Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera, conduttore, isotropo e omogeneo.

Von

Mauro Picone in Neapel.

Il problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera (cioè occupante tutto lo spazio) conduttore, isotropo e omogeneo si pone al modo seguente:

Nota la temperatura $U(x, y, z)$, al tempo $t = 0$, in ogni punto $M(x, y, z)$ del mezzo, calcolarne la temperatura $u(x, y, z, t)$ in ogni punto $M(x, y, z)$ e per ogni istante successivo t.

Scelte opportune unità di misura si dimostra che la u è, per $t > 0$, soluzione della seguente equazione lineare alle derivate parziali del second' ordine, del tipo parabolico:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \tag{1}$$

e pertanto la funzione incognita u deve verificare tale equazione ed inoltre la condizione iniziale

$$u(x, y, z, 0) = U(x, y, z). \tag{2}$$

Posto, nell' ipotesi che $U(x, y, z)$ sia continua e limitata,

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{8(\pi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{3}$$

è notissimo ed è facile verificare che tale u soddisfa le equazioni (1) e (2).

Ora si può domandare: è lecito, dopo ciò, asserire senz' altro — come si fa d' ordinario in Fisica-matematica[1]) — che il posto problema della propagazione del calore è risoluto dalla formola (3)?

---

[1]) Cfr. per es. il recentissimo articolo di R. Fürth, Wärmeleitung und Diffusion (pp. 200—203) nel libro di Ph. Franck, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, zweiter physikalischer Teil (Braunschweig: Vieweg & Sohn 1927).

Affermativamente si potrebbe rispondere se si fosse stabilito che le equazioni (1) e (2) determinano univocamente ogni funzione u che le soddisfi. Ma, che io mi sappia, non si è mai pensato di stabilire ciò con l'appoggio di eventuali ulteriori circostanze fisiche che siano accettabili a priori. Ovviamente, tale non è, per esempio, quella dell'olomorfia della $u(x, y, z, t)$ in ogni punto $(x, y, z, 0)$. In tale circostanza, *di significato puramente analitico*, l'assegnata funzione $U(x, y, z)$ deve pur essa riuscire funzione olomorfa in ogni punto dello spazio, ed allora l'unica possibile soluzione delle (1) e (2), olomorfa in ogni punto $(x, y, z, 0)$, è fornita — com'è noto e subito visto — dalla serie

$$u = U + \frac{t}{1!}\Delta_2 U + \frac{t^2}{2!}\Delta_4 U + \ldots + \frac{t^n}{n!}\Delta_{2n} U + \ldots.$$

Si potrebbe pensare che, restringendoci a considerare distribuzioni iniziali della temperatura rappresentate da funzioni $U(x, y, z)$ olomorfe in ogni punto dello spazio, le soluzioni $u(x, y, z, t)$ delle (1) e (2) debbano riuscire di conseguenza esse pure funzioni olomorfe delle x, y, z, t in ogni punto $(x, y, z, 0)$, ciò che porterebbe al teorema d'unicità in tale caso particolare importante. Ma non è così. Vi sono esempi, come è noto, di soluzioni della (1) che, per $t = 0$, si riducono a funzioni olomorfe delle tre variabili x, y, z e che, non ostante, non sono funzioni delle quattro variabili x, y, z, t olomorfe in ogni punto $(x, y, z, 0)$.

Nel caso particolare che si possa ritenere la u dipendente soltanto da una sola coordinata del punto M, il Goursat, nel suo *Cours d'Analyse mathématique*[2]), non ha mancato di esaminare con ogni cura la questione. Fatta l'ipotesi che la u dipenda dalla sola x, essa deve verificare le equazioni

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad u(x, 0) = U(x);$$

ebbene, Goursat dimostra che, supposta la funzione $U(x)$ continua e limitata, le (4) determinano univocamente la $u(x, t)$, se si impongono a questa le ulteriori condizioni seguenti:

A. *la funzione $u(x, t)$ è limitata pur essa al variare di x e di t;*

B. *la derivata parziale $u_x(x, t)$ della u deve esser tale che, comunque si scelga la costante positiva k, il prodotto*

$$u_x(x, t)\, e^{-kx^2}$$

riesca funzione di x e di t limitata al variare di x e di t.

