# Über ein topologisches Theorem.

Von

Witold Hurewicz in Amsterdam.

Bei dem Aufbau der Topologie der höher-dimensionalen Euklidischen Räume spielt eine wichtige Rolle das folgende Theorem, das von Lebesgue[1]) ausgesprochen und von Brouwer[2]) zum erstenmal bewiesen wurde:

(A) *Zerlegt man ein beschränktes abgeschlossenes Gebiet*[3]) *des Euklidischen $n$-dimensionalen Zahlenraumes $R_n$ in endlich viele abgeschlossene Mengen, deren Durchmesser hinreichend klein sind*[4]), *so gibt es Punkte, die mindestens $n+1$ dieser Mengen gemeinsam sind.*

Aus diesem Theorem kann nach Lebesgue[5]) sehr einfach der berühmte Brouwersche *Invarianzsatz*[6]) gefolgert werden, welcher die Unmöglichkeit einer ein-eindeutigen stetigen Abbildung zwischen einem $n$- und einem $m$-dimensionalen Gebiet für $n \neq m$ behauptet. Einerseits bleibt nämlich die im Satz (A) ausgedrückte Eigenschaft des $n$-dimensionalen Gebietes bei ein-eindeutigen stetigen Abbildungen erhalten[7]); anderseits kommt diese Eigenschaft einem $m$-dimensionalen Gebiet für $m < n$ nicht

---

[1]) In Math. Ann. **70**, S. 166—168. Vgl. ferner Fund. Math. 2, S. 257.

[2]) Im Crelleschen Journal **142** (1913), S. 150. — Ein zweiter Beweis findet sich bei Lebesgue in Fund. Math. 2, S. 257.

[3]) Unter einem offenen Gebiet (des Euklidischen $n$-dimensionalen Raumes) versteht man eine Menge, die aus lauter inneren Punkten besteht. Ein abgeschlossenes Gebiet ist per Definition ein offenes Gebiet mitsamt seinem Rand. — Formal gilt der Satz auch für nicht-beschränkte Gebiete, dieselben lassen sich doch überhaupt nicht in endlich viele beschränkte Mengen zerlegen.

[4]) D. h. kleiner als eine gewisse nur von dem betrachteten Gebiet abhängige Schranke.

[5]) Vgl. die sub [1]) zitierten Arbeiten von Lebesgue.

[6]) Vgl. Brouwer, Math. Annalen **70**, S. 161.

[7]) Dies ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß jede ein-eindeutige stetige Abbildung einer beschränkten abgeschlossenen Menge gleichmäßig stetig ist.

zu: jedes beschränkte abgeschlossene Gebiet des $R_m$ läßt sich vielmehr in endