# Die permanenten Wellen in ringförmigen Kanälen.

Von

Harald Geppert in Gießen, z. Zt. Rom.[1])

---

Das Problem der permanenten Wellen, d. h. solcher Wellen, bei denen sich die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ohne Änderung der Form fortbewegt, ist in letzter Zeit vielfach behandelt worden. Den Fall eines geradlinig gestreckten Kanals hat Herr Levi-Civita in einer Reihe von Arbeiten untersucht[2]) und neuerdings seine strenge Lösung gegeben[3]). In der Praxis ist man jedoch, um Wellen des genannten Typus zu studieren, gezwungen, die geradlinigen Kanäle durch ringförmige von großem Krümmungsradius zu ersetzen. Auf Veranlassung von Herrn Levi-Civita untersuchen wir daher im folgenden den theoretisch und praktisch wichtigen Fall der kreisringförmigen Kanäle.

Ausgehend von dem allgemeinsten Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential werden wir durch die Annahme, daß es sich um relativ niedrige und schnelle Wellen handelt, eine sinusförmige Oberflächenwelle herausschälen können, wobei wir auf ein neues Eigenwertproblem stoßen. Wir verfolgen die Entartung dieser Wellen bei schwach gekrümmten Kanälen; sie geht in zwei Richtungen vor sich: einmal entspringen Airysche Wellen, die in der *Längsrichtung* des Kanals fortschreiten, und für die die Airysche Relation bis auf eine Korrektion zweiter Ordnung erfüllt ist, andererseits Wellen, die in der *Querrichtung* laufen und sich als Superposition zweier entgegengesetzt laufender Airy-Wellen darstellen lassen. Unsere Wellen sind an der Oberfläche von einem leicht angebbaren Massentransport begleitet, wodurch ein bekanntes Resultat von Herrn Levi-Civita verallgemeinert wird[4]).

---

[1]) Fellow of the International Education Board.

[2]) Rendiconti della R. Acc. dei Lincei **16**, 2, 1907, S. 776; Fragen der klassischen und relativistischen Mechanik, Berlin 1924, S. 26.

[3]) Math. Annalen **93** (1925), S. 264.

[4]) Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, Berlin 1923, S. 85.

## § 1.

## Allgemeine Lösung.

Es sei ein kreisförmiger Kanal vorgelegt, der Radius der äußeren Wand werde mit $R_1$, der der inneren Wand mit $R_2$ bezeichnet, so daß

$$R_2 < R_1$$

ist. Dieser Kanal sei mit einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte 1 angefüllt, deren Tiefe im Ruhezustand gleich $h$ sei. Durch irgendeine äußere Beeinflussung wird die Flüssigkeit in Wellenbewegung versetzt; wir wollen hier speziell die *permanenten* Wellen studieren, die dadurch ausgezeichnet sind, daß sich *die freie Oberfläche ohne Änderung der Form mit einer konstanten Geschwindigkeit c fortbewegt*, die sehr groß ist gegenüber der mittleren Geschwindigkeit der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, die durch ihre Schwingungen eben jene Wellenbewegung hervorrufen. Es sei $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit, mit der die freie Oberfläche $\sigma$ in unserem Kanal läuft; wir führen zwei Koordinatensysteme ein:

1. ein festes System, dessen $xy$-Ebene in die Oberfläche der *ruhenden* Flüssigkeit fällt und dessen Anfangspunkt daselbst im Mittelpunkt des Kreisringes liegt; $r, \vartheta$ seien die Polarkoordinaten der $xy$-Ebene, die Höhe $z$ werde nach unten hin positiv genommen, so daß

$$R_2 \leqq r \leqq R_1, \quad z \leqq h$$

ist;

2. ein mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um $O$ rotierendes, gleichorientiertes System $r, \vartheta_1, z$, das sich vom vorangehenden nur im Argument

$$\vartheta_1 = \vartheta - \omega t \tag{1.1}$$

unterscheidet und für $t = 0$ mit dem ersten System zusammenfällt. In diesem bewegten System ruht die freie Oberfläche $\sigma$.

Über die zu untersuchenden Bewegungsvorgänge machen wir zunächst die folgenden Voraussetzungen:

I. *Die Bewegung ist wirbelfrei*, es existiert mithin ein Geschwindigkeitspotential $\varphi(r, \vartheta, z, t)$. Im rotierenden System soll die Bewegung stationär, d. h. nur vom Orte abhängig sein, $\varphi$ hängt also von $t$ nur durch $\vartheta_1$ ab, es ist somit

$$\varphi(r, \vartheta, z, t) = \varphi(r, \vartheta_1, z). \tag{1.2}$$

Die absoluten Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeitsteilchen sind dann

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{1.3}$$

II. *Die Flüssigkeit ist inkompressibel,* also genügt $\varphi$ der Potentialgleichung:

$$\Delta\varphi = 0,$$

die in Zylinderkoordinaten ausgedrückt lautet:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1.4}$$

An den Seitenwänden des Kanals muß offenbar die radiale, am Boden die vertikale Geschwindigkeitskomponente verschwinden, d. h. $\varphi$ genügt den folgenden Randbedingungen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{für} \quad r = R_2, \quad r = R_1, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = h. \tag{1.6}$$

III. *Auf die Flüssigkeit wirkt nur die Schwerkraft* mit dem Potential $gz$, infolgedessen gilt die den Druck definierende Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - gz + \frac{1}{2}v^2 + p = \text{konst.}$$

Da auf der freien Oberfläche $\sigma$ der Druck konstant ist, lautet die Gleichung von $\sigma$:

$$\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1} + gz - \frac{1}{2}v^2 = \text{konst.} \tag{1.7}$$

Die Konstante bestimmt sich hierin aus der Forderung, daß $z = 0$ die Oberfläche der ruhenden Flüssigkeit bilden soll, also

$$\int_{R_2}^{R_1}\int_0^{2\pi} z\,d\vartheta\,dr = 0 \tag{1.8}$$

sein muß.

Wir versuchen, die angegebenen Bedingungen in möglichster Allgemeinheit zu befriedigen. Offenbar muß $\varphi$ seiner Bedeutung nach in $\vartheta_1$ periodisch mit der Periode $2\pi$ sein, kann also in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$\varphi(r, \vartheta_1, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\{\Phi_n(r, z)\cos n\vartheta_1 + \Psi_n(r, z)\sin n\vartheta_1\}. \tag{1.9}$$

Der Natur des Problems entsprechend dürfen wir $\varphi$ und seine beiden ersten Ableitungen als stetig ansehen, so daß die rechte Seite gleichmäßig konvergiert und wir durch Einsetzen in (1.4) für $\Phi_n$, $\Psi_n$ die Differentialgleichungen finden:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}\Phi_n + \frac{\partial^2\Phi_n}{\partial z^2} = 0,\\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}\Psi_n + \frac{\partial^2\Psi_n}{\partial z^2} = 0, \end{aligned} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.10}$$

und aus (1.5), (1.6) die Randbedingungen entspringen:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial r} = \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} = 0 \quad \text{für} \quad r = R_2, \quad r = R_1; \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial z} = \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = h. \tag{1.12}$$

Es genügt hiernach, allein die Funktionen $\Phi_n$ zu betrachten, zu deren Bestimmung uns der Bernoullische Ansatz

$$\Phi_n(r, z) = C_n(r) \cdot Z_n(z) \tag{1.13}$$

führt, mittels dessen aus (1.10) die Gleichung

$$\frac{1}{C_n}\left\{\frac{d^2 C_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dC_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} C_n\right\} = -\frac{1}{Z_n}\frac{d^2 Z_n}{dz^2} = \text{konst.} \tag{1.14}$$

folgt. Je nachdem die hierin auftretende Konstante negativ, null oder positiv ist, ergeben sich verschiedene Lösungen.