---

[2]) E. Goursat, Cours d'Analyse mathématique (Paris: Gauthier-Villars 1915), t. III, pp. 301 e 313.

Ora non mi sembra che tali ulteriori condizioni siano entrambe fisicamente assumibili a priori. La prima lo è certamente, anzi, sol che si rifletta un istante, apparirà fisicamente intuitivo che, detti l e L gli estremi inferiore e superiore di $U(x)$, i medesimi estremi dovrà ammettere la $u(x, t)$ al variare di x e di t. Ma non così può dirsi della seconda condizione: per esempio, non si capisce fisicamente perchè, per ogni fissato valore $\bar{x}$ di x, la derivata parziale

$$u_x(\bar{x}, t)$$

della temperatura debba mantenersi limitata al crescere indefinito di t.

In questa nota (di cui un sunto ho comunicato nel recente Congresso Internazionale dei Matematici a Bologna) io mi propongo di dimostrare che ulteriore unica condizione che occorre soltanto aggiungere, dipenda la u da quante si vogliano coordinate del punto M, per potere asserire che essa riesce univocamente determinata dalle equazioni (1) e (2), è precisamente la A; cioè, nel caso nostro più generale, la seguente:

A. *Supposta la $U(x, y, z)$ funzione limitata, tale deve risultare anche la $u(x, y, z, t)$ al variare del punto (x, y, z) nello spazio e al crescere indefinito di t.*

Il risultato è contenuto, come caso particolarissimo, in una mia recente memoria dal titolo: *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del 2° ordine*, insignita del premio Tenore dall'Accademia Pontaniana di Napoli (nella seduta del 10 giugno 1928). Ma non è agevole estrarre detto risultato dalla massa dei teoremi di quella memoria, e perciò con questa nota mi propongo di ritrovare direttamente, con chiara e rapida coordinazione, restringendomi a considerare l'equazione particolare seguente del tipo parabolico

$$\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^{n} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} - \frac{\partial u}{\partial t} + c\,u = f, \tag{5}$$

nelle $n+1$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, nella quale rientra la (1), quella successione di teoremi che più direttamente conduca, come caso particolare, al teorema di unicità del quale sopra ho discorso.

§ 1.

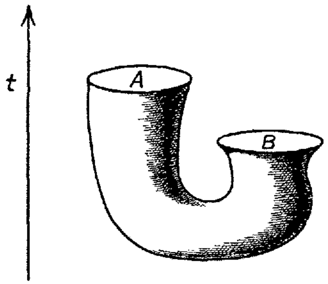
Proprietà fondamentali delle soluzioni.

Designeremo con $S_{(n+1)}$ lo spazio euclideo a $n+1$ dimensioni del punto P di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, con D un qualunque dominio internamente connesso di $S_{(n+1)}$, con FD la frontiera di D. Della frontiera di D considereremo qui, in modo speciale, quella parte, che indicheremo con $F_{-t}D$, totalità dei punti verificanti le seguenti proprietà:

1ª. In ogni punto di $F_{-t}D$ esistono la normale alla FD e un intorno circolare, su FD, tutto costituito di punti di $F_{-t}D$;

2ª. la normale alla FD in ogni punto di $F_{-t}D$, volta verso l'interno di D, ha sempre la direzione dell'asse t e verso contrario.

Per esempio, la frontiera di una sfera dello spazio (x, y, t) non è dotata di parte F_{-t}; la frontiera di un parallelepipedo rettangolare dello spazio (x, y, t), con gli spigoli paralleli agli assi coordinati, ha per parte F_{-t} la totalità dei punti interni alla faccia più alta; la frontiera del dominio limitato dalle superficie di due cubi concentrici di lato diverso ha per parte F_{-t} la totalità dei punti interni alla faccia più alta del cubo di lato maggiore e alla faccia più bassa del cubo di lato minore. Nella figura qui accanto la parte F_{-t} della frontiera del dominio D, da essa rappresentato, è costituita dai punti interni ai dominii piani A e B.



