

# Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten.

Von

Carl Bankwitz in Königsberg.

Im folgenden soll eine besondere Darstellung der Torsionszahlen des zweifach überdeckten Knotenaußenraumes entwickelt werden.

Es ergibt sich: Die Torsionszahlen lassen sich als die Elementarteiler von symmetrischen Determinanten darstellen (§ 1). Den Wert dieser Determinanten kann man unter gewissen Voraussetzungen nach unten abschätzen (§ 2). Man erhält hieraus für die alternierenden Knoten den von K. Reidemeister als Vermutung ausgesprochenen<sup>1)</sup>

Satz: „Die Minimalanzahl der Überkreuzungen der Projektion eines alternierenden Knotens ist höchstens so groß wie das Produkt seiner Torsionszahlen“ (§ 3).

## § 1.

### Die Knotengruppe.

1. Vorgegeben sei irgendeine reguläre<sup>2)</sup> Projektion eines gerichteten Knotens. Die Projektion besteht aus  $n$  Doppelpunkten und  $2n$  gerichteten Strecken. Die gerichteten Strecken wollen wir Abschnitte nennen. Jeder Abschnitt wird von zwei Doppelpunkten begrenzt. Die Projektionsebene wird durch die Projektion in Gebiete  $\Gamma$ , die von den Abschnitten und den Doppelpunkten begrenzt werden, eingeteilt. Bei einem Doppelpunkt stoßen vier Gebiete, längs eines Abschnittes stoßen zwei Gebiete aneinander.

Wir nehmen nun eine Einteilung der Gebiete  $\Gamma$  in zwei Klassen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  derart vor, daß längs eines Abschnittes immer zwei Gebiete verschiedener Klassen aneinanderstoßen. — Nehmen wir ein Gebiet  $\Gamma_0$ , etwa das Gebiet, in dem das unendlich Ferne der Projektionsebene liegt, willkürlich zur Klasse  $\mathfrak{A}$ . Die Gebiete  $\Gamma_a$ , die mit  $\Gamma_0$  einen

<sup>1)</sup> Herrn Reidemeister verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit.

<sup>2)</sup> K. Reidemeister, Hamburger Abhandlungen 1926, Heft 1/2, S. 24.

Abschnitt gemeinsam haben, gehören dann der Klasse  $\mathfrak{B}$  an. Die Gebiete, die mit einem der Gebiete  $\Gamma_\alpha$  einen Abschnitt gemeinsam haben, werden wieder zur Klasse  $\mathfrak{A}$  gerechnet usw. Diese Einteilung ist widerspruchsfrei. Ein Weg, der von einem Gebiet einer Klasse zu einem anderen Gebiet derselben bzw. der anderen Klasse führt, muß nämlich eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Punkten mit der Knotenprojektion gemeinsam haben (Doppelpunkte zweifach gezählt). Wäre die Einteilung nun widerspruchsvoll, dann müßte also ein geschlossener Weg in der Projektionsebene eine ungerade Anzahl von Punkten mit der Knotenprojektion gemeinsam haben. Dies ist aber nicht der Fall. Deformieren wir nämlich den geschlossenen Weg über einen Abschnitt oder über einen Doppelpunkt, dann ändert sich die Anzahl der mit der Knotenprojektion gemeinsamen Punkte um 0,  $\pm 2$  bzw.  $\pm 4$ . Wir können nun den Weg so deformieren, daß er ganz innerhalb eines Gebietes liegt, also keinen Punkt mit der Knotenprojektion gemeinsam hat.

An den Doppelpunkten liegen sich zwei Gebiete jeder Klasse kreuzweise gegenüber.

Wir wählen nun in jedem Gebiet der Klasse  $\mathfrak{B}$  einen Grundpunkt und verbinden die Grundpunkte von je zwei an einem Doppelpunkte sich gegenüberliegenden Gebieten durch einen einfachen Streckenzug, der durch den Doppelpunkt hindurchgeht. Die Gesamtheit der Streckenzüge und der Grundpunkte bilden einen ebenen Graphen ( $\mathfrak{G}$ ).

Wir unterscheiden zwischen eigentlichen und uneigentlichen Grundpunkten. Einen Grundpunkt wollen wir uneigentlich nennen, wenn von ihm höchstens zwei Streckenzüge ausgehen. Ein Grundpunkt soll eigentlich heißen, wenn mindestens drei Streckenzüge von ihm ausgehen.

Geht von einem Grundpunkt nur ein Streckenzug aus, d. h. liegt an einem Gebiet der Klasse  $\mathfrak{B}$  nur ein Doppelpunkt, dann können wir durch

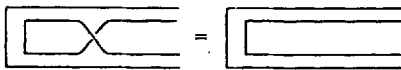


Fig. 1.

eine elementare Umformung des Knotens<sup>3)</sup> diesen Doppelpunkt beseitigen. Die Anzahl der Gebiete und die Anzahl der Doppelpunkte vermindert sich dabei um je eins (Fig. 1). Wir können

demnach immer erreichen, daß die Grundpunkte dieser Art nicht mehr in der Projektion vorkommen.

Stoßen an einem Grundpunkt genau zwei Streckenzüge aneinander, so wollen wir die beiden Streckenzüge miteinander vereinigen und den Grundpunkt zum Streckenzug hinzurechnen.

<sup>3)</sup> J. W. Alexander, Transactions of the American Mathematical Society, 30, Nr. 2, April 1928. — K. Reidemeister, Hamb. Abhandl. 1926, S. 25–28.

Der Graph  $\mathcal{G}$  besteht dann nur noch aus Streckenzügen (im erweiterten Sinn!) und aus eigentlichen Grundpunkten. Das Gebiet, in dem ein eigentlicher Grundpunkt liegt, wollen wir Verzweigungsgebiet nennen.

In der Knotenprojektion entsprechen dann den Streckenzügen des Graphen die Projektionen von Zweierzöpfen<sup>4)</sup>. Die Endstrecken der Zweierzöpfe sind so miteinander verknüpft, daß in der Knotenprojektion keine neuen Doppelpunkte hinzukommen. Die Endstrecken bestehen aus den Abschnitten, die die Verzweigungsgebiete begrenzen.



Fig. 2.

Die Zweierzöpfe können wir so deformieren, daß in der Projektion Unter- und Überkreuzungen miteinander abwechseln (Fig. 2).

Hat die Projektion eines Zweierzöpfes nach dieser Deformation keine Überkreuzungen mehr, so wollen wir den entsprechenden Streckenzug mit seinen beiden Grundpunkten zu einem Grundpunkt zusammenziehen und die beiden entsprechenden Verzweigungsgebiete zu einem Verzweigungsgebiet vereinigen. Die Projektion des Zweierzöpfes geht in die Berandung des Verzweigungsgebietes über; der Knoten setzt sich dann also aus alternierenden Zweierzöpfen mit mindestens je einer Überkreuzung zusammen.

So soll im folgenden jede Knotenprojektion aufgefaßt werden. Die Zweierzöpfe einschließlich der von ihnen begrenzten Gebiete der Klasse  $\mathfrak{B}$  und eines Teiles der zugehörigen Verzweigungsgebiete sollen Stränge ( $\gamma_{\lambda\mu}$ ) heißen. Die Gebiete der Klasse  $\mathfrak{A}$  nennen wir im folgenden kurz Gebiete ( $\Gamma_\nu$ ). Der Strang  $\gamma_{\lambda\mu}$  soll die Gebiete  $\Gamma_\lambda$  und  $\Gamma_\mu$  voneinander trennen.