a) Die Konstante ist negativ $= -\lambda_n^2$, es folgt

$$\frac{d^2 C_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dC_n}{dr} + \left(\lambda_n^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) C_n = 0, \qquad \frac{d^2 Z_n}{dz^2} - \lambda_n^2 Z_n = 0, \tag{1.15}$$

woraus unter Berücksichtigung von (1.12) entspringt:

$$C_n(r) = J_n(\lambda_n r) + c_n Y_n(\lambda_n r), \tag{1.16}$$

$$Z_n(z) = \alpha_n\left(e^{-\lambda_n z} + e^{-\lambda_n(2h-z)}\right) = 2\alpha_n e^{-\lambda_n h} \operatorname{Cof} \lambda_n(h - z); \tag{1.17}$$

hierin ist $\alpha_n$ eine beliebige Integrationskonstante, $c_n$ noch durch (1.11) zu bestimmen. Die Randbedingungen (1.11) ergeben die Forderungen:

$$J_n'(\lambda_n R_2) + c_n Y_n'(\lambda_n R_2) = 0,$$
$$J_n'(\lambda_n R_1) + c_n Y_n'(\lambda_n R_1) = 0,$$

so daß sich $\lambda_n$ aus der transzendenten Gleichung

$$J_n'(\lambda_n R_2) Y_n'(\lambda_n R_1) - J_n'(\lambda_n R_1) Y_n'(\lambda_n R_2) = 0 \tag{1.18}$$

und dann $c_n$ aus

$$c_n = -\frac{J_n'(\lambda_n R_2)}{Y_n'(\lambda_n R_2)} = -\frac{J_n'(\lambda_n R_1)}{Y_n'(\lambda_n R_1)}$$

ergeben.

Wir werden im § 3 zeigen, daß (1.18) für jeden Index $n$ abzählbar unendlich viele Wurzeln besitzt, die wir mit $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}, \ldots, \lambda_n^{(j)} \ldots$ bezeichnen. Da es in $C_n(r)$ auf einen konstanten Faktor nicht ankommt — wir können uns denselben in $\alpha_n$ aufgenommen denken —, wird:

$$C_n^{(j)}(r) = J_n(\lambda_n^{(j)} r) Y_n'(\lambda_n^{(j)} R_2) - Y_n(\lambda_n^{(j)} r) J_n'(\lambda_n^{(j)} R_2), \tag{1.19}$$

und die allgemeine Lösung von (1.10)

$$(1.20)\qquad \begin{aligned} \Phi_n(r,z) &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_n^{(j)} C_n^{(j)}(r) \{ e^{-\lambda_n^{(j)} z} + e^{-\lambda_n^{(j)}(2h-z)} \}, \\ \Psi_n(r,z) &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_n^{(j)} C_n^{(j)}(r) \{ e^{-\lambda_n^{(j)} z} + e^{-\lambda_n^{(j)}(2h-z)} \}. \end{aligned}$$

b) Der Fall, daß die Konstante der Gleichung (1.14) verschwindet, kann nicht eintreten, da die Differentialgleichung für $C_n(r)$ die Form annähme

$$\frac{d^2 C_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dC_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} C_n = 0,$$

mithin die allgemeine Lösung

$$C_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}$$

hätte, die die beiden Randbedingungen (1.11) nicht gleichzeitig erfüllen kann.

c) Die Konstante in (1.14) ist positiv $= + \mu_n^2$, dann wird

$$\begin{aligned} C_n(r) &= I_n(\mu_n r) + c_n' K_n(\mu_n r), \\ Z_n(z) &= \gamma_n \cos \mu_n (z - h), \end{aligned}$$

worin $I_n$, $K_n$ die modifizierten Besselschen Funktionen für imaginäres Argument bedeuten[5]) und $\mu_n$ muß sich aus der (1.18) entsprechenden Gleichung

$$(1.21)\qquad I_n'(\mu_n R_2) K_n'(\mu_n R_1) - I_n'(\mu_n R_1) K_n'(\mu_n R_2) = 0$$

berechnen, von der wir im § 3 zeigen werden, daß sie keine reellen Lösungen besitzt. Mithin ist auch das Vorkommen dieses Falles ausgeschlossen.

Aus (1.9) ergibt sich somit der allgemeinste Ausdruck des Geschwindigkeitspotentials:

$$(1.22)\qquad \begin{aligned} \varphi(r, \vartheta_1, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_n^{(j)}(r) \{ e^{-\lambda_n^{(j)} z} + e^{-\lambda_n^{(j)}(2h-z)} \} \\ \times \{ \alpha_n^{(j)} \cos n \vartheta_1 + \beta_n^{(j)} \sin n \vartheta_1 \}, \end{aligned}$$

worin die $\alpha_n^{(j)}$, $\beta_n^{(j)}$ Integrationskonstanten sind, die sich aus dem Anfangszustand der Bewegung für $t = 0$ bestimmen lassen.

Für $t = 0$ kann nämlich das Geschwindigkeitspotential eine beliebig vorgelegte Funktion $F(r, \vartheta, z)$ sein, die nur der Einschränkung unterworfen ist, der Differentialgleichung (1.4) und den Randbedingungen (1.5),

---

[5]) Vgl. etwa: Andrew Gray and G. B. Mathews, A Treatise on Bessel Functions, London 1922, S. 20–22; G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, S. 77–80.

(1.6) gehorchen zu müssen, so daß aus (1.22) folgt

$$F(r,\vartheta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}C_n^{(j)}(r)\{e^{-\lambda_n^{(j)}z}+e^{-\lambda_n^{(j)}(2h-z)}\}$$
$$\times\{\alpha_n^{(j)}\cos n\vartheta+\beta_n^{(j)}\sin n\vartheta\},$$

mithin:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_0^{(j)}C_0^{(j)}(r)\{e^{-\lambda_0^{(j)}z}+e^{-\lambda_0^{(j)}(2h-z)}\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\vartheta,z)\,d\vartheta,$$

$$(1.23)\qquad \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_n^{(j)}C_n^{(j)}(r)\{e^{-\lambda_n^{(j)}z}+e^{-\lambda_n^{(j)}(2h-z)}\}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\vartheta,z)\cos n\vartheta\,d\vartheta,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\beta_n^{(j)}C_n^{(j)}(r)\{e^{-\lambda_n^{(j)}z}+e^{-\lambda_n^{(j)}(2h-z)}\}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\vartheta,z)\sin n\vartheta\,d\vartheta,$$
$$(n=1,2,\ldots)$$

wird. Für einen bestimmten Wert von $z$, z. B. $z=h$, erhält man also:

$$(1.24)\qquad \begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_0^{(j)}e^{-\lambda_0^{(j)}h}\cdot C_0^{(j)}(r)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\vartheta,h)\,d\vartheta,\\&\sum_{j=1}^{\infty}\left.\begin{matrix}\alpha_n^{(j)}\\\beta_n^{(j)}\end{matrix}\right\}e^{-\lambda_n^{(j)}h}\cdot C_n^{(j)}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\vartheta,h)\left\{\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\right.n\vartheta\,d\vartheta,\end{aligned}$$
$$(n=1,2,\ldots).$$

Nun genügen die $C_n^{(j)}(r)$ für ein festes $n$ einer Orthogonalitätsbedingung; es befriedigen nämlich $C_n^{(j)}$ und $C_n^{(k)}$ die Differentialgleichung (1.15), in die resp. $\lambda_n^{(j)}$, $\lambda_n^{(k)}$ einzusetzen sind. Sind diese verschiedene Wurzeln von (1.18), so gibt (1.15)

$$(\lambda_n^{(k)2}-\lambda_n^{(j)2})\int_{R_2}^{R_1}C_n^{(j)}(r)\,C_n^{(k)}(r)\,r\,dr$$
$$=\int_{R_2}^{R_1}\left\{C_n^{(k)}(r)\frac{d}{dr}(r\,C_n^{(j)\prime}(r))-C_n^{(j)}(r)\frac{d}{dr}(r\,C_n^{(k)\prime}(r))\right\}dr,$$

so daß wegen der Randbedingung (1.11) folgt:

$$(1.25)\qquad \int_{R_2}^{R_1}r\,C_n^{(j)}(r)\,C_n^{(k)}(r)\,dr=0.$$

Man erhält daher schließlich aus (1.24) die gesuchten Bestimmungsgleichungen der Integrationskonstanten in der Form:

$$(1.26)\quad \begin{aligned} \alpha_0^{(j)} &= \frac{1}{4\pi} e^{\lambda_0^{(j)} h} \int\limits_{R_2}^{R_1}\int\limits_0^{2\pi} r\, F(r, \vartheta, h)\, C_0^{(j)}(r)\, d\vartheta\, dr : \int\limits_{R_2}^{R_1} r\, C_0^{(j)}(r)^2\, dr, \\ \left.\begin{matrix}\alpha_n^{(j)}\\ \beta_n^{(j)}\end{matrix}\right\} &= \frac{1}{2\pi} e^{\lambda_n^{(j)} h} \int\limits_{R_2}^{R_1}\int\limits_0^{2\pi} r\, F(r, \vartheta, h)\, C_n^{(j)}(r) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\vartheta\, d\vartheta\, dr : \int\limits_{R_2}^{R_1} r\, C_n^{(j)}(r)^2\, dr. \end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichungen oben ein, so erhält man ein Entwicklungsproblem nach unsern Orthogonalfunktionen, auf das wir hier nicht weiter eingehen.