Nel dominio D siano assegnate le funzioni reali, finite e continue

$$a_{hk}(P),\ b_h(P),\ c(P),\ f(P) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

del punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, essendo $a_{hk} \equiv a_{kh}$ e la forma quadratica nelle λ

$$\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(P)\lambda_h\lambda_k \tag{6}$$

conservandosi, in ogni punto di D, definita o semidefinita positiva. Una funzione reale $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ sarà detta *soluzione* in D dell'equazione alle derivate parziali del second'ordine totalmente parabolica:

$$E[u] \equiv \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^{n} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} - \frac{\partial u}{\partial t} + cu = f \tag{5}$$

se: 1° è continua in D, 2° nei punti interni a D e sulla parte $F_{-t}D$ della FD è dotata delle derivate parziali che compaiono nella (5) finite e continue e verificanti, con la u, l'equazione (5).

Ricordiamo anche il seguente teorema di Moutard:

Se le forme quadratiche, a coefficienti reali:

$$F = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\lambda_h\lambda_k, \qquad \Phi = \sum_{h,k=1}^{n} \alpha_{hk}\lambda_h\lambda_k,$$

sono semidefinite o definite, la somma

$$\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\alpha_{hk}$$

riesce non negativa o non positiva, secondochè le due forme hanno, quando non sono nulle, lo stesso segno o segno opposto. Se, più particolarmente, le due forme sono entrambe definite, la somma indicata è sempre diversa da zero.

E siamo ora in grado di conseguire rapidamente una successione di teoremi che stabiliscono notevoli proprietà per le soluzioni dell'equazione (5).

I — *Il dominio D sia limitato. Se, ovunque in D, è $f(P) \leqq 0$, ogni soluzione della (5) sempre positiva o nulla su $FD - F_{-t}D$ tale si conserva in tutto D; se, ovunque in D, è $f(P) \geqq 0$, ogni soluzione della (5) sempre negativa o nulla su $FD - F_{-t}D$ tale si conserva in tutto D.*

Diciamo M un tale numero da risultare, in tutto D,

$$M - c(P) > 0,$$

e poniamo nella (5)

$$u = ve^{Mt};$$

si ha per v l'equazione:

$$e^{Mt}\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\frac{\partial^2 v}{\partial x_h \partial x_k} + e^{Mt}\sum_{h=1}^{n} b_h \frac{\partial v}{\partial x_h} - e^{Mt}\frac{\partial v}{\partial t} - e^{Mt}(M-c)v = f. \tag{7}$$

Sia, ovunque in D, $f \leqq 0$ e $u \geqq 0$ su $FD - F_{-t}D$. Risulterà anche $v \geqq 0$ su $FD - F_{-t}D$, e se dimostriamo che, in tutto D, è $v \geqq 0$ ciò seguirà anche per u. Se non fosse, sempre in D, $v \geqq 0$, si verificherebbe per v un minimo negativo in un punto P_0 di D, punto che potrà essere situato o nell'interno di D o su $F_{-t}D$. In entrambi i casi si avrebbe, per il teorema di Moutard,

$$\left[\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\frac{\partial^2 v}{\partial x_h \partial x_k}\right]_{P=P_0} \geqq 0, \tag{8}$$

e, nel primo caso,

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x_h}\right]_{P=P_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]_{P=P_0} = 0, \quad v(P_0) < 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

e nel secondo

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x_h}\right]_{P=P_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]_{P=P_0} \leqq 0, \quad v(P_0) < 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

dunque, il primo membro della (7) risulterebbe sempre positivo, ciò che è in contradizione con la $f(P_0) \leqq 0$.

Sia, ovunque in D, $f \geqq 0$ e $u \leqq 0$ su $FD - F_{-t}D$. Introdotta la funzione v già considerata, l'ipotesi che questa abbia un massimo positivo in D porta alle (8) e (9) oppure alle (8) e (10) cambiate di segno, ciò che è in contraddizione con la $f(P_0) \geqq 0$.

Ne segue:

II — *Una soluzione dell'equazione omogenea* $E[u] = 0$, *identicamente nulla su* $FD - F_{-t}D$, *tale è in tutto il domino* D, *supposto limitato.*

III — *Comunque si assegni* f *in* D, *supposto limitato, una soluzione dell'equazione* (5) *è completamente determinata in* D, *quando se ne conoscono i valori su* $FD - F_{-t}D$.

Utilissimo ci sarà in seguito il seguente teorema:

IV — *Il dominio* D *sia limitato ed inoltre in* D *sia sempre* $c(P) \leqq 0$.