Wir können den Fall  $\lambda = \mu$  ausschließen.  $\lambda = \mu$  bedeutet geometrisch, daß in der Begrenzung des Gebietes  $\Gamma_\lambda$  der Strang  $\gamma_{\lambda\lambda}$  zweimal auftritt. Die Knotenprojektion besteht in diesem Fall aus zwei Teilen (Fig. 3), die durch den Strang  $\gamma_{\lambda\lambda}$  miteinander verknüpft sind. Drehen wir nun den einen Teil in einem bestimmten Sinn um eine Achse, die mit dem  $\gamma_{\lambda\lambda}$  entsprechenden Streckenzug des Graphen  $\mathcal{G}$  zusammenfällt, so oft um  $180^\circ$ , als auf  $\gamma_{\lambda\lambda}$  Überkreuzungen liegen, dann hat  $\gamma_{\lambda\lambda}$  keine Überkreuzungen mehr und kann daher zur Berandung eines Verzweigungsgebietes gerechnet werden.

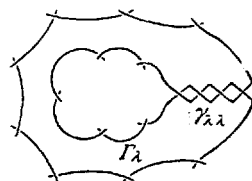


Fig. 3.

2. Wir stellen jetzt die Fundamentalgruppe des Knotens auf. Die aufeinanderfolgenden Abschnitte der Knotenprojektion von einer Unterkreuzung bis zur nächsten werden zu einer Fundamentalstrecke zusammengefaßt. Den Fundamentalstrecken wird formal ein System von Erzeugenden  $C_\nu$  zugeordnet. Gehört aber eine Fundamentalstrecke mehr als

<sup>4)</sup> E. Artin, Hamb. Abhandl. 4, 1925, pg. 47—72.

zwei Strängen an, dann zerlegen wir sie in Teilstrecken derart, daß jede Teilstrecke genau zwei Strängen angehört. In diesem Fall ordnen wir jeder Teilstrecke ein besonderes  $C_\nu$  zu.

Die  $C_\nu$  entsprechen in der Fundamentalgruppe den geschlossenen Wegen, die eine zugehörige Fundamentalstrecke in einem positiv vorgegebenen Sinn umlaufen<sup>5)</sup>. Die Projektion des Punktes, von dem die geschlossenen Wege ausgehen, möge dabei in das Gebiet  $\Gamma_0$  — das Äußere der Knotenprojektion — fallen. Jedem Weg läßt sich in bestimmter Weise ein Potenzprodukt in den  $C_\nu$  zuordnen.

Wir können diese Wege geometrisch auch folgendermaßen kennzeichnen: Zwischen den beiden Teilen des Knotens, die zu einem Strang gehören, spannen wir eine schlichte Fläche, ein Band. Dieses Band verwindet sich in der Längsrichtung so oft um  $180^\circ$ , als der Strang Doppelpunkte hat. Den Strang können wir als die Projektion des Bandes ansehen. Die Bänder werden nun in der Weise miteinander verknüpft, wie es die Verzweigungsgebiete der Knotenprojektion vorschreiben. Es entsteht dann eine mehrfach zusammenhängende einseitige, vom Knoten berandete Fläche.

Die  $C_\nu$  entsprechen solchen geschlossenen Wegen, die diese Fläche genau einmal durchsetzen.

Die Relationen zwischen den  $C_\nu$  erhalten wir bekanntlich<sup>6)</sup>, indem wir die Doppelpunkte der Knotenprojektion in einem kleinen Kreis umlaufen. Diese Relationen sind von der Gestalt:

$$(1) \quad C_{i+1} = C_\mu^\varepsilon C_i C_\mu^{-\varepsilon} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

und

$$(2) \quad C_{x+1} = C_x,$$

wenn  $C_x, C_{x+1}$  zwei aneinanderstoßenden Teilfundamentalstrecken entsprechen.

3. Unser Ziel in diesem Paragraphen ist es nun, eine andere Darstellung dieser Gruppe zu geben, und zwar durch Erzeugende und Relationen, die sich enger an die von uns beschriebene Auffassung der Knotenprojektion anschließt.

Wir nehmen zunächst eine Erweiterung zweiter Art<sup>7)</sup> der Knoten-  
gruppe vor. Die Elemente  $S_{\lambda\mu}$  der Fundamentalgruppe, die einmaligen Umschlingungen der Stränge  $\gamma_{\lambda\mu}$  in einem beliebigen aber festen Sinne entsprechen, werden als Erzeugende zur Fundamentalgruppe hinzugenommen.

<sup>5)</sup> K. Reidemeister, Hamb. Abhandl. 5 (1926), S. 14.

<sup>6)</sup> K. Reidemeister, Hamb. Abhandl. 5 (1926), S. 8–23.

<sup>7)</sup> H. Tietze, Mon. f. Math. u. Phys., 19, S. 65–77.

Dem Strang  $\gamma_{\lambda\mu}$  seien die Erzeugenden

$$C_{\lambda_1}, C_{\lambda_1+1}, \dots, C_{\lambda_1+r},$$

$$C_{\mu_1}, C_{\mu_1+1}, \dots, C_{\mu_1+r}$$

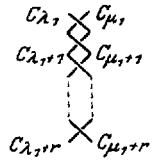


Fig. 4.

zugeordnet (Fig. 4). Jedem Doppelpunkt des Stranges entspricht eine der Relationen (1).

Es ist ferner

$$(3a) \quad S_{\lambda\mu}^\varepsilon = C_{\lambda_1}^{\varepsilon\lambda} C_{\mu_1}^{\varepsilon\mu} = C_{\mu_1+1}^{\varepsilon\mu} C_{\lambda_1}^{\varepsilon\lambda} = \dots = C_{\lambda_1+r}^{\varepsilon\lambda} C_{\mu_1+r}^{\varepsilon\mu} \quad (\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu = \pm 1),$$

wenn der Strang  $\gamma_{\lambda\mu}$   $2r$  Doppelpunkte hat, und

$$(3b) \quad S_{\lambda\mu}^{\varepsilon} = C_{\lambda_1}^{\varepsilon\lambda} C_{\mu_1}^{\varepsilon\mu} = \dots = C_{\mu_1+r+1}^{\varepsilon\mu} C_{\lambda_1+r}^{\varepsilon\lambda},$$

wenn der Strang  $2r + 1$  Doppelpunkte hat. Die Relationen (3) sind dabei bis auf eine, etwa  $S_{\lambda\mu} = C_{\lambda_1}^{\varepsilon\lambda} C_{\mu_1}^{\varepsilon\mu}$ , Folgerelationen dieser beibehaltenen Relationen und der Relationen (1) bzw. (2).

Wir wollen nun durch Reduktionen zweiter Art diejenigen  $C_\nu$  ausdrücken, welche Fundamentalstrecken zugeordnet sind, die nicht Enden eines Stranges sind. Es folgt aus (1) unter Berücksichtigung der Relationen (3)

$$(4a) \quad C_{\lambda_1+1} = S_{\lambda\mu}^\varepsilon C_{\lambda_1} S_{\lambda\mu}^{-\varepsilon},$$

$$C_{\lambda_1+2} = S_{\lambda\mu}^\varepsilon C_{\lambda_1+1} S_{\lambda\mu}^{-\varepsilon} = S_{\lambda\mu}^{2\varepsilon} C_{\lambda_1} S_{\lambda\mu}^{-2\varepsilon},$$

. . . . .

$$C_{\lambda_1+r} = S_{\lambda\mu}^{\varepsilon} C_{\lambda_1} S_{\lambda\mu}^{-\varepsilon},$$

und analog für  $C_{\mu_1+q}$  ( $q = 1 \dots r$  bzw.  $r + 1$ )

$$(4b) \quad C_{\mu_1+1} = S_{\lambda\mu}^\varepsilon C_{\mu_1} S_{\lambda\mu}^{-\varepsilon},$$

$$C_{\mu_1+2} = S_{\lambda\mu}^{2\varepsilon} C_{\mu_1} S_{\lambda\mu}^{-2\varepsilon},$$

. . . . .

$$C_{\mu_1+r} = S_{\lambda\mu}^{\varepsilon} C_{\mu_1} S_{\lambda\mu}^{-\varepsilon}.$$

Umgekehrt folgen aus der Definition von  $S_{\lambda\mu}$  und aus (4a) und (4b) die Relationen (1).