## § 2.

## Die Oberflächengleichung.

Den gefundenen Ausdruck (1.22) haben wir nun in die Gleichung (1.7) der freien Oberfläche $\sigma$ einzusetzen. Wegen (1.3) lautet letztere

$$(2.1)\qquad \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} + g z - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{2 r^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \text{konst.},$$

und aus ihr ist $z$ als Funktion von $\vartheta_1, r$ zu entnehmen. Wir machen nun der Natur der von uns untersuchten Wellen entsprechend die Annahme

IV. *Die Geschwindigkeit $v$ eines Flüssigkeitsteilchens soll klein sein gegenüber der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oberflächenwelle*, d. h. es ist

$$(2.2)\qquad \frac{1}{r\omega}\frac{\partial \varphi}{\partial r} \ll 1, \quad \frac{1}{r^2\omega}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} \ll 1, \quad \frac{1}{r\omega}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \ll 1,$$

derart, daß die Quadrate der linken Seiten gegen 1 vernachlässigt werden können. Dann lautet (2.1) in erster Näherung

$$(2.3)\qquad g z + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} = \text{konst.},$$

also wegen (1.22) explizit

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} z = \frac{\text{konst.}}{g} + \frac{\omega}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n\, C_n^{(j)}(r) \left\{ e^{-\lambda_n^{(j)} z} + e^{-\lambda_n^{(j)}(2h-z)} \right\} \\ \times \left\{ \alpha_n^{(j)} \sin n\vartheta_1 - \beta_n^{(j)} \cos n\vartheta_1 \right\}. \end{aligned}$$

Man ersieht daraus, daß das für $n = 0$ in $\varphi(r, \vartheta_1, z)$ auftretende, von $\vartheta_1$ unabhängige Glied für die Bildung von $\sigma$ in erster Näherung belanglos ist. Die Gleichung (2.4) ist einer Auflösung nach $z$ nur im Falle kleiner $z$ zugänglich; wir machen daher die weitere Annahme:

V. *Die Wellenhöhe soll klein sein gegenüber der Tiefe des Kanals*, d. h. es kann auf $\sigma$ die Größe $h - z$ durch $h$ ersetzt werden.

Die Forderung (1.8) ergibt dann

$$\text{konst.} = 0,$$

und aus (2.4) erhält man in der verlangten Näherung die gesuchte Gleichung von $\sigma$:

$$(2.5)\quad z = \frac{\omega}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n\, C_n^{(j)}(r)\,(1 + e^{-2\lambda_n^{(j)} h})(\alpha_n^{(j)} \sin n\vartheta_1 - \beta_n^{(j)} \cos n\vartheta_1).$$

Hiernach entsteht die Oberfläche aus der Superposition derjenigen Wellen, die den einzelnen Entwicklungstermen von $\varphi(r, \vartheta_1, z)$ entsprechen.

Die Bedingungen IV, V bedeuten eine Größenbeschränkung für die Koeffizienten $\alpha_n^{(j)}$, $\beta_n^{(j)}$ und damit zufolge (1.26) für den Ausgangswert $F(r, \vartheta, z)$ des Geschwindigkeitspotentials.

Zu den bisherigen Bedingungen tritt nun eine letzte physikalische Forderung, die besagt, daß $\sigma$ offenbar eine Stromfläche der Flüssigkeit sein muß, d. h. daß sich ein Flüssigkeitsteilchen, das im Augenblick $t$ auf $\sigma$ lag, sich auch zur Zeit $t + dt$ auf $\sigma$ befinden soll; es ist dies gleichbedeutend damit, daß neben (2.1) bzw. (2.3) auch die nach $t$ differenzierte Gleichung gelten soll.

VI. *Die Oberfläche $\sigma$ ist eine Stromfläche der Flüssigkeit,* d. h. auf $\sigma$ gilt:

$$(2.6)\quad \begin{aligned} &g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \omega^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta_1^2} + 2\omega\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\vartheta_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta_1\,\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta_1^2}\right\} \\ &-\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta_1^2} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\right)^2\right. \\ &\left.+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\vartheta_1} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta_1\,\partial z} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen III, IV lautet diese Gleichung in erster Näherung

$$(2.7)\quad g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \omega^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta_1^2} = 0,$$

worin $\varphi$ aus (1.22) und $z$ aus (2.5) einzusetzen sind; es folgt, wenn man $z = 0$ setzt:

$$\begin{aligned} g\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_0^{(j)}\lambda_0^{(j)}C_0^{(j)}(r)\{1 - e^{-2\lambda_0^{(j)}h}\} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}C_n^{(j)}(r)(g\lambda_n^{(j)} - \omega^2 n^2)(1 - e^{-2\lambda_n^{(j)}h}) \\ \times\{\alpha_n^{(j)}\cos n\vartheta_1 + \beta_n^{(j)}\sin n\vartheta_1\} = 0, \end{aligned}$$

und hieraus schließt man vermittels der Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen einerseits, derjenigen der $C_n^{(j)}(r)$ (vgl. (1.25)) andrerseits, daß die konstanten Faktoren verschwinden müssen; wir werden nun später zeigen, daß die $\lambda_n^{(j)}$ stets positiv angenommen werden können, so daß ein Verschwinden der die Größe $h$ enthaltenden Klammern ausgeschlossen ist, also folgt:

$$\alpha_0^{(j)} = \beta_0^{(j)} = 0 \qquad (j = 1 \ldots \infty), \tag{2.8}$$
$$\alpha_n^{(j)}(g\lambda_n^{(j)} - \omega^2 n^2) = \beta_n^{(j)}(g\lambda_n^{(j)} - \omega^2 n^2) = 0 \qquad (n, j = 1 \ldots \infty),$$

und damit das Problem einen Sinn habe, ist notwendig, daß für ein bestimmtes Indexpaar $n, i$ gilt:

$$g\lambda_n^{(i)} = \omega^2 n^2, \tag{2.9}$$

und alle nicht zu diesem Indexpaar gehörigen $\alpha_k^{(j)}$, $\beta_k^{(j)}$ verschwinden:

$$\alpha_k^{(j)} = \beta_k^{(j)} = 0, \quad \{(k-n)^2 + (j-i)^2 \neq 0\}. \tag{2.10}$$

Da die $\lambda_n^{(j)}$ schon als Wurzeln der Gleichung (1.18) festgelegt sind, bedeutet (2.9) eine *Einschränkung für die möglichen Winkelgeschwindigkeiten* $\omega$:

$$\omega^2 = \frac{g\lambda_n^{(i)}}{n^2}. \tag{2.11}$$

Mittels (2.8), (2.10) reduziert sich der Ausdruck für das Potential und die Oberfläche:

$$\varphi(r, \vartheta_1, z) = C_n^{(i)}(r)\{e^{-\lambda_n^{(i)} z} + e^{-\lambda_n^{(i)}(2h-z)}\}\{\alpha_n^{(i)} \cos n\vartheta_1 + \beta_n^{(i)} \sin n\vartheta_1\}, \tag{2.12}$$

$$z = \frac{\omega n}{g} C_n^{(i)}(r)(1 + e^{-2\lambda_n^{(i)} h})(\alpha_n^{(i)} \sin n\vartheta_1 - \beta_n^{(i)} \cos n\vartheta_1), \tag{2.13}$$

worin

$$\vartheta_1 = \vartheta - \omega t = \vartheta - \frac{\sqrt{g\lambda_n^{(i)}}}{n} t \tag{2.14}$$

zu setzen ist.