Ogni soluzione dell'equazione omogenea $E[u] = 0$, *consegue su* $FD - F_{-t}D$ *il massimo del suo modulo in* D. *Se poi* $c(P)$ *è identicamente nulla in* D, *se cioè l'equazione omogenea* $E[u] = 0$ *si riduce alla seguente*

$$\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^{n} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{11}$$

ogni sua soluzione consegue su $FD - F_{-t}D$ *tanto il massimo che il minimo suo valore in* D.

Diciamo, invero, N il massimo modulo di u su $FD - F_{-t}D$. Si ha

$$E[u + N] = Nc \leqq 0, \qquad E[u - N] = -Nc \geqq 0,$$

e poichè su $FD - F_{-t}D$ riesce sempre $u + N \geqq 0$, $u - N \leqq 0$, tali limitazioni dovranno (teor. I) sussistere in tutto D, si avrà cioè sempre ivi $|u| \leqq N$.

Se poi in D è $c \equiv 0$, detti N' e N'', rispettivamente, il minimo e il massimo valore di u su $FD - F_{-t}D$, si ha

$$E[u - N'] = 0, \qquad E[N'' - u] = 0$$

e poichè su $FD - F_{-t}D$, riesce sempre $u - N' \geqq 0$, $N'' - u \geqq 0$, tali limitazioni dovranno (teor. I) sussistere in tutto D.

§ 2.

Caso dei dominii illimitati.

Di grande interesse, specialmente nei riguardi dell'applicazione ai problemi di propagazione e di diffusione, è la considerazione dei problemi al contorno per l'equazione (5) nel caso che il dominio D non sia limitato. I risultati ottenuti nel paragrafo precedente consentono di conseguire assai facilmente teoremi notevoli. Un primo teorema è il seguente:

V — *Il dominio D sia illimitato ed inoltre in D sia sempre $c(P) \leqq 0$.*

Le funzioni reali e continue $\varphi(P)$ e $\Phi(P)$ del punto P siano assegnate e definite, la prima, su $FD - F_{-t}D$ e la seconda in D e, quando $FD - F_{-t}D$ sia illimitata, si abbia

$$\lim_{P\to\infty} [\varphi(P) - \Phi(P)] (\text{su } FD - F_{-t}D) = 0.$$

Allora, una soluzione u dell' equazione (5) riesce completamente determinata in D quando ad essa si prescriva di verificare le condizioni:

$$(12) \qquad \begin{cases} u(P) \text{ su } FD - F_{-t}D = \varphi(P) \\ \lim\limits_{P\to\infty} [u(P) - \Phi(P)] = 0. \end{cases}$$

Il teorema sarà dimostrato se faremo vedere che una soluzione u dell' equazione omogenea $E[u] = 0$ che verifichi le condizioni (12) per $\varphi(P) \equiv \Phi(P) \equiv 0$, riesce identicamente nulla in D. Sia Q un punto arbitrariamente fissato nell' interno di D o su $F_{-t}D$ e diciamo ε un numero positivo arbitrariamente scelto e D_R quella parte di D, contenuta nel dominio quadrato col centro nell' origine O di $S_{(n+1)}$ e di semidimensione R talmente grande che contenga Q nell' interno e si abbia inoltre, per ogni punto P di D,

$$|u(P)| < \varepsilon, \text{ quando una delle } |x_1|,\ |x_2|, \ldots, |x_n|, |t| \text{ è } \geqq R.$$

Per questo dominio limitato D_R sono verificate tutte le ipotesi del teorema IV, ed inoltre su $FD_R - F_{-t}D_R$, si ha sempre $|u(P)| < \varepsilon$; ne segue, in base al teorema ora citato, $|u(Q)| < \varepsilon$.

Notiamo l' interessante corollario del quale qui non faremo però uso:

VI — *Il dominio D sia, in particolare, il semispazio $t \leqq T$, ed inoltre in D sia sempre $c(P) \leqq 0$. Comunque si assegni in D la funzione continua $\Phi(P)$, una soluzione dell' equazione (5) riesce completamente determinata in D quando ad essa si prescriva la condizione*

$$\lim_{P\to\infty} [u(P) - \Phi(P)] = 0.$$

In particolare, dunque, ogni soluzione dell' equazione

$$(11) \qquad \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^{n} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

che non sia una costante nel semispazio D, non può mai, nel mentre che il punto P si allontana ivi a distanza infinita, tendere ad un limite determinato e finito.