Wir können jetzt  $C_{\lambda_1+q}$ ,  $C_{\mu_1+q}$  ( $q = 1 \dots r - 1$ ) eliminieren. Die Relationen (4a) bzw. (4b) fallen dann bis auf die jeweils letzte heraus. Bei dem Strang  $\gamma_{\lambda\mu}$  werden also nur noch die Erzeugenden

$$C_{\lambda_1}, C_{\mu_1}, C_{\lambda_1+r}, C_{\mu_1+r} \text{ (bzw. } C_{\mu_1+r+1})$$

und  $S_{\lambda\mu}$  beibehalten. Zwischen ihnen bestehen die Relationen

$$(5a) \quad S_{\lambda\mu}^\varepsilon = C_{\lambda_1}^{\varepsilon\lambda} C_{\mu_1}^{\varepsilon\mu} = C_{\lambda_1+r}^{\varepsilon\lambda} C_{\mu_1+r}^{\varepsilon\mu}$$

und

$$(6a) \quad C_{\lambda_1+r} = S_{\lambda\mu}^{\varepsilon} C_{\lambda_1} \bar{S}_{\lambda\mu}^{-\varepsilon},$$

$$C_{\mu_1+r} = S_{\lambda\mu}^{\varepsilon} C_{\mu_1} S_{\lambda\mu}^{-\varepsilon}$$

bzw.

$$(5b) \quad S_{i,\mu}^\varepsilon = C_{i_1}^{\varepsilon\lambda} C_{\mu_1}^{\varepsilon\mu} = C_{\mu_1+\tau+1}^{\varepsilon\mu} C_{i_1+\tau}^{\varepsilon\lambda}$$

und

$$(6b) \quad C_{i_1+\tau} = S_{\lambda,\mu}^{\tau\varepsilon} C_{i_1} S_{\lambda,\mu}^{-\tau\varepsilon},$$

$$C_{\mu_1+\tau+1} = S_{\lambda,\mu}^{(\tau+1)\varepsilon} C_{\mu_1} S_{\lambda,\mu}^{-(\tau+1)\varepsilon},$$

dabei ist je eine der Relationen (5a), (5b) Folgerelation der anderen Relation (5a), (5b) und der Relationen (6a), (6b).

Mit Hilfe von (5b) formen wir die Relationen (6b) noch etwas um. Wenn etwa  $\varepsilon = \varepsilon_\lambda = \varepsilon_\mu = +1$  ist, schreiben wir

$$(6c) \quad C_{i_1+\tau} = S_{\lambda,\mu}^{\tau+1} C_{\mu_1}^{-1} S_{\lambda,\mu}^{-\tau},$$

$$C_{\mu_1+\tau} = S_{\lambda,\mu}^{\tau+1} C_{i_1}^{-1} S_{\lambda,\mu}^{-\tau},$$

entsprechend in den anderen möglichen Fällen. Alsdann begrenzen  $C_{i_1+\tau}$  und  $C_{\mu_1}$ , sowie  $C_{\mu_1+\tau}$  und  $C_{i_1}$  je dasselbe Gebiet  $\Gamma$ .

Das Gebiet  $\Gamma_\varepsilon$  sei von den Strängen  $\gamma_{\varepsilon v_1}, \dots, \gamma_{\varepsilon v_m}$  begrenzt (Fig. 5).

Wir diskutieren den Fall, daß  $s_{\varepsilon v_\lambda} = 2\bar{s}_{\varepsilon v_\lambda}$  ( $\lambda = 1 \dots m-1$ ) Überkreuzungen auf  $\gamma_{\varepsilon v_\lambda}$  und  $s_{\varepsilon v_m} = 2\bar{s}_{\varepsilon v_m} + 1$  Überkreuzungen auf  $\gamma_{\varepsilon v_m}$  liegen.

$C_{\varepsilon\mu}$  ( $\mu = 1 \dots m$ ) entspreche einer Fundamentalstrecke, die zwei aufeinanderfolgenden

Strängen  $\gamma_{\varepsilon v_{\mu-1}}, \gamma_{\varepsilon v_\mu}$  angehört und  $\Gamma_\varepsilon$  begrenzt. Es ist dann nach (5a)

$$(7a) \quad C_{\varepsilon 2} = S_{\varepsilon v_1}^{\varepsilon \cdot \bar{s}_{\varepsilon v_1}} \cdot C_{\varepsilon 1} \cdot S_{\varepsilon v_1}^{-\varepsilon \cdot s_{\varepsilon v_1}},$$

$$C_{\varepsilon 3} = S_{\varepsilon v_2}^{\varepsilon \cdot \bar{s}_{\varepsilon v_2}} \cdot C_{\varepsilon 2} \cdot S_{\varepsilon v_2}^{-\varepsilon \cdot s_{\varepsilon v_2}}$$

$$= S_{\varepsilon v_2}^{\varepsilon \cdot \bar{s}_{\varepsilon v_2}} \cdot S_{\varepsilon v_1}^{\varepsilon \cdot \bar{s}_{\varepsilon v_1}} \cdot C_{\varepsilon 1} \cdot S_{\varepsilon v_1}^{-\varepsilon \cdot s_{\varepsilon v_1}} \cdot S_{\varepsilon v_2}^{-\varepsilon \cdot s_{\varepsilon v_2}},$$

.....

$$C_{\varepsilon m} = \prod_{\mu=m-1}^1 S_{\varepsilon v_\mu}^{\varepsilon \cdot \bar{s}_{\varepsilon v_\mu}} \cdot C_{\varepsilon 1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m-1} S_{\varepsilon v_\mu}^{-\varepsilon \cdot s_{\varepsilon v_\mu}},$$

und nach (6c) ( $\varepsilon_{v_m} = +1$ )

$$(7) \quad C_{\varepsilon 1} = S_{\varepsilon v_m}^{\bar{s}_{\varepsilon v_m}+1} \cdot \prod_{\mu=m-1}^1 S_{\varepsilon v_\mu}^{\varepsilon \cdot \bar{s}_{\varepsilon v_\mu}} \cdot C_{\varepsilon 1}^{-1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m-1} S_{\varepsilon v_\mu}^{-\varepsilon \cdot s_{\varepsilon v_\mu}} \cdot S_{\varepsilon v_m}^{-\bar{s}_{\varepsilon v_m}}.$$

Umgekehrt folgen die Relationen (6), die den  $\Gamma_\varepsilon$  begrenzenden Fundamentalstrecken entsprechen, aus den Relationen (7a) und (7) und können daher fortgelassen werden. Die Ausdrücke (7a) für die  $C_{\varepsilon\mu}$  denken wir uns in (5a) bzw. (5b) eingesetzt; dann können die Relationen (7a) und damit die Erzeugenden  $C_{\varepsilon\mu}$  ( $\mu \neq 1$ ) fortgelassen werden. Analoges ergibt sich für den Fall, daß auf mehreren Strängen eine ungerade Anzahl von

Überkreuzungen liegen. Jedem Strang  $\gamma_{\lambda,\mu}$  entspricht jetzt also eine Erzeugende  $S_{\lambda,\mu}$  und jedem Gebiet  $\Gamma_\rho$  eine Erzeugende  $C_{\rho_1} = G_\rho$ . Die Relationen (7) wollen wir Gebietsrelationen nennen.