Von den unendlich vielen Entwicklungstermen in $\varphi$ und $z$ ist also nur einer übrig geblieben — es hat sich eine, bezüglich $\vartheta_1$ sinusförmige, Welle herausgeschält. Übrigens enthält (2.12) die Aussage, daß *das Potential eine abnehmende Funktion der Tiefe* ist. Wir werden nunmehr die $\lambda_n^{(i)}$ und mittels ihrer die $C_n^{(i)}$ berechnen und somit den expliziten Ausdruck für die permanenten Wellen herstellen.

## § 3.

## Die Eigenwerte.

Wir gehen nun an die Diskussion der Gleichungen (1.18) und (1.21); dazu merken wir zunächst folgende Formeln an[6]):

---

[6]) In der üblichen Definition von $Y_n(x)$, $K_n(x)$ hat man, um die Realität zu wahren, an Stelle von $\log x$ die Größe $\log' x$ zu substituieren.

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} J_n(-x) &= (-1)^n J_n(x), & Y_n(-x) &= (-1)^n Y_n(x), \\ I_n(-x) &= (-1)^n I_n(x), & K_n(-x) &= (-1)^n K_n(x); \end{aligned}$$

es entspricht daher jeder negativen Wurzel der Gleichungen (1.18) und (1.21) eine gleichgroße positive Wurzel. Wie man aus (1.17) und (1.19) ersieht, wird $C_n^{(j)}(r)$ durch Vertauschung von $\lambda_n^{(j)}$ mit $-\lambda_n^{(j)}$ überhaupt nicht, $Z_n(z)$ nur um einen konstanten Faktor geändert, wir dürfen daher in allen vorangehenden Formeln die Summation auf die positiven Wurzeln $\lambda_n^{(j)}$ beschränken.

*Zunächst zeigen wir, daß* (1.21) *überhaupt keine reellen Wurzeln zuläßt.* Nach Definition ist nämlich[7]):

$$I_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} + \dots\right\}$$

offenbar eine für positive $x$ monoton wachsende Funktion, und das gleiche gilt für $I_n'(x)$, so daß also für positive $\mu_n$ — und solche dürfen wir nach obigem voraussetzen —

$$(3.2)\qquad \frac{I_n'(\mu_n R_2)}{I_n'(\mu_n R_1)} < 1$$

ist.

Die Funktion $K_n(x)$ kann man andrerseits durch die Formel definieren[8]):

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x(\xi+\xi^{-1})}\cdot \xi^{n-1}\, d\xi \qquad (n \geqq 0),$$

derzufolge $K_n(x)$ für alle positiven $x$ auch positiv ist; für die Ableitung findet man:

$$K_n'(x) = -\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x(\xi+\xi^{-1})}\cdot(\xi^n + \xi^{n-2})\, d\xi \qquad (n \geqq 1),$$

d. h. $K_n'(x)$ ist immer negativ und nimmt offenbar seinem Absolutbetrage nach ab, wenn $x$ wächst, woraus wir folgern, daß

$$(3.3)\qquad \frac{K_n'(\mu_n R_2)}{K_n'(\mu_n R_1)} > 1$$

ist. In Verbindung mit (3.2) besagt dies, daß die Gleichung (1.21) für $n \geqq 1$ unmöglich ist. Für $n = 0$ aber gelten die Formeln[9]):

$$I_0'(x) = I_1(x), \qquad K_0'(x) = -K_1(x),$$

---

[7]) Vgl. Gray-Mathews, a. a. O., S. 20; Watson, a. a. O., S. 70.

[8]) Vgl. Gray-Mathews, a. a. O., S. 51; Watson, S. 82.

[9]) Vgl. Gray-Mathews, a. a. O., S. 20, 22; Watson, S. 79.

und die Gleichung

$$I_1(\mu_0 R_2)\, K_1(\mu_0 R_1) - I_1(\mu_0 R_1)\, K_1(\mu_0 R_2) = 0$$

ist unmöglich, da $I_1(x)$ eine monoton wachsende, $K_1(x)$ eine monoton abnehmende Funktion ihres Argumentes ist[10]).

Wir gehen nun zur Behandlung von (1.18) über. Man kann sich zunächst graphisch eine Einsicht in das Verhalten ihrer Wurzeln verschaffen. Zeichnet man nämlich die Funktion

$$f(x) = Y_n'(x) : J_n'(x), \tag{3.4}$$

deren Ableitung sich vermittels der Differentialgleichung zu

$$f'(x) = -\frac{2}{\pi x}\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\frac{1}{J_n'(x)^2}$$

ergibt, so erhält man eine aus unendlich vielen getrennten Zweigen, die je zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $J_n'(x)$ verlaufen, bestehende Kurve. Die erste dieser Nullstellen ist bekanntlich[11]) größer als $\sqrt{n(n+2)}$, das Bild des ersten Zweiges ist also folgendes: er beginnt mit dem Werte $-\infty$ in $x = 0$, steigt dann bis zur Stelle $x = n$, an der er sein Maximum annimmt, und fällt hinter diesem Punkte bis zum Werte $-\infty$ in der ersten Nullstelle von $J_n'(x)$; hier beginnt der zweite Zweig bei $+\infty$ und fällt monoton bis zum Werte $-\infty$ in der zweiten Nullstelle von $J_n'(x)$. Die andern Zweige verlaufen diesem entsprechend und haben — wie auch aus den asymptotischen Ausdrücken ersichtlich — die Gestalt der cotang-Kurve.

Schreiben wir nun (1.18) in der Form

$$f(\lambda_n R_2) = f(\lambda_n R_1), \tag{3.5}$$

so kommt es also darauf an, auf der beschriebenen Kurve zwei Punkte in gleicher Höhe zu finden, deren Abszissenverhältnis $R_2 : R_1$ gegeben ist. *Man sieht hiernach sofort, daß* (1.18) *unendlichviele Wurzeln hat.* Mit Sicherheit gibt es auf dem ersten Zweige ein solches Punktepaar, für das dann

$$\lambda_n R_2 < n < \lambda_n R_1 \tag{3.6}$$

sein muß, und das immer enger an $n$ heranrückt, je näher das Verhältnis $R_2 : R_1$ der Einheit liegt. Ferner gibt es unendlich viele Punktepaare derart, daß die beiden Punkte auf zwei vom ersten verschiedene Zweige fallen, und deren Abszissendifferenz $\lambda_n(R_1 - R_2)$ annähernd ein Vielfaches von $\pi$

[10]) Letztere Tatsache ist bekannt, vgl. Gray-Mathews, a. a. O., S. 82.

[11]) Vgl. Paul Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen, Leipzig 1908, S. 117; Watson, S. 486.

ist. Schließlich ist noch der Fall möglich, daß der erste Punkt auf dem ersten, der zweite auf einem der andern Zweige liegt; er kann aber nur dann eintreten, wenn das Verhältnis $R_2 : R_1$ einen gewissen echten Bruch nicht überschreitet.

