risultati del § 1; fra gli altri si ottengono questi teoremi.

Se $\psi(x, y, y')$ *è continua nel semistrato*

$$S_1:\quad \bar{x}_0 < x < +\infty, \quad \bar{y}_0 \leqq y \leqq \bar{y}_1, \quad -\infty < y' < +\infty,$$
$$(-\infty < \bar{x}_0, \quad -\infty < \bar{y}_0, \quad \bar{y}_1 < +\infty),$$

con

$$|\psi(x, y, y')| \leqq g(x),$$

dove $g(x)$ *è definita in tutta la semiretta* $\bar{x}_0 < x$ *ed è sommabile in ogni intervallo limitato;*

se i rapporti incrementali di ψ *rispetto a* y *e* y' *sono limitati in ogni porzione chiusa e limitata di* S_1*; e se è* $\psi(x, y, y') \geqq 0$, $\psi(x, \bar{y}_0, 0) = 0$ *e* $\psi(x, \bar{y}_0, y')$ *è funzione monotona di* y',

dato un punto (x_0, y_0), *con* $\bar{x}_0 \leqq x_0$, $\bar{y}_0 \leqq y_0 \leqq \bar{y}_1$, *esiste almeno un integrale dell'equazione* $y'' = \psi$, $y(x)$, *per il quale sia* $\lim_{x \to x_0} y(x) = y_0$ *e che si possa definire in tutta la semiretta* $x_0 < x$.

Nel caso nostro esiste anche il limite

$$y_1 = \lim_{x \to +\infty} y(x).$$

Orbene:

Se ψ *non decresce rispetto a* y *ed è monotona rispetto a* y', $y(x)$ *è determinato in modo unico da* y_0 *e* y_1;

anzi:

Se ψ *non decresce rispetto a* y *e* y', *esiste un solo integrale della* $y'' = \psi$ *che verifichi la* $\lim_{x \to x_0} y(x) = y_0$ *e si possa definire per ogni* $x > x_0$.

Tutti questi teoremi sono dimostrati nella mia Memoria. Insieme con essi vengono dati dei criterii che permettono in certi casi di indicare a priori il valore del limite y_1.

In questi casi il problema: dati x_0, y_0, y_1, determinare un integrale $y(x)$ definito in $x_0 < x < +\infty$ per cui sia $\lim_{x \to x_0} y(x) = y_0$, $\lim_{x \to +\infty} y(x) = y_1$ non ammette in generale soluzione.

In base a questi criterii si ha, p. e., che l'equazione

$$y'' = \psi(x, y, y')$$

ammette un integrale, $y(x)$, che verifichi le condizioni

$$\lim_{x \to 0} y(x) = y_0, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0,$$

se $\psi(x, y, y')$ verifica tutte le condizioni dianzi indicate nell'insieme

$$0 < x, \quad 0 \leqq y \leqq \bar{y}_1, \quad -\infty < y' < +\infty\ [16]),$$

[16]) Naturalmente sarà $0 \leqq y_0 \leqq \bar{y}_1$.

ed inoltre è della forma

$$\psi_1(x, y, y') \cdot \psi_2(x, y, y'),$$

dove ψ_1 non è mai inferiore a una funzione della sola x, $g_1(x)$, che assume solo valori positivi o nulli e per la quale riesce

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{x_0}^{x} g_1(t)\, dt = +\infty,$$

e ψ_2 è tale, che fissato a piacere $\bar{y}$ nell'intervallo semiaperto $0 < y \leqq \bar{y}_1$, si possa determinare un $\bar{x} > 0$, in modo che il suo estremo inferiore nell'insieme

$$\bar{x} \leqq x, \quad \bar{y} \leqq y \leqq \bar{y}_1, \quad -\infty < y' < +\infty$$

sia maggior di zero[17]).

P. e. tutte queste condizioni sono soddisfatte se ψ è la funzione

$$y^p \cdot x^q \qquad (p > 0, \ -1 < q < 0),$$

dove come valori di y^p e x^q si intendono assunte le determinazioni positive di queste potenze.

Napoli, 3 agosto 1930.

---

[17]) Cfr. il 4.° cap. della mia Memoria, loc. cit. [1]).

(Eingegangen am 9. 11. 1930.)