Die Relationen (5) ordnen wir so an:

An dem Verzweigungsgebiet  $E_\sigma$  mögen die Fundamentalstrecken liegen, denen die Erzeugenden  $C_{\sigma_1} \dots C_{\sigma_n}$  in zyklischer Folge zugeordnet sind. Dabei kommen alle Relationen (5a) bzw. (5b) je einmal vor, wenn alle Verzweigungsgebiete  $E_\sigma$  umlaufen werden. Es ist nach (5)

$$(8) \quad \begin{aligned} C_{\sigma_1}^{-\varepsilon_{\sigma_1}} C_{\sigma_2}^{\varepsilon_{\sigma_2}} &= S_{\lambda_1 \lambda_2}^{\varepsilon_{\lambda_1}}, \\ C_{\sigma_2}^{-\varepsilon_{\sigma_2}} C_{\sigma_3}^{\varepsilon_{\sigma_3}} &= S_{\lambda_2 \lambda_3}^{\varepsilon_{\lambda_2}}, \\ &\dots \dots \dots \\ C_{\sigma_{n-1}}^{-\varepsilon_{\sigma_{n-1}}} C_{\sigma_n}^{\varepsilon_{\sigma_n}} &= S_{\lambda_{n-1} \lambda_n}^{\varepsilon_{\lambda_{n-1}}}, \\ C_{\sigma_n}^{-\varepsilon_{\sigma_n}} C_{\sigma_1}^{\varepsilon_{\sigma_1}} &= S_{\lambda_n \lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_n}}. \end{aligned}$$

Aus (8) folgt

$$(8a) \quad S_{\lambda_1 \lambda_2}^{\varepsilon_{\lambda_1}} S_{\lambda_2 \lambda_3}^{\varepsilon_{\lambda_2}} \dots S_{\lambda_{n-1} \lambda_n}^{\varepsilon_{\lambda_{n-1}}} S_{\lambda_n \lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_n}} = 1.$$

Eine der Relationen (8) — etwa die letzte — können wir durch (8a) ersetzen. Die  $C_\sigma$  in (8) seien durch die Relationen (7a) erklärt.

4. Wir wollen zeigen, daß die  $G_\rho$  bis auf eines durch Reduktionen zweiter Art eliminiert und allein die Relationen (8a) beibehalten werden können.

Die Knotenprojektion habe  $e$  Verzweigungsgebiete,  $k$  Stränge und  $f$  Gebiete (ausschließlich  $\Gamma_0$ ). Es ist dann nach dem Eulerschen Satz

$$(9) \quad e \div f = k + 1.$$

Wir legen in jedem Gebiet  $\Gamma_\rho$  einen Punkt  $P_\rho$  fest. Ein Punkt, etwa  $P_0$ , soll ausgezeichnet werden. Die Punkte  $P_\alpha$  der  $\Gamma_0$  benachbarten Gebiete  $\Gamma_\alpha$  verbinden wir durch Streckenzüge mit  $P_0$  so, daß ein Streckenzug nur Punkte des Stranges  $\gamma_{0\alpha}$  mit der Knotenprojektion gemeinsam hat. Grenzt aber ein Gebiet  $\Gamma_\alpha$  längs mehreren Strängen an  $\Gamma_0$ , dann wird nur ein Streckenzug von  $P_0$  nach  $P_\alpha$  willkürlich festgelegt. Wir nehmen dann die Gebiete  $\Gamma_\beta$ , die einem Gebiet  $\Gamma_\alpha$  benachbart sind. Die Punkte  $P_\beta$  verbinden wir in derselben Weise mit  $P_\alpha$ , wie  $P_\alpha$  mit  $P_0$  mit Ausnahme derjenigen Punkte  $P_{\beta'}$ , zu denen schon ein Streckenzug hinführt. Wir fahren so fort, bis zu jedem  $P_\rho$  ein Streckenzug führt. Hierdurch wird ein Weg von  $P_0$  aus zu jedem Gebiet in eindeutiger Weise festgelegt. Die Gesamtheit dieser Streckenzüge bildet einen Baum  $\mathfrak{B}_1$ . Es entspricht jedem Gebiet  $\Gamma_\rho$  eine gerichtete Strecke und umgekehrt. Die Streckenzüge schneiden insgesamt also  $f$  Stränge je einmal.

Von den diesen Strängen zugeordneten Relationen (8) wird je eine — nach (5) gehören zu jedem Strang vorläufig 2 Relationen, wovon aber die eine überflüssig ist — beibehalten.

Nach (9) werden von den Streckenzügen  $k - f = e - 1$  Stränge nicht geschnitten. Diesen Strängen können wir als Ersatz für die Relationen (5)  $(e - 1)$  Relationen (8a) zuordnen. Nehmen wir nämlich die von den Streckenzügen des Baumes  $\mathfrak{B}_1$  geschnittenen Streckenzüge des Graphen  $\mathfrak{G}$  (der ja die Knotenprojektion repräsentiert) aus dem Graphen heraus, dann bleibt ein Baum  $\mathfrak{B}_2$  übrig. Wäre  $\mathfrak{B}_2$  kein Baum, dann müßte man auf mindestens zwei verschiedenen Wegen von einem Eckpunkt  $Q_1$  zu einem anderen Eckpunkt  $Q_2$  gelangen können. Diese Wege würden dann mindestens ein Gebiet  $\Gamma$  einschließen, in das der Baum  $\mathfrak{B}_1$  nicht hineinragt. Ebenso kann  $\mathfrak{B}_2$  nicht in zwei Teile zerfallen; denn dann gäbe es in  $\mathfrak{B}_1$  mindestens einen geschlossenen Weg, was nach der Definition von  $\mathfrak{B}_1$  nicht möglich ist. Orientieren wir  $\mathfrak{B}_2$ , so endet jede Strecke von  $\mathfrak{B}_2$  in einer bestimmten Ecke von  $\mathfrak{B}_2$ . Für die  $(e - 1)$  Stränge, die den Strecken des Baumes  $\mathfrak{B}_2$  entsprechen, nehmen wir dann als Relationen (5a) die den Ecken entsprechenden Relationen (8a). Behalten wir alle  $e$  Relationen (8a) bei, so ist eine Relation Folgerelation der übrigen.

Wir können nun die  $G_e$  mit Hilfe der beibehaltenen Relationen (8) durch  $G_0$  und durch die  $S_{\lambda,\mu}$  in eindeutiger Weise bestimmen, wenn wir die Reduktion so durchführen, wie es die von  $P_0$  ausgehenden Streckenzüge vorschreiben. Um etwa  $G_e$  zu eliminieren, zeichnen wir im Baum  $\mathfrak{B}_1$  den (eindeutig bestimmten) Weg, der von  $P_0$  nach  $P_e$  hinführt. Den Streckenzügen dieses Weges entspricht eine Folge von eindeutig bestimmten Relationen (8), welche durch die  $S_{\lambda,\mu}$  und  $G_e$  ausgedrückt, die Form haben:

$$(8b) \quad G_\beta = L_1 G_\gamma L_2, \quad L_\nu = L_\nu(S_{\lambda,\mu}) \quad (\beta \neq \gamma).$$

Ich kann daraus einen wohlbestimmten Ausdruck für  $G_e$

$$(8c) \quad G_e = M_1 G_0 M_2, \quad M_\nu = M_\nu(S_{\lambda,\mu})$$

ableiten. Umgekehrt folgen die Relationen (8b) und (8) aus den Relationen (8c).