Um nunmehr die Berechnung der Wurzeln $\lambda_n$ zu leisten, entwickeln wir nach Taylor:

$$\begin{aligned}J_n'(x)\,Y_n'(x+\xi) - J_n'(x+\xi)\,Y_n'(x) &= \xi\,\{J_n'(x)\,Y_n''(x) - J_n''(x)\,Y_n'(x)\}\\ &+ \frac{1}{2}\xi^2\,\{J_n'(x)\,Y_n'''(x) - J_n'''(x)\,Y_n'(x)\} + \dots.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Man findet aber unter Benutzung der Differentialgleichung und bekannter Relationen[12]):

$$\begin{aligned}J_n'(x)\,Y_n(x) - J_n(x)\,Y_n'(x) &= \frac{2}{\pi x},\\ J_n'(x)\,Y_n''(x) - J_n''(x)\,Y_n'(x) &= -\frac{2}{\pi x}\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right),\\ J_n'(x)\,Y_n'''(x) - J_n'''(x)\,Y_n'(x) &= \frac{2}{\pi x^2}\left(1-\frac{3n^2}{x^2}\right),\\ J_n'(x)\,Y_n^{\mathrm{IV}}(x) - J_n^{\mathrm{IV}}(x)\,Y_n'(x) &= \frac{2}{\pi x}\left(1-\frac{2n^2+3}{x^2}+\frac{n^2(n^2+11)}{x^4}\right),\end{aligned} \tag{3.8}$$

so daß (3.7) lautet:

$$\begin{aligned}&J_n'(x)\,Y_n'(x+\xi) - J_n'(x+\xi)\,Y_n'(x)\\ &= \frac{\xi}{\pi x}\left\{-2\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)+\frac{\xi}{x}\left(1-\frac{3n^2}{x^2}\right)+\frac{\xi^2}{3}\left(1-\frac{2n^2+3}{x^2}+\frac{n^2(n^2+11)}{x^4}\right)+\dots\right\}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Substituieren wir hierin die Werte

$$x = \lambda_n R_2 = \lambda_n R, \qquad \xi = \lambda_n (R_1 - R_2) = \lambda_n l, \tag{3.10}$$

wo $R$ den inneren Krümmungsradius, $l$ die Breite des Kanals bedeuten, so wird

$$\begin{aligned}&J_n'(\lambda_n R_2)\,Y_n'(\lambda_n R_1) - J_n'(\lambda_n R_1)\,Y_n'(\lambda_n R_2)\\ &= \frac{l}{\pi \lambda_n^2 R^3}\Big[-2\,(\lambda_n^2 R^2 - n^2) + \frac{l}{R}\cdot(\lambda_n^2 R^2 - 3n^2)\\ &+ \frac{l^2}{R^2}\cdot\frac{1}{3}\{\lambda_n^4 R^4 - (2n^2+3)\,\lambda_n^2 R^2 + n^2(n^2+11)\} + \dots\Big],\end{aligned} \tag{3.11}$$

man erhält also eine nach Potenzen von $\frac{l}{R}$ fortschreitende Reihe.

Über ihre Konvergenz bemerken wir folgendes: Die Taylor-Entwicklung (3.7) konvergiert bei festem $x$ in einer Kreisumgebung von $x$, die bis an den nächsten singulären Punkt der linken Seite heranreicht. Nun

[12]) Vgl. Schafheitlin, a. a. O., S. 47; Watson, S. 76.

sind $J_n$, $J_n'$ ganze transzendente Funktionen, und $Y_n$, $Y_n'$ besitzen im Endlichen nur die eine Singularität im Nullpunkt, also konvergieren alle vorangehenden Reihen, solange

$$\left|\frac{\xi}{x}\right| = \frac{l}{R} < 1 \tag{3.12}$$

ist, und zwar um so besser, je kleiner dieses Verhältnis ist.

Um die Gleichung (1.18) zu lösen, hat man (3.11) gleich Null zu setzen und hieraus die Wurzeln $\lambda_n$ nach Potenzen von $\frac{l}{R}$ zu entwickeln. Man erhält in erster Näherung

$$\lambda_n = \frac{n}{R}, \tag{3.13}$$

das ist die durch (3.6) festgelegte, dem ersten Zweige von $f(x)$ entsprechende Wurzel; die zweite Näherung ergibt für dieselbe den Wert

$$\lambda_n = \frac{n}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{l}{R}\right);$$

aus der dritten Approximation findet man hingegen zwei Werte:

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{n}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{l}{R} + \frac{7}{24}\frac{l^2}{R^2} + \dots\right), \tag{3.14}$$

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{\sqrt{6}}{l}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{l}{R} + \left(\frac{7}{32} + \frac{n^2}{12}\right)\frac{l^2}{R^2} + \dots\right). \tag{3.15}$$

Man erhält durch Fortsetzung dieses Verfahrens offenbar unendlich viele Wurzeln, unter denen $\lambda_n^{(1)}$, wie schon graphisch ersichtlich war, eine Sonderstellung einnimmt; ihr Verhältnis zu den andern Wurzeln ist von der Größenordnung $\frac{l}{R}$, die andern Wurzeln enthalten sämtlich $l$ im Nenner.

Den allgemeinen Ausdruck für letztere finden wir aus den asymptotischen Formeln für $J_n(x)$, $Y_n(x)$. Es gilt nämlich für jedes positive $x$: [13])

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n(x)\sin\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right) + Q_n(x)\cos\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right)\right\}, \\ Y_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n(x)\cos\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right) - Q_n(x)\sin\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right)\right\}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

worin

$$P_n(x) = 1 + R_n(x), \qquad Q_n(x) = \frac{4n^2-1}{8x} + S_n(x) \tag{3.17}$$

zu setzen ist, und für großes $x$ der Ausdruck $R_n(x)$ klein von der Ordnung $\frac{1}{x^2}$, $S_n(x)$ klein von der Ordnung $\frac{1}{x^3}$ ist. Daher wird [14])

[13]) Vgl. Schafheitlin a. a. O., S. 48 ff.; Watson, S. 206 ff.

[14]) Vgl. Schafheitlin a. a. O., S. 15.

$$(3.18)\quad \begin{aligned} J_n'(x) &= \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n^*(x)\sin\left(x - \frac{2n-3}{4}\pi\right) + Q_n^*(x)\cos\left(x - \frac{2n-3}{4}\pi\right)\right\}, \\ Y_n'(x) &= \frac{1}{2}(Y_{n-1} - Y_{n+1}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n^*(x)\cos\left(x - \frac{2n-3}{4}\pi\right) - Q_n^*(x)\sin\left(x - \frac{2n-3}{4}\pi\right)\right\}, \end{aligned}$$

worin man zu setzen hat

$$(3.19)\quad \begin{aligned} P_n^*(x) &= \frac{1}{2}(P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x)) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(R_{n-1}(x) + R_{n+1}(x)) = 1 + R_n^*(x), \\ Q_n^*(x) &= \frac{1}{2}(Q_{n-1}(x) + Q_{n+1}(x)) \\ &= \frac{4n^2+3}{8x} + \frac{1}{2}(S_{n-1}(x) + S_{n+1}(x)) = \frac{4n^2+3}{8x} + S_n^*(x), \end{aligned}$$

und $R_n^*(x)$, $S_n^*(x)$ von derselben Größenordnung wie $R_n(x)$, $S_n(x)$ sind. Man erhält daher

$$\begin{aligned} & J_n'(x)\,Y_n'(x+\xi) - J_n'(x+\xi)\,Y_n'(x) \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{x(x+\xi)}}\{\cos\xi\cdot[P_n^*(x+\xi)\,Q_n^*(x) - P_n^*(x)\,Q_n^*(x+\xi)] \\ &\qquad - \sin\xi\cdot[P_n^*(x)\,P_n^*(x+\xi) + Q_n^*(x)\,Q_n^*(x+\xi)]\}, \end{aligned}$$

und die Gleichung (1.18) nimmt die Gestalt an

$$(3.20)\qquad \operatorname{tang}\xi = \frac{P_n^*(x+\xi)\,Q_n^*(x) - P_n^*(x)\,Q_n^*(x+\xi)}{P_n^*(x)\,P_n^*(x+\xi) + Q_n^*(x)\,Q_n^*(x+\xi)},$$

worin man (3.10) und (3.19) zu substituieren hat. Die erste Näherung gibt

$$(3.21)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{tang}\xi = 0, \\ &\lambda_n = \frac{k\pi}{l} \qquad\qquad (k = \text{ganze Zahl}), \end{aligned}$$

worin $k$ nur der Bedingung unterliegt, so groß sein zu müssen, daß

$$x = \lambda_n R = k\pi\frac{R}{l}$$

die hinreichende Größe hat, um $\frac{1}{x^2}$ vernachlässigen zu können. Die zweite Näherung gibt

$$(3.22)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tang}\xi &= \frac{4n^2+3}{8x} - \frac{4n^2+3}{8(x+\xi)} = \frac{4n^2+3}{8x^2}\,\xi + \cdots, \\ \lambda_n &= \frac{k\pi}{l}\left\{1 + \frac{4n^2+3}{8k^2\pi^2}\cdot\frac{l^2}{R^2} + \cdots\right\}. \end{aligned}$$

Dies ist der asymptotische Ausdruck für die unendlich vielen Wurzeln von (1.18), die den cotang-ähnlichen Zweigen von $f(x)$ entsprechen.