L'aggiunta di ulteriori ipotesi sul dominio illimitato D e sui coefficienti della (5), consente di assicurare l'unicità della soluzione di (5) verificante condizioni assai meno restrittive delle (12). Per ottenere enunciati brevi introdurremo la notazione seguente. Se per l'insieme illimitato A, di punti dello spazio $S_{(n+1)}$, si ha $\max t = +\infty$, se cioè A si estende a distanza infinita nella direzione e nel verso dell'asse t, per ogni assegnata quantità T denoteremo con $A^{(T)}$ quella parte di A luogo dei punti la cui t non è superiore a T. Evidentemente $A^{(T)}$ esiste sempre se T è abbastanza grande. Ciò posto, si può enunciare il teorema:

VII — *Il dominio D sia illimitato e si estenda all'infinito nella direzione e nel verso dell'asse t, ed inoltre in D sia sempre $c(P) \leqq 0$.*

Le funzioni reali e continue $\varphi(P)$ e $\Phi(P)$ siano assegnate e definite, la prima, su $FD - F_{-t}D$ e la seconda in D, e, quando $FD - F_{-t}D$ sia illimitata, si abbia, per ogni T,

$$\lim_{P \to \infty} [\varphi(P) - \Phi(P)] \, [\mathrm{su}\, (FD - F_{-t}D)^{(T)}] = 0 . \tag{13}$$

Allora, una soluzione u della (5) risulta completamente determinata quando ad essa si prescriva di verificare, per ogni T, le condizioni

$$\begin{cases} u(P) \, \mathrm{su}\, FD - F_{-t}D = \varphi(P), \\ \lim\limits_{P \to \infty} [u(P) - \Phi(P)] \, (\mathrm{su}\, D^{(T)}) = 0 . \end{cases} \tag{14}$$

Ed invero, essendo la u, in virtù del teor. V, determinata in ogni $D^{(T)}$, comunque grande sia T, essa risulterà determinata in tutto D.

Può darsi che, pur estendendosi illimitamente il dominio D nella direzione e nel verso dell'asse t, riesca, per ogni T, sempre limitato il dominio $D^{(T)}$; perdono allora significato la (13) e la seconda delle (14), ed il teorema sussiste, naturalmente, sopprimendo tali condizioni. Anzi in tal caso, come assicura il teor. III, si può anche sopprimere la limitazione $c(P) \leqq 0$ per il coefficiente $c(P)$.

E siamo ora in grado di stabilire il teorema finale che contiene come caso particolare il teorema di unicità per le soluzioni dell'equazione (1) soggette alle condizioni (2) e A. Esso si enuncia al modo seguente:

VIII — *Il dominio D sia illimitato e si estenda a distanza infinita nella direzione e nel verso dell'asse t. Se, per ogni T, è sempre possibile costruire in $D^{(T)}$, una funzione $w(T, P)$, ivi sempre positiva, continua con le derivate $\frac{\partial^2 w}{\partial x_h \partial x_k}$, $\frac{\partial w}{\partial x_h}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ e per la quale riesca*

$$E[w(T, P)] \leqq 0 \quad \text{in} \quad D^{(T)}, \tag{15}$$

supposto che, quando $FD - F_{-t}D$, sia illimitata, si abbia per ogni T,

$$(16) \qquad \lim_{P\to\infty} \frac{\varphi(P) - \Phi(P)}{w(T, P)} [\text{su}\,(FD - F_{-t}D)^{(T)}] = 0\,,$$

una soluzione u della (5) risulta completamente determinata quando ad essa si prescriva di verificare, per ogni T, le condizioni:

$$(17) \qquad \begin{cases} u(P)\,\text{su}\,FD - F_{-t}D = \varphi(P)\,, \\ \lim\limits_{P\to\infty} \dfrac{u(P) - \Phi(P)}{w(T, P)} (\text{su}\,D^{(T)}) = 0\,. \end{cases}$$