Setzen wir diese Werte in die Gebietsrelationen (6) ein, dann dürfen die Relationen (8c) fortgelassen werden. *Die Knotengruppe hat also nur noch die Erzeugenden  $G_0$  und  $S_{\lambda,\mu}$ . Zwischen ihnen bestehen die Gebiets- und die Eckrelationen.*

5. Den Weg von  $P_0$  nach einem  $P_\nu$  längs den Streckenzügen des Baumes  $\mathfrak{B}_1$  können wir in der Fundamentalgruppe einem Weg  $L_\nu$  zuordnen, der von  $P_0$  kommend unter dem Knoten läuft, durch das Gebiet  $\Gamma_\nu$  einmal hindurchgeht und oberhalb des Knotens nach  $P_0$  zurückführt. Nehmen wir speziell einen Weg  $P_0 P_{\alpha_1} P_{\alpha_2} \dots P_{\alpha_n}$ ; und setzen



$$\begin{aligned}
 L_{a_1} &= S_{0a_1}^{\varepsilon a_1}, \\
 L_{a_2} &= S_{0a_1}^{\varepsilon a_1} S_{a_1 a_2}^{\varepsilon a_2}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 L_{a_n} &= S_{0a_1}^{\varepsilon a_1} S_{a_1 a_2}^{\varepsilon a_2} \dots S_{a_{n-1} a_n}^{\varepsilon a_n}.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Aus (10) folgt

$$\begin{aligned}
 S_{0a_1}^{\varepsilon a_1} &= L_{a_1}, \\
 S_{a_1 a_2}^{\varepsilon a_2} &= L_{a_2} L_{a_1}^{-1}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 S_{a_{n-1} a_n}^{\varepsilon a_n} &= L_{a_n} L_{a_{n-1}}^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Führen wir für alle Streckenzüge des Baumes  $\mathfrak{B}_1$  die Elemente  $L_\nu$  ein, so entspricht jedem Gebiet  $\Gamma_\nu$  ein Element  $L_\nu$ , und es ist allgemein

$$L_\lambda \cdot S_{\lambda\mu}^{\varepsilon\lambda} = L_\mu,$$

also

$$S_{\lambda\mu}^{\varepsilon\lambda} = L_\mu L_\lambda^{-1},$$

wie sich aus (10) bzw. (11) und den Eckrelationen (8a) ergibt.

Wir führen nun die  $L_\nu$  mittels der Relationen (11) und (12) für  $S_{\lambda\mu}$  in die Relationen ein. Die Eckrelationen verschwinden identisch. Die Relationen (12), die Folgerelationen der Eckrelationen sind, verschwinden auch identisch; ebenfalls schließlich die Relationen (11).

Die Reduktion ist jetzt beendet. *Die Knotengruppe wird dargestellt durch die Erzeugenden  $G_0$  und  $L_\nu$ . Zwischen ihnen bestehen die Gebietsrelationen*

$$G_e = \prod_{\mu=m}^1 (L_e L_{\nu_\mu}^{-1})^{\varepsilon_{\nu_\mu} (\delta_{e\nu_\mu} + [1])} G_0^\varepsilon \prod_{\mu=1}^m (L_e L_{\nu_\mu}^{-1})^{-\varepsilon_{\nu_\mu} \bar{\delta}_{e\nu_\mu}},$$

wo die  $G_e$  durch (8c) als Produkte aus  $G_0$  und  $S_{\lambda\mu}$  bestimmt sind. Es ist  $[1] = 0$  oder  $1$ , je nachdem  $s_{e\nu_\mu} = 2 \bar{s}_{e\nu_\mu}$  oder  $= 2 \bar{s}_{e\nu_\mu} + 1$ .  $s_{e\nu_\mu}$  ist die Anzahl der Überkreuzungen des Stranges  $\gamma_{e\nu_\mu}$ . Es ist  $L_0 \equiv 1$ . Die  $G_e$  lassen sich nach (1) als Transformierte von  $G_0$  schreiben:  $G_e = M_e G_0 M_e^{-1}$ .

Wir beschränken uns im folgenden auf alternierende Knoten, d. h. wir nehmen an, daß beim Durchlaufen der Knotenprojektion Unter- und Überkreuzungen miteinander abwechseln. Die Stränge um ein Gebiet  $\Gamma$  sind in diesem Fall alle in gleichem Sinn verdrillt. Daraus folgt, daß alle  $\varepsilon_{\nu_\mu}$  in (13) einander gleich sind.

6. Die Gruppe  $\mathfrak{K}_2^8$  des zweifachen Überlagerungsraumes des Knotens hat als Erzeugende

$$L_\nu, \quad G_0 L_\nu G_0^{-1} = \bar{L}_\nu \quad \text{und} \quad [G_0^2].$$

<sup>8)</sup> K. Reidemeister, Hamb. Abhandl. 5 (1926), S. 19 usf.

Die Relationen erhält man, indem man (13) und die mit  $G_0$  transformierten Relationen (13) durch die Erzeugenden (14) ausdrückt.

Machen wir diese Gruppe abelsch und setzen wir  $[G_0^2] = 1$ , dann ist

$$G_0^2 = 1 \quad \text{und} \quad G_0 M G_0 = G_0 M G_0 = M^{-1},$$

wo  $M$  zu  $\mathfrak{K}_2$  gehört. Es ist daher

$$\bar{L}_v = L_v^{-1},$$

und die Relationen, die man aus (13) erhält, sind:

$$(15) \quad (L_0 L_{v_1}^{-1})^{s_{0v_1}} \dots (L_0 L_{v_m}^{-1})^{s_{0v_m}} = 1.$$

Grenzen zwei Gebiete  $\Gamma_0, \Gamma_{v_\mu}$  längs mehreren Strängen  $\gamma'_{0v_\mu} \dots \gamma^{(\bar{i})}_{0v_\mu}$  mit den Überkreuzungen  $s'_{0v_\mu} \dots s^{(\bar{i})}_{0v_\mu}$  aneinander, dann können wir in (15)  $\prod_{(\bar{i})=1}^{(\bar{i})} (L_0 L_{v_\mu}^{-1})^{s_{0v_\mu}^{(\bar{i})}}$  natürlich zu  $(L_0 L_{v_\mu}^{-1})^{\sum s_{0v_\mu}^{(\bar{i})}}$  zusammenfassen. Diese Zusammenfassung sei in (15) bereits vorgenommen, dann bedeutet  $s_{0v_\mu}$  die Gesamtanzahl von Überkreuzungen auf den Strängen, welche  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_{v_\mu}$  voneinander trennen.

Bei einem nicht-alternierenden Knoten würde man analog die Relationen

$$(15a) \quad (L_0 L_{v_1}^{-1})^{s_{v_1}, s_{0v_1}} \dots (L_0 L_{v_m}^{-1})^{s_{v_m}, s_{0v_m}} = 1$$

erhalten.

Die Relationen (15) können wir auch so schreiben:

$$(16) \quad L_0^{\sum_{\mu=1}^m s_{0v_\mu}} L_{v_1}^{-s_{0v_1}} \dots L_{v_m}^{-s_{0v_m}} = 1.$$

Dabei können mehrere  $L_{v_\mu}$  gleich  $L_0 \equiv 1$  sein. Das ist immer dann der Fall, wenn ein Strang oder mehrere Stränge eines Gebietes zum Rand von  $\Gamma_0$  gehören.