## § 4.

## Der Fall schwacher Kanalkrümmung.

Die im vorangehenden ermittelten Eigenwerte haben wir nun in (1.19) zu substituieren. Setzen wir im folgenden

$$r = R + \varrho, \quad 0 \leqq \varrho \leqq l, \tag{4.1}$$

so gibt eine Taylor-Entwicklung unter Benutzung von (3.10), (3.8)

$$\begin{aligned} C_n(r) &= J_n(\lambda_n r)\, Y_n'(\lambda_n R) - Y_n(\lambda_n r)\, J_n'(\lambda_n R) \\ &= \{J_n(x)\, Y_n'(x) - Y_n(x)\, J_n'(x)\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\lambda_n^2 \varrho^2 \{J_n''(x)\, Y_n'(x) - J_n'(x)\, Y_n''(x)\} + \ldots \\ &= \frac{-2}{\pi \lambda_n R}\Big\{1 - \frac{1}{2}(\lambda_n^2 R^2 - n^2)\cdot\frac{\varrho^2}{R^2} + \frac{1}{6}(\lambda_n^2 R^2 - 3n^2)\cdot\frac{\varrho^3}{R^3} \\ &\quad + \frac{1}{24}(\lambda_n^4 R^4 - (2n^2+3)\lambda_n^2 R^2 + n^2(n^2+11))\cdot\frac{\varrho^4}{R^4} + \ldots\Big\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

und diese Entwicklung ist konvergent, solange $\varrho < R$, also a fortiori, wenn (3.12) erfüllt ist. Für $\lambda_n$ müssen wir die oben gefundenen Ausdrücke (3.14), (3.22) einsetzen. Mittels (3.14) findet man die Entwicklung:

$$C_n^{(1)}(r) = -\frac{2}{\pi R}\cdot\frac{1}{\lambda_n^{(1)}}\Big\{1 + \frac{n^2}{6}\cdot\frac{\varrho^2(3l - 2\varrho)}{R^3} - \frac{n^2}{12}\cdot\frac{\varrho^2(5l^2 + 2l\varrho - 4\varrho^2)}{R^4} + \ldots\Big\}. \tag{4.3}$$

Eine Kontrolle der Rechnung bietet die Tatsache, daß die Ableitung $C_n^{(1)\prime}(r)$ für $\varrho = 0$ und $\varrho = l$ verschwinden muß.

Die den andern $\lambda_n$ entsprechenden $C_n(r)$ werden wir konsequenter mittels der Formeln (3.16) berechnen, womit sich ergibt:

$$\begin{aligned} C_n(r) &= \frac{2}{\pi \lambda_n \sqrt{rR}}\Big\{P_n(\lambda_n r)\ \sin\Big(\lambda_n r - \frac{2n-1}{4}\pi\Big) + Q_n(\lambda_n r)\ \cos\Big(\lambda_n r - \frac{2n-1}{4}\pi\Big)\Big\} \\ &\qquad \times \Big\{P_n^*(\lambda_n R)\cos\Big(\lambda_n R - \frac{2n-3}{4}\pi\Big) - Q_n^*(\lambda_n R)\sin\Big(\lambda_n R - \frac{2n-3}{4}\pi\Big)\Big\} \\ &\quad - \frac{2}{\pi \lambda_n \sqrt{rR}}\Big\{P_n(\lambda_n r)\ \cos\Big(\lambda_n r - \frac{2n-1}{4}\pi\Big) - Q_n(\lambda_n r)\ \sin\Big(\lambda_n r - \frac{2n-1}{4}\pi\Big)\Big\} \\ &\qquad \times \Big\{P_n^*(\lambda_n R)\sin\Big(\lambda_n R - \frac{2n-3}{4}\pi\Big) + Q_n^*(\lambda_n R)\cos\Big(\lambda_n R - \frac{2n-3}{4}\pi\Big)\Big\} \\ &= \frac{2}{\pi \lambda_n \sqrt{rR}}\,\{\sin\lambda_n\varrho\cdot[P_n^*(\lambda_n R)\, Q_n(\lambda_n r) - P_n(\lambda_n r)\, Q_n^*(\lambda_n R)] \\ &\qquad - \cos\lambda_n\varrho\cdot[P_n(\lambda_n r)\, P_n^*(\lambda_n R) + Q_n(\lambda_n r)\, Q_n^*(\lambda_n R)]\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

In erster Näherung wird also für hinreichend große Werte von $x$

$$C_n(r) = -\frac{2l}{\pi^2 k R}\cos\left(k\pi\frac{\varrho}{l}\right); \tag{4.5}$$

die zweite Näherung ergibt:

$$\begin{aligned} C_n(r) &= \frac{2}{\pi\lambda_n R}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\varrho}{R}\right)\left\{-\cos\lambda_n\varrho + \left(\frac{4n^2-1}{8\lambda_n r} - \frac{4n^2+3}{8\lambda_n R}\right)\sin\lambda_n\varrho\right\} \\ &= \frac{-2}{\pi^2 k}\frac{l}{R}\left[\cos\left(k\pi\frac{\varrho}{l}\right) + \frac{1}{2k\pi}\cdot\frac{l}{R}\left\{\sin\left(k\pi\frac{\varrho}{l}\right) - k\pi\frac{\varrho}{l}\cos\left(k\pi\frac{\varrho}{l}\right)\right\} + \ldots\right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Wir wollen nun die im vorangehenden entwickelten Formeln auf den praktisch wichtigen Fall anwenden, daß es sich um einen *schwach gekrümmten* Kanal handelt, d. h. wir werden untersuchen, wie sich die Resultate vereinfachen, wenn wir die Kanalbreite $l$ konstant halten, dagegen den inneren Krümmungsradius $R$ unbegrenzt wachsen lassen. Vorab zwei Bemerkungen:

1. Das Verhältnis $R_2 : R_1$ nähert sich dann unbegrenzt der Einheit, und demnach gibt es, wie wir schon oben bei Besprechung der Kurve $f(x)$ hervorhoben, *nur* die beiden Typen von Wurzeln $\lambda_n$, die in (3.14) bzw. (3.22) erfaßt sind.

2. Bei dem Übergang zu großen Werten von $R$ ist die Zahl $n$ in (4.3) keiner Beschränkung unterworfen, dagegen liegt den an (3.16) angeknüpften Ableitungen die Voraussetzung zugrunde, daß es sich um ein festes endliches $n$ handelt und $R$ hinreichend groß genommen wird; man sieht in der Tat sofort, daß (4.5) bzw. (4.6) nur dann der vorgeschriebenen Differentialgleichung (1.15) genügt, wenn $\frac{n}{R}$ klein von erster Ordnung ist.

Man findet aus (2.11), (3.14), (3.22), daß die möglichen Werte der Winkelgeschwindigkeit durch die Gleichungen

$$\omega^2 = \frac{g}{nR}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{l}{R} + \frac{7}{24}\frac{l^2}{R^2} + \ldots\right), \tag{4.7}$$

$$\omega^2 = \frac{g\pi k}{l n^2}\left(1 + \frac{4n^2+3}{8k^2\pi^2}\cdot\frac{l^2}{R^2} + \ldots\right) \tag{4.8}$$

bestimmt werden; für $R \to \infty$ strebt der erste Wert gegen Null, der zweite nach dem endlichen Grenzwert

$$\frac{g\pi k}{l n^2}.$$

Die in den vorangehenden Paragraphen gegebenen Entwicklungen sind unter den gemachten Voraussetzungen konvergent, und man sieht aus (4.3), daß $C_n^{(1)}(r)$ bei endlichem $n$ bis auf Glieder dritter Ordnung konstant ist.

Denkt man sich (4.3) und (4.6) in die Gleichung (2.13) der freien Oberfläche $\sigma$ substituiert, so sieht man, *daß im ersten Falle die Wellenhöhe in der $r$-Richtung annähernd konstant, im zweiten Falle dagegegen* cos-*förmig gekräuselt ist*; man wird daher vermuten, daß erstere die den Airyschen Wellen in gestreckten Kanälen entsprechende Bewegung liefern.