Ed invero, dico che una soluzione u dell'equazione omogenea $E[u] = 0$ che verifichi le (17), suppostovi $\varphi(P) \equiv \Phi(P) \equiv 0$, riesce identicamente nulla in D. La funzione

$$v(P) = \frac{u(P)}{w(T, P)},$$

è soluzione dell'equazione

$$\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \frac{\partial^2 v}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^{n} \left(b_h + \frac{2}{w} \sum_{k=1}^{n} a_{hk} \frac{\partial w}{\partial x_h} \right) \frac{\partial v}{\partial x_h} - \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{E[w]}{w} v = 0\,,$$

alla quale, in forza della (15) e per essere sempre $w > 0$, si applica il teorema precedente. Ma $v(P)$ è identicamente nulla su $FD - F_{-t}D$ ed è infinitesima all'infinito su $D^{(T)}$, e quindi $v(P) \equiv 0$, e pertanto $u(P) \equiv 0$.

§ 3.

Applicazione al problema della propagazione del calore.

Consideriamo ora il caso particolare dell'equazione:

$$(18) \qquad E[u] \equiv \Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0\,,$$

la quale, per $n = 1, 2, 3$, si riduce all'equazione della propagazione del calore, la temperatura dipendendo, rispettivamente, da una, da due, da tutte le coordinate del punto del mezzo a cui ci si riferisce. Corollario immediato del teor. VIII è il seguente:

IX — *Comunque si definisca nell'iperpiano $t = 0$ di $S_{(n+1)}$ una funzione continua $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se esiste una costante reale α per la quale il prodotto*

$$(19) \qquad U(x_1, x_2, \dots, x_n)\, e^{-\alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}$$

riesce limitato nel detto iperpiano, nel dominio illimitato D in cui consiste il semispazio di $S_{(n+1)}$ luogo dei punti per cui $t \geqq 0$, non può esistere più di una soluzione $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ della (18) che soddisfi alla con-

dizione iniziale

$$(20)\qquad u(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = U(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

e per la quale, per ogni quantità positiva T, al variare del punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nell' iperpiano $t = 0$ e di t nell' intervallo $(0, T)$, il prodotto

$$(21)\qquad u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\, e^{-\alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}$$

risulti limitato.

È invero, per β costante, soluzione della (18) ogni funzione

$$w = X(x_1, x_2, \dots, x_n)\, e^{\beta t}$$

per la quale X sia soluzione dell' equazione

$$(22)\qquad \Delta_2 X - \beta X = 0\,.$$

Posto $\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ e detta $J_\mu(\varrho)$ la funzione di Bessel d' ordine μ, è ben noto[3]) che è soluzione della (22) la funzione

$$X_n(\beta\varrho) = (\beta\varrho)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\beta\varrho i) = (n-2)!!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta\varrho)^{2k}}{(2k)!!\,(n+2k-2)!!},$$

ove, designando N un numero naturale, con $N!!$ intendiamo indicare il prodotto di tutti i numeri naturali non superiori a N, aventi la stessa parità di N. Fissato per β un qualunque valore positivo si ha:

$$X_n(0) = 1, \qquad X_n(\beta\varrho) > 1, \quad \text{per } \varrho \neq 0,$$

$$\lim_{\varrho\to\infty} X_n(\beta\varrho) = \infty,$$

$$X_1(\beta\varrho) = \cosh(\beta\varrho),$$

$$X_2(\beta\varrho) > \frac{\operatorname{senh}(\beta\varrho)}{\beta\varrho}, \quad \text{per } \varrho > 0,$$

$$X_3(\beta\varrho) = \frac{\operatorname{senh}(\beta\varrho)}{\beta\varrho}, \quad \text{per } \varrho > 0,$$

e, per $n > 3$, quando n è pari $= 2\nu$,

$$X_{2\nu}(\beta\varrho) > \frac{(2\nu-2)!!}{(\beta\varrho)^{2\nu-2}}\left(\cosh(\beta\varrho) - 1 - \frac{(\beta\varrho)^2}{2!} - \dots - \frac{(\beta\varrho)^{2\nu-4}}{(2\nu-4)!}\right), \text{ per } \varrho > 0,$$

quando n è dispari $= 2\nu + 1$,

$$X_{2\nu+1}(\beta\varrho) > \frac{(2\nu-1)!!}{(\beta\varrho)^{2\nu-1}}\left(\operatorname{senh}(\beta\varrho) - \beta\varrho - \frac{(\beta\varrho)^3}{3!} - \dots - \frac{(\beta\varrho)^{2\nu-3}}{(2\nu-3)!}\right),$$
$$\text{per } \varrho > 0\,.$$

---

[3]) Cfr. per esempio, la mia nota: Sulle funzioni metaarmoniche, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei (6) **5** (1° Sem. 1927), pp. 89–95.