Die  $\Gamma_0$  entsprechende Relation lautet:

$$(16a) \quad L_{a_1}^{-s_{0a_1}} \dots L_{a_m}^{-s_{0a_m}} = 1.$$

7. Es möge noch darauf hingewiesen werden, daß in der Auszeichnung von  $\Gamma_0$  eine Willkür enthalten ist. Wir haben bei der Aufstellung der Fundamentalgruppe vorausgesetzt, daß der Punkt, von dem die Wege der Fundamentalgruppe ausgehen, in der Projektionsebene in  $\Gamma_0$  liegt. Wir können diesen Punkt natürlich auch innerhalb eines anderen Gebietes  $\Gamma_v$  annehmen. Dann bilden die Stränge dieses Gebietes den Rand.

Die aus den Exponenten der Relationen (16) gebildete Matrix hat  $(e+1)$  Zeilen und  $e$  Kolonnen. Wir können die Zeilen so anordnen, daß die Glieder  $\sum s_{0v_\mu}$  die Hauptdiagonale der aus den  $e$  ersten Zeilen gebildeten Determinante besetzen. Die Exponenten der Relation (16a) stehen

dann in der letzten Zeile der Matrix. Die Summe der Glieder jeder Kolonne ist Null. Folglich kann eine Zeile, also etwa die letzte, fortgelassen werden.

Man erkennt dann, da ihrer Bedeutung nach  $s_{e\nu\mu} = s_{\nu\mu e}$  ist, daß die so entstehende  $e$ -reihige Determinante symmetrisch ist.

## § 2.

### Über Determinanten.

1. Wir beweisen einige Sätze über Determinanten, die folgende Gestalt haben:

$$(1) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} A_1 + \sum a_{1\nu} & -a_{12} \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & A_2 + \sum a_{2\nu} \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} \dots & & A_n + \sum a_{n\nu} \end{vmatrix}$$

Dabei sollen die  $A_\nu$ ,  $a_{\mu\nu} \geq 0$  sein.  $\sum a_{i\nu}$  bedeute  $\sum_{\nu=1}^n a_{i\nu}$  mit  $a_{ii} = 0$ .

Diejenigen Unterdeterminanten von  $\Delta_n$ , deren Hauptdiagonale nur aus Gliedern der Hauptdiagonalen von  $\Delta_n$  bestehen, bezeichnen wir als Hauptminoren. Die Hauptminoren sind wieder Determinanten von derselben Gestalt wie  $\Delta_n$ .

Sind die  $a_{i\lambda}$  von  $\Delta_n$ , die in der  $\lambda$ -,  $\mu$ -,  $\nu$ -, ...-ten Reihe stehen, bis auf die Glieder, die in dem zugehörigen Hauptminor stehen, sämtlich gleich Null, dann kann man  $\Delta_n$  als Produkt von zwei Hauptminoren darstellen.

Beispielsweise ist

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |2| \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Diese Hauptminoren kann man u. U. weiter zerlegen und man wird schließlich  $\Delta_n$  als ein Produkt von einer Anzahl von Hauptminoren  $\Delta_\nu$ , die sich nicht weiter auf diese Art zerlegen lassen, erhalten. Die  $\Delta_\nu$  wollen wir „irreduzibel“ nennen.

Wir nehmen jetzt an,  $\Delta_n$  sei irreduzibel.  $m$  Zeilen der Determinante bilden eine Matrix mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten. In ihr kommt genau ein  $m$ -reihiger Hauptminor vor.

Ersetzt man eine Kolonne des  $m$ -reihigen Hauptminors nacheinander durch die übrigen Kolonnen der Matrix, dann erhält man  $(n - m)$  Determinanten der Matrix, die eine Schar  $m$ -reihiger Nebenminoren genannt werden soll. Wir beweisen nun die Sätze:

Satz 1. *Der Hauptminor ist  $> 0$  ( $m < n$ ).*

Satz 2. *Jeder Nebenminor ist  $\leq 0$ .*

Satz 3. *Der absolute Betrag der Summe der  $(n - m)$  Nebenminoren einer Schar ist höchstens gleich dem Hauptminor.*

Zusatz. *Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn sämtliche  $A_\nu$ , die in der Matrix vorkommen, gleich Null sind.*

Diese Sätze stehen übrigens in engem Zusammenhang mit den Ergebnissen von Perron und Frobenius über Matrizen mit positiven Elementen<sup>9)</sup>.

Beweis. Die Sätze sind richtig für  $m = 1$ . Sie seien richtig für  $m$  Zeilen ( $m < n - 1$ ). Wir beweisen sie für  $(m + 1)$  Zeilen.

Es genügt offenbar, den Beweis für die letzten  $(m + 1)$  Zeilen durchzuführen. Wir können uns außerdem auf den Fall beschränken, daß die erste Kolonne des  $(m + 1)$ -reihigen Hauptminors durch die übrigen Kolonnen ersetzt wird. Denn durch Vertauschung der  $\nu$ -ten Zeile mit der  $\mu$ -ten Zeile und der  $\nu$ -ten Spalte mit der  $\mu$ -ten Spalte ( $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$ ) kann jede Zeile von  $A_n$  nach unten und jede Spalte nach rechts gebracht werden, ohne daß Struktur und Vorzeichen der Determinante und der Minoren verändert wird.

Wir betrachten also die Matrix

$$(2) \left( \begin{array}{cccc} -a_{n-m,1} & \dots & A_{n-m} + \sum a_{n-m,\nu} & -a_{n-m,n-m+1} \dots -a_{n-m,n} \\ -a_{n-m+1,1} & \dots & -a_{n-m+1,n-m} & A_{n-m+1} + \sum a_{n-m+1,\nu} \dots -a_{n-m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,n-m} & \dots -a_{n,n-m+1} \dots A_n + \sum a_{n,\nu} \end{array} \right)$$

Mit  $\Delta_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$  wollen wir den Minor bezeichnen, der aus der  $\lambda, \mu, \nu, \dots$ -ten Kolonne der angegebenen Matrix gebildet wird. Die  $m$ -reihigen Minoren werden nur den letzten  $m$  Zeilen der Matrix entnommen. Ferner soll der  $m$ -reihige Hauptminor mit  $\Delta_M$ , der  $(m + 1)$ -reihige Hauptminor mit  $\Delta_{M+1}$  bezeichnet werden.

Nach Voraussetzung ist nun:

$$(3a) \quad \Delta_M > 0,$$

$$(3b) \quad \begin{cases} \Delta_{\nu, n-m+2 \dots n} & \leq 0 \\ \Delta_{n-m+1, \nu, n-m+3 \dots n} & \leq 0 \\ \dots & \dots \\ \Delta_{n-m+1, \dots, n-1, \nu} & \leq 0 \end{cases} \quad (\nu = 1 \dots n - m),$$

$$(3c) \quad \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n-m} |\Delta_{\nu, n-m+2 \dots n}| & \leq \Delta_M, \\ \sum_{\nu=1}^{n-m} |\Delta_{n-m+1, \nu, n-m+3 \dots n}| & \leq \Delta_M \text{ usw.} \end{aligned}$$

<sup>9)</sup> Vgl. G. Frobenius, Berl. Ber. 1908, XXVI, S. 471—476.

Dabei gilt das Gleichheitszeichen in (3c) nur dann, wenn alle  $A_{\bar{\nu}}$  von  $\Delta_M$  gleich Null sind.

Behauptet wird:

$$(4a) \quad \Delta_{M+1} > 0,$$

$$(4b) \quad \Delta_{\bar{\nu}, n-m+1 \dots n} \leq 0 \quad (\bar{\nu} = 1 \dots n-m+1),$$

$$(4c) \quad \sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m+1} |\Delta_{\bar{\nu}, n-m+1 \dots n}| \leq \Delta_{M+1}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (4c) nur dann, wenn alle  $A_{\bar{\nu}}$  von  $\Delta_{M+1}$  gleich Null sind.