Um den Grenzübergang für große $R$ durchzuführen und zu verwendbaren Resultaten zu gelangen, führen wir die an Wellen meßbaren Größen ein: wir messen in der Mitte des Kanals die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = \left(R + \frac{l}{2}\right)\omega \tag{4.9}$$

und die Wellenlänge

$$L = \frac{2\pi}{n}\left(R + \frac{l}{2}\right). \tag{4.10}$$

Für den ersten Eigenwert wird also mittels (4.7):

$$c^2 = R^2\omega^2\left(1 + \frac{l}{2R}\right)^2 = \frac{R}{n}g\left(1 + \frac{1}{2}\frac{l}{R} + \frac{1}{24}\frac{l^2}{R^2} + \ldots\right),$$

$$\frac{R}{n} = \frac{L}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{l}{R} + \frac{1}{4}\frac{l^2}{R^2} - \ldots\right),$$

und somit schließlich:

$$c^2 = \frac{gL}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{24}\frac{l^2}{R^2} + \ldots\right). \tag{4.11}$$

*Diese Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Wellenlänge ist offenbar die Verallgemeinerung der bekannten Airyschen Gleichung für permanente Wellen in gestreckten Kanälen*[15]; sie bleibt also bis auf einen Effekt zweiter Ordnung in der Krümmung erhalten.

Man erhält ferner aus (4.3), wenn man $L$ statt $n$ einführt:

$$C_n^{(1)}(r) = \text{konst.}\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\varrho^2(3l - 2\varrho)}{R} + \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\varrho^2(l^2 - 6\varrho l + 4\varrho^2)}{R^2} + \ldots\right\} \tag{4.12}$$

und aus (2.11), (4.11):

$$\lambda_n = \frac{n^2\omega^2}{g} = \frac{4\pi^2 c^2}{gL^2} = \frac{2\pi}{L}\left(1 + \frac{1}{24}\frac{l^2}{R^2} + \ldots\right). \tag{4.13}$$

Um jetzt die entsprechenden Werte von $\varphi(r, \vartheta_1, z)$ und $z$ zu berechnen, setzen wir noch:

$$n\vartheta_1 = n\vartheta - n\omega t = n\frac{x}{R + \frac{1}{2}l} - \frac{nc}{R + \frac{1}{2}l}t = \frac{2\pi}{L}(x - ct), \tag{4.14}$$

[15]) Vgl. Levi-Civita, loc. cit. [8]).

worin $x$ die Bogenlänge auf dem Mittelkreis des Kanals bedeutet, die also bei der Streckung zu der in die Fortschreitungsrichtung fallenden Abszisse wird. Beschränken wir uns auf den Fall unendlicher Kanaltiefe, so wird also das Geschwindigkeitspotential:

$$\text{(4.15)}\quad \begin{aligned}\varphi(r,\vartheta_1,z) = \text{konst.}\, e^{-\frac{2\pi}{L}z}\left(1-\frac{\pi}{12L}\frac{l^2}{R^2}z+\dots\right)\Big(1&+\frac{2}{3}\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\varrho^2(3l-2\varrho)}{R}\\ &+\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\varrho^2(l^2-6\varrho l+4\varrho^2)}{R^2}+\dots\Big)\cdot\cos\frac{2\pi}{L}(x-x_0-ct),\end{aligned}$$

was für $R\to\infty$ in den bekannten Ausdruck für das Potential der Airyschen Wellen übergeht. Die Gleichung der freien Oberfläche aber wird:

$$\text{(4.16)}\quad \begin{aligned}z = \text{konst.}\Big\{1&+\frac{2}{3}\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\varrho^2(3l-2\varrho)}{R}\\ &+\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\varrho^2(l^2-6\varrho l+4\varrho^2)}{R^2}+\dots\Big\}\sin\frac{2\pi}{L}(x-x_0-ct).\end{aligned}$$

Für $\varrho=0$, d. h. am inneren Rand des Kanals, verschwinden die Zusatzglieder, die Konstante mißt daselbst die maximale Wellenhöhe. Diese Höhe der Wellenberge ist eine wachsende Funktion von $\varrho$, die ihr Maximum

$$\text{konst.}\left\{1+\frac{\pi^2 l^3}{3L^2R}\left(2-\frac{l}{R}\right)+\dots\right\}$$

auf dem äußeren Kanalrand erreicht. *Das Verhältnis der maximalen Wellenhöhe auf dem Außen- und Innenrand ist also in zweiter Näherung gleich*

$$\text{(4.17)}\quad 1+\frac{\pi^2}{3}\frac{l^3}{L^2R}\left(2-\frac{l}{R}\right),$$

und dies ist eine experimentell prüfbare Beziehung.

In gleicher Weise untersuchen wir nun, was der zweiten Gruppe (3. 22) von Eigenwerten entspricht. Wir bemerkten schon oben, daß mit wachsendem $R$ das Verhältnis $\frac{n}{R}$ gegen Null gehen muß, es streben also sowohl $L$ als auch $c$ gegen unendlich große Werte und verlieren somit ihren eigentlichen Sinn. Mittels (4. 5) erhalten wir für den Fall unendlicher Tiefe in erster Näherung:

$$\text{(4.18)}\quad \begin{aligned}\varphi(r,\vartheta_1,z) &= \text{konst.}\, e^{-\frac{k\pi}{l}z}\cdot\cos\left(k\pi\frac{\varrho}{l}\right)\cos\frac{2\pi}{L}(x-x_0-ct),\\ z &= \text{konst.}\cos\left(k\pi\frac{\varrho}{l}\right)\sin\frac{2\pi}{L}(x-x_0-ct),\end{aligned}$$

worin zu substituieren ist

$$c^2 = \left(R + \frac{l}{2}\right)^2 \omega^2 = \frac{g L^2 k}{4\pi l}\left(1 + \frac{4n^2+3}{8k^2\pi^2}\cdot\frac{l^2}{R^2} + \ldots\right).$$

Fassen wir ein endliches Stück des Kanals, also beschränkte Werte von $x - x_0$ ins Auge, und lassen $R$, mithin $L$ gegen $\infty$ gehen, so gibt die erste Näherung

$$\varphi(r, \vartheta_1, z) = \text{konst.}\, e^{-\frac{k\pi}{l} z} \cdot \cos\left(k\pi \frac{\varrho}{l}\right) \cos \sqrt{\frac{g k \pi}{l}}\, t,$$

$$(4.19)\qquad \begin{aligned} z &= \text{konst.} \cos\left(k\pi \frac{\varrho}{l}\right) \sin \sqrt{\frac{g k \pi}{l}}\, t \\ &= \text{konst.}\left\{\sin\frac{k\pi}{l}\left(\varrho + \sqrt{\frac{g l}{k\pi}}\, t\right) - \sin\frac{k\pi}{l}\left(\varrho - \sqrt{\frac{g l}{k\pi}}\, t\right)\right\}. \end{aligned}$$

*Es handelt sich demnach um die Überlagerung zweier in Richtung des Radius mit gleicher Amplitude und entgegengesetzter Geschwindigkeit fortschreitender Wellen* und zwischen ihrer Wellenlänge

$$\Lambda = \frac{2l}{k}$$

einerseits und ihrer Fortschreitungsgeschwindigkeit

$$\gamma = \sqrt{\frac{g l}{k\pi}}$$

andererseits *besteht wieder die für Airysche Wellen charakteristische Beziehung*

$$(4.20)\qquad \gamma^2 = \frac{g\Lambda}{2\pi}.$$

Es handelt sich im übrigen um Wellen mit festen Knotenpunkten, die denen entsprechen, die wir erhalten hätten, wenn wir in unserem Problem $R_2 = 0$ gesetzt, also eine kreisförmige Wanne zugrunde gelegt hätten.