Possiamo dunque dire che $X_n(\beta\varrho)$, al tendere di ϱ all'infinito, è infinitamente grande almeno dell'ordine di $e^{\beta\varrho}$.

La frontiera del dominio D, che stiamo attualmente considerando, manca della parte F_{-t} e consiste nell'iperpiano $t=0$. La parte $D^{(T)}$ di D consiste nell'iperstrato $0 \leqq t \leqq T$. La soluzione

$$w = X_n(\beta\varrho)\, e^{\beta t}$$

della (18) verifica la (15) del teorema VIII, e pertanto tale teorema ci consente di dire che, risultando

$$\lim_{\varrho \to \infty} \frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(\beta\varrho)} = 0, \tag{23}$$

nel semispazio D non può esistere più di una soluzione della (18) verificante la condizione iniziale (20) e, per ogni T, l'ulteriore

$$\lim_{P \to \infty} \frac{u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)}{X_n(\beta\varrho)\, e^{\beta t}} \,[\text{su}\, D^{(T)}] = 0. \tag{24}$$

Ma, in virtù delle ipotesi del teorema, esistono due quantità H e $K(T)$ per le quali riesce

$$\frac{|U(x_1, x_2, \ldots, x_n)|}{X_n(\beta\varrho)} < \frac{H e^{\alpha\varrho}}{X_n(\beta\varrho)}, \quad \text{nell'iperpiano } t = 0,$$

$$\frac{|u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)|}{X_n(\beta\varrho)\, e^{\beta t}} < \frac{K(T)\, e^{\alpha\varrho}}{X_n(\beta\varrho)} \,[\text{su}\, D^{(T)}],$$

e quindi, essendo la $X_n(\beta\varrho)$, per $\varrho \to \infty$, infinitamente grande d'ordine almeno eguale a quello di $e^{\beta\varrho}$, se fissiamo per β un qualsiasi valore positivo maggiore della quantità α, possiamo dire che dal verificarsi delle ipotesi del teorema segue il verificarsi delle (23) e (24), per il detto valore di β, donde l'unicità della u.

Col teorema IX è dimostrato assai più di quanto occorra per poter dedurre il teorema d'unicità per il problema della propagazione del calore con l'ulteriore unica condizione A, poichè se nei prodotti (19) e (21) facciamo $\alpha = 0$ otteniamo per la $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ l'ulteriore unica condizione — meno restrittiva della A — di conservarsi, per ogni T, limitata in $D^{(T)}$, non venendo dunque escluso che l'estremo superiori di u in $D^{(T)}$, supposto finito, possa comunque crescere al crescere di T.

Nelle ipotesi generali del teor. IX è facile poi verificare che la nota formola

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$

$$= \frac{1}{2^n (\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, e^{-\frac{1}{4t}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\xi_k)^2}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n, \tag{25}$$

fornisce la richiesta soluzione della (18). Per esempio, per $n = 3$, se

$$|U(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqq He^{\alpha\varrho},$$

si trova

$$|u e^{-\alpha\varrho}| \leqq \frac{4}{\sqrt{\pi}} H \int_0^{+\infty} e^{2\alpha s\sqrt{T}} e^{-s^2} s^2 \, ds, \quad \text{in } D^{(T)}$$

Se, supposto $\alpha = 0$, è ovunque $l \leqq U \leqq L$, dalla (25) si ricava $l \leqq u \leqq L$, donde la conferma della circostanza fisicamente intuitiva: Se la temperatura iniziale di un mezzo privo di frontiera, conduttore, isotropo e omogeneo, è in ogni punto compresa fra le due costanti l e L, fra tali costanti sarà sempre compresa al crescere indefinito del tempo.

Torino, li 25 settembre 1928.

(Eingegangen am 1. 10. 1928.)