Zum Beweis entwickeln wir die  $(m+1)$ -reihigen Minoren nach der ersten Zeile der Matrix (2). Es ist dann:

$$(5) \quad \begin{aligned} \Delta_{M+1} &= (A_{n-m} + \sum a_{n-m, \bar{\nu}}) \cdot \Delta_M \\ &+ a_{n-m, n-m+1} \cdot \Delta_{n-m, n-m+2 \dots n} - a_{n-m, n-m+2} \cdot \Delta_{n-m, n-m+1, n-m+3 \dots n} \\ &\dots + \dots (-1)^n \cdot a_{n-m, n} \cdot \Delta_{n-m \dots n-1} \end{aligned}$$

oder

$$(5a) \quad \begin{aligned} \Delta_{M+1} &= (A_{n-m} + \sum a_{n-m, \bar{\nu}}) \cdot \Delta_M + a_{n-m, n-m+1} \cdot \Delta_{n-m, n-m+2 \dots n} \\ &+ a_{n-m, n-m+2} \cdot \Delta_{n-m+1, n-m, n-m+3 \dots n} \\ &+ \dots + a_{n-m, n} \cdot \Delta_{n-m+1 \dots n-1, n-m}. \end{aligned}$$

Andererseits ist:

$$(6) \quad \begin{aligned} \Delta_{\bar{\nu}, n-m+1 \dots n} &= -a_{n-m, \bar{\nu}} \cdot \Delta_M + a_{n-m, n-m+1} \cdot \Delta_{\bar{\nu}, n-m+2 \dots n} \\ &+ \dots + a_{n-m, n} \cdot \Delta_{n-m+1 \dots n-1, \bar{\nu}} \end{aligned}$$

und demnach

$$(7) \quad \begin{aligned} \sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m-1} \Delta_{\bar{\nu}, n-m+1 \dots n} &= - \sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m-1} a_{n-m, \bar{\nu}} \cdot \Delta_M \\ &+ a_{n-m, n-m+1} \cdot \sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m-1} \Delta_{\bar{\nu}, n-m+2 \dots n} + \dots + a_{n-m, n} \cdot \sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m-1} \Delta_{n-m+1 \dots n-1, \bar{\nu}}. \end{aligned}$$

Nach (3c) ist

$$(8) \quad \begin{aligned} - \left( \sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m-1} \Delta_{\bar{\nu}, n-m+2 \dots n} \right) &\leq \Delta_M + \Delta_{n-m, n-m+2 \dots n} \\ - \left( \sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m-1} \Delta_{n-m+1, \bar{\nu}, n-m+3 \dots n} \right) &\leq \Delta_M + \Delta_{n-m+1, n-m, n-m+3 \dots n} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Für (7) kann man folglich schreiben:

$$(9) \quad \begin{aligned} \sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m-1} \Delta_{\bar{\nu}, n-m+1 \dots n} &\geq - \sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m-1} a_{n-m, \bar{\nu}} \cdot \Delta_M \\ &+ a_{n-m, n-m+1} \{ -\Delta_M - \Delta_{n-m, n-m+2 \dots n} \} + \dots \\ &+ a_{n-m, n} \{ -\Delta_M - \Delta_{n-m+1 \dots n-1, n-m} \} \end{aligned}$$

oder, wenn man die Glieder mit  $\Delta_M$  zusammenfaßt:

$$(9a) \quad \sum_{\nu=1}^{n-m-1} \Delta_{\nu, n-m+1 \dots n} \geq - \sum_{\nu=1}^n a_{n-m, \nu} \cdot \Delta_M \\ - a_{n-m, n-m+1} \cdot \Delta_{n-m, n-m+2 \dots n} - \dots - a_{n-m, n} \cdot \Delta_{n-m+1 \dots n-1, n-m}.$$

Aus (5a) und (9a) folgt dann

$$(10) \quad \Delta_{M+1} + \sum_{\nu=1}^{n-m-1} \Delta_{\nu, n-m+1 \dots n} \geq A_{n-m} \cdot \Delta_M.$$

(4b) folgt aus (6), da nach (3) alle Summanden der Determinantenentwicklung höchstens gleich Null sind.

(4c) folgt aus (10). Wir diskutieren das Gleichheitszeichen. Ist  $A_{n-m} > 0$ , dann gilt in (4c) das Ungleichheitszeichen, da nach (3a)  $\Delta_M > 0$ . Ist  $A_{n-m} = 0$  und gibt es in  $\Delta_M$  mindestens ein  $A_\nu \neq 0$ , dann gilt in (3c) und folglich auch in (8) das Ungleichheitszeichen. Da wir  $\Delta_n$  als nicht reduzierbar voraussetzen, muß mindestens ein  $a_{n-m, \nu} > 0$  sein; es gilt also auch in (9) und folglich in (10) und (4c) das Ungleichheitszeichen. Sind schließlich alle  $A_\nu$  von  $\Delta_{M+1}$  gleich Null, dann steht wegen (3c) überall in den Determinantenentwicklungen das Gleichheitszeichen und folglich auch in (4c).

Aus (10) folgt in Verbindung mit (4b) natürlich  $\Delta_{M+1} \geq 0$ . (4a) selbst,  $\Delta_{M+1} > 0$ , wird weiter unten bewiesen.

Für  $m = n - 1$  folgt:

*Jede  $(n - 1)$ -reihige Determinante einer  $(n - 1)$ -reihigen Matrix ist ihrem absoluten Betrage nach höchstens gleich dem  $(n - 1)$ -reihigen Hauptminor, der in der Matrix vorkommt.* Daraus ergibt sich für die  $n$ -reihige Determinante die Abschätzung:

$$(11) \quad \Delta_n \geq A_1 \cdot \Delta_{n-1}$$

und aus der Diskussion des Gleichheitszeichens für (4c) folgt, falls in  $\Delta_{n-1}$  mindestens ein  $A_\nu \neq 0$  ist:

$$(12) \quad \Delta_n > A_1 \cdot \Delta_{n-1}.$$

Gleichung (11) gilt auch für reduzible Determinanten; Gleichung (12) gilt für reduzible Determinanten nur dann, wenn 1. in dem größten irreduziblen Hauptminor, der die erste Zeile enthält, mindestens ein  $A_\nu \neq 0$  ( $\nu \neq 1$ ) vorkommt; 2.  $\Delta_n$  in irreduzible Hauptminoren zerfällt, in denen mindestens je ein  $A_\nu \neq 0$  ist.

Wenn alle  $A_\nu = 0$  sind, ist natürlich

$$\Delta_n = 0.$$

Wenden wir diese Folgerungen auf  $\Delta_{M+1}$  an, indem wir  $\Delta_{M+1}$  in der Form der Determinante  $\Delta_n$  schreiben und

$$A_{n-m+\mu} + \sum_{\lambda=1}^{n-m-1} a_{n-m+\mu, \lambda} = \bar{A}_{n-m+\mu}$$

setzen, dann sehen wir, daß  $\Delta_{M+1}$  nur dann den Wert Null annehmen kann, wenn

$$\bar{A}_{n-m+\mu} = 0$$

ist. Da alle  $A_\nu, a_{\nu, \mu} \geq 0$  sind, folgt hieraus außer

$$A_{n-m+\mu} = 0$$

noch

$$a_{n-m+\mu, \lambda} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \lambda = 1, 2, \dots, m+1 \\ \mu = 1, 2, \dots, m+1 \end{array} \right),$$

also wäre  $\Delta_n$  reduzierbar, was gegen die Voraussetzung ist. Folglich ist

$$\Delta_{M+1} > 0 \quad (\text{siehe (4a)}).$$

2. Wir wenden die bewiesenen Ungleichungen auf Determinanten aus ganzen Zahlen an und zeigen

Satz 4. Wenn

$\alpha)$  in  $\Delta_n \sum A_\nu \geq 2$  ist;