## § 5.

## Der Massentransport.

Die gefundenen Formeln wollen wir noch benutzen, um den Massentransport unserer permanenten Wellen zu berechnen. Nehmen wir ein Querschnittselement $dr\,dz$ mit dem festen Argument $\vartheta$, das stets in der Flüssigkeit eingetaucht bleibt, so ist die im Zeitintervall von 0 bis $t$ hindurchgeströmte Flüssigkeitsmenge:

$$(5.1)\qquad dr\,dz \int_0^t v_\vartheta\, dt = -\frac{dr\,dz}{\omega}\int_\vartheta^{\vartheta_1} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\, d\vartheta_1 = \frac{dr\,dz}{\omega r}\{\varphi(\vartheta) - \varphi(\vartheta_1)\};$$

benutzen wir (2.12), so wird also diese Durchflußmenge:

$$(5.2)\qquad 2\frac{dr\,dz}{\omega r}C_n^{(i)}(r)\{e^{-\lambda_n^{(i)}z}+e^{-\lambda_n^{(i)}(2h-z)}\}$$
$$\times\sin\frac{n(\vartheta_1-\vartheta)}{2}\left\{\alpha_n^{(i)}\sin\frac{n(\vartheta_1+\vartheta)}{2}-\beta_n^{(i)}\cos\frac{n(\vartheta_1+\vartheta)}{2}\right\}.$$

Man schließt hieraus folgendes:

1. *Die Durchflußmenge ist eine abnehmende Funktion der Tiefe $z$.*

2. Sie ist eine periodische Funktion der Zeit und verschwindet nach Ablauf der Zeit $\frac{2\pi}{n\omega}$; in der Tat sind nach Ablauf dieser Epoche alle Verhältnisse die gleichen wie zur Zeit $t=0$. Die Flüssigkeit fließt bald in positiver, bald in negativer $\vartheta$-Richtung durch das Element und *im Mittel ist die durchgeführte Menge Null.*

Trotzdem findet ein Massentransport statt, der von den Elementen herrührt, die nicht dauernd eingetaucht bleiben, also an der Oberfläche liegen. Nehmen wir einen festen Querschnitt mit dem Argument $\vartheta$, so ist die zwischen 0 und $t$ durchgeflossene Flüssigkeitsmenge

$$(5.3)\qquad M=-\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta_1}d\vartheta_1\int_{R_2}^{R_1}\int_{z(\sigma)}^{h}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}dr\,dz;$$

die mittlere absolute Durchflußmenge in der Zeiteinheit definieren wir durch:

$$(5.4)\qquad Q=\lim_{t\to\infty}\frac{M}{t}=\lim_{\vartheta_1\to\infty}\frac{1}{\vartheta_1-\vartheta}\int_{\vartheta}^{\vartheta_1}d\vartheta_1\int_{R_2}^{R_1}\int_{z(\sigma)}^{h}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}dr\,dz.$$

Teilt man das Integral über $z$ in eines über die Strecke 0 bis $h$, und eines über $z(\sigma)$ bis 0, so erhält man den dem ersteren entsprechenden Teil von $Q$ durch Integration von (5.2) über $r$ und $z$, und da das Resultat reinperiodisch in $\vartheta_1-\vartheta$ ist, verschwindet dieser Teil von $Q$; es bleibt also

$$(5.5)\qquad Q=\lim_{\vartheta_1\to\infty}\frac{1}{\vartheta_1-\vartheta}\int_{\vartheta}^{\vartheta_1}d\vartheta_1\int_{R_2}^{R_1}\int_{z(\sigma)}^{0}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}dr\,dz.$$

Unter Anwendung des Mittelwertsatzes und der Formeln (2.12), (2.13) wird nun in erster Approximation

$$(5.6)\qquad \begin{aligned}\int_{z(\sigma)}^{0}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}dz&=nC_n^{(i)}(r)\,(1+e^{-2\lambda_n^{(i)}h})\,(\alpha_n^{(i)}\sin n\vartheta_1-\beta_n^{(i)}\cos n\vartheta_1)\cdot z(\sigma)\\&=\frac{n^2\omega}{g}(1+e^{-2\lambda_n^{(i)}h})^2\,C_n^{(i)}(r)^2\,(\alpha_n^{(i)}\sin n\vartheta_1-\beta_n^{(i)}\cos n\vartheta_1)^2.\end{aligned}$$

Man kann diesem Ausdruck die Form geben

$$\int_{z(\sigma)}^{0} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} dz = \frac{\omega}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1}\right)^2_{z=0},$$

so daß

$$Q = \frac{\omega l}{g} \cdot \overset{*}{v}{}_\vartheta^2 \tag{5.7}$$

wird, worin $\overset{*}{v}{}_\vartheta^2$ den Mittelwert von $v_\vartheta^2$ über den im Kanal liegenden Teil der Fläche $z = 0$ bedeutet. *Dieser Ausdruck ist ein Analogon der Levi-Civitaschen Formel für gestreckte Kanäle*[16].

Unter Berücksichtigung des unperiodischen Teils findet man aus (5.6):

$$Q = \frac{\omega n^2}{2g} (1 + e^{-2\lambda_n^{(i)} h})^2 (\alpha_n^{(i)2} + \beta_n^{(i)2}) \cdot \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r} C_n^{(i)}(r)^2 dr .$$

Es liegt nach (2.13) nahe, hierin den Ausdruck für die größte Wellenhöhe einzuführen; diese ist nämlich auf dem Mittelkreis des Kanals:

$$a = \frac{\omega n}{g} (1 + e^{-2\lambda_n^{(i)} h}) \sqrt{\alpha_n^{(i)2} + \beta_n^{(i)2}} \cdot C_n^{(i)}\left(R + \frac{l}{2}\right),$$

so daß man findet

$$Q = \frac{g a^2}{2\omega} \cdot \frac{1}{C_n^{(i)}\left(R + \frac{l}{2}\right)^2} \int_{R_2}^{R_1} \frac{C_n^{(i)}(r)^2}{r} dr . \tag{5.8}$$

Wir wenden diese Formel auf die verallgemeinerten Airyschen Wellen an. Dann gibt der Mittelwertsatz für den Fall schwacher Krümmung in erster Näherung

$$Q = \frac{g l a^2}{2\omega\left(R + \frac{l}{2}\right)} = \frac{g l a^2}{2c}, \tag{5.9}$$

was der Levi-Civitaschen Formel im klassischen Falle entspricht[17]. Mittels (4.12) erhalten wir bis auf sich weghebende konstante Faktoren:

$$\int_{R_2}^{R_1} \frac{C_n^{(1)}(r)^2}{r} dr = \frac{l}{R} \Big\{1 + \frac{l}{R}\Big[-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\pi^2 \frac{l^2}{L^2}\Big] + \frac{l^2}{R^2}\Big[\frac{1}{3} - \frac{32}{45}\pi^2 \frac{l^2}{L^2} + \frac{52}{315}\pi^4 \frac{l^4}{L^4}\Big] + \dots\Big\},$$

$$C_n^{(1)}\left(R + \frac{l}{2}\right)^2 = 1 + \frac{2}{3}\pi^2 \frac{l^2}{L^2} \cdot \frac{l}{R} + \Big[-\frac{1}{6}\pi^2 \frac{l^2}{L^2} + \frac{1}{9}\pi^4 \frac{l^4}{L^4}\Big] \cdot \frac{l^2}{R^2} + \dots,$$

---

[16]) Vgl. a. a. O. [4]), S. 93.

[17]) Vgl. a. a. O. [4]), S. 95.

und somit aus (5.8) die Beziehung:

$$Q = a^2 \frac{g\,l}{2\,\omega R}\left\{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{R} + \left[\frac{1}{3} - \frac{19}{90}\pi^2\frac{l^2}{L^2} + \frac{17}{315}\pi^4\frac{l^4}{L^4}\right]\cdot\frac{l^2}{R^2} + \cdots\right\}$$

oder schließlich wegen (4.9):

$$Q = \frac{a^2 g\,l}{2\,c}\left\{1 + \frac{l^2}{R^2}\left[\frac{1}{12} - \frac{19}{90}\pi^2\frac{l^2}{L^2} + \frac{17}{315}\pi^4\frac{l^4}{L^4}\right] + \cdots\right\}. \tag{5.10}$$

*Diese Formel drückt die mittlere Durchflußmenge, die einen Effekt zweiter Ordnung darstellt, durch lauter meßbare Größen aus* und ist die Verallgemeinerung des Levi-Civitaschen Resultates.

Rom, den 21. Mai 1928.

(Eingegangen am 26. 5. 1928.)