$\beta)$  in sämtlichen Hauptminoren für die  $\bar{A}_\nu$  die gleichen Voraussetzungen gelten wie in  $\Delta_n$  für die  $A_\nu$ ; dann ist

$$(13) \quad \Delta_n \geq \sum_{\nu} A_\nu + \sum_{\mu, \nu}^{\mu > \nu} a_{\mu, \nu}.$$

Beweis. Wir können die Zeilen und die Spalten so umordnen, daß  $A_1 \neq 0$  ist; daß ferner, wenn wir die erste Zeile und die erste Spalte fortstreichen,  $\bar{A}_2 = A_2 + a_{21} \neq 0$  ist, usw. Ist  $\Delta_m$  eine reduzible Determinante mit  $\bar{A}_m = 1$ , so gibt es in dem größten irreduziblen Hauptminor, der die erste Zeile von  $\Delta_m$  enthält, ein  $A_j \neq 0$  ( $j \neq m$ ). Es ist dann nach (11) und (12)

$$\begin{aligned} \Delta_n &> \Delta_{n-1} \geq \Delta_{n-1} + 1 \quad \text{für } A_1 = 1, \\ \Delta_n &\geq A_1 \cdot \Delta_{n-1} \quad \text{für } A_1 > 1, \end{aligned}$$

falls  $\Delta_{n-1} > 1$  ist, also allgemein

$$\Delta_n \geq A_1 + \Delta_{n-1}.$$

Analog ist, falls  $\Delta_{n-2} > 1$  ist,

$$\Delta_{n-1} \geq \bar{A}_2 + \Delta_{n-2} = A_2 + a_{21} + \Delta_{n-2},$$

also

$$\Delta_n \geq A_1 + A_2 + a_{21} + \Delta_{n-2}$$

usf. Da nach Voraussetzung  $A_1 > 1$  ist, gilt also (13).

## § 3.

## Anwendung auf die Torsionszahlen der Knoten.

1. Die Matrix der Exponenten aus den Relationen (16) des § 1 ist eine Determinante von der Art (1) des § 2. Die  $a_{\lambda\mu} = s_{\lambda\mu}$  sind die Anzahlen der Überkreuzungen des Stranges  $\gamma_{\lambda\mu}$ , der die beiden Gebiete  $\Gamma_\lambda$  und  $\Gamma_\mu$  voneinander trennt. Die  $A_\nu$  sind die Anzahlen der Überkreuzungen auf den Strängen, die  $\Gamma_0$  begrenzen. — Die  $A_\nu$  ( $n - m < \nu \leq n$ ) für den Hauptminor aus den letzten  $m$  Zeilen sind die Anzahlen der Überkreuzungen, welche die Gebiete  $\Gamma_\mu$  ( $0 \leq \mu \leq n - m$ ) mit einem der Gebiete  $\Gamma_\nu$  gemeinsam haben.

*Liegen immer auf den Strängen, die einem geschlossenen Weg des Graphen  $\mathfrak{G}$  entsprechen, mindestens zwei Überkreuzungen, so sind also gewiß für die zugehörige Determinante die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt und es ist also die Anzahl der Überkreuzungen höchstens gleich dem Produkt aus den Torsionszahlen des Knotens in der Gruppe  $\mathfrak{S}_2$ .*

Liegt nun auf den Strängen, die einem geschlossenen Weg des Graphen  $\mathfrak{G}$  entsprechen, nur eine Überkreuzung, dann läßt sich diese Überkreuzung immer herausdrillen; die Projektion bleibt alternierend.

Seien nämlich  $\Gamma_{\alpha\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, r$ ) die Gebiete, die von einem geschlossenen Weg des Graphen  $\mathfrak{G}$  begrenzt werden (Fig. 6a). In  $E$  stößt dann ein Verzweigungsgebiet mit sich selbst zusammen. Wir drehen den Teil des Knotens, der  $\Gamma_{\alpha\nu}$  entspricht, um  $180^\circ$  so, daß die Verdrillung bei  $E$  verschwindet (Fig. 6b). In den Gebieten, die nicht zu  $\Gamma_{\alpha\nu}$  gehören, hat sich nichts geändert. In  $\Gamma_{\alpha\nu}$  sind wegen

der Drehung die Überkreuzungen in Unterkreuzungen verwandelt worden; der Knoten liegt also hier wieder alternierend. Das gleiche gilt für die  $E$  benachbarten Doppelpunkte. Der Knoten liegt also wieder alternierend. Die Gesamtzahl der Überkreuzungen der Knotenprojektion hat sich dabei um eins verringert.

— Diese Deformation der Knotenprojektion ähnelt übrigens der auf S. 147 dieser Abhandlung angegebenen Deformation, wo der Fall ausgeschlossen wird, daß ein Strang je ein Gebiet  $\Gamma$  zweimal begrenzt. Nach endlich vielen Schritten müssen wir also zu einer Knoten-

projektion gelangen, die die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt, oder zum Kreis.

*Insbesondere ist also die Minimalzahl  $m$  der Überkreuzungen eines alternierenden Knotens höchstens gleich dem Produkt der Torsionszahlen.*

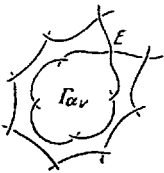


Fig. 6a.

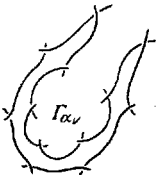


Fig. 6b.



Der Kreis hat die Torsionszahl Eins. *Soll also eine vorgegebene alternierende Projektion die Projektion eines Kreises sein, dann müssen sich in endlich vielen Schritten mit Hilfe des angegebenen Verfahrens die Überkreuzungen herausdrillen lassen.*

*In analoger Weise läßt sich entscheiden, ob eine vorgegebene alternierende Projektion die Projektion einer Kleeblattschlinge ist. Denn das Produkt der Torsionszahlen hat für dieselbe den Wert 3. Die Minimalzahl der Überkreuzungen muß also kleiner oder gleich 3, also 3 sein; und ein Knoten mit drei Überkreuzungen ist eine Kleeblattschlinge.*

2. Für die nichtalternierenden Knoten erhält man nach (15a) des § 1 eine Determinante von der Form (1) des § 2, wenn man zuläßt, daß die  $a_{\lambda\mu}$  und die  $A_{\nu}$  auch negative Werte annehmen dürfen. Hier gelten die Abschätzungsformeln des § 2 nicht mehr. Die Determinante kann beliebige Werte annehmen.

Nehmen wir beispielsweise einen nichtalternierenden Brezelknoten mit zwei Gebieten und  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $C$  Überkreuzungen auf den einzelnen Strängen (Fig. 7). Die Torsionszahl ist

$$t = \begin{vmatrix} A+B & -B \\ -B & B-C \end{vmatrix} = AB - C(A+B).$$

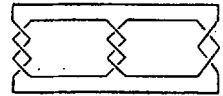


Fig. 7.

Für  $A=B=3$ ,  $C=2$  ist  $t=3$ . Von diesem Knoten gibt es übrigens keine alternierende Projektion. Gäbe es nämlich eine alternierende Projektion, so könnten wir sie mit Hilfe der von uns angegebenen Deformation in eine alternierende Projektion mit höchstens drei Überkreuzungen überführen. Der Knoten müßte also mit der Kleeblattschlinge oder dem Kreis identisch sein. Das ist aber nicht der Fall, denn seine Gruppe ist von der Gruppe der Kleeblattschlinge bzw. des Kreises verschieden.

(Eingegangen am 3. 5. 1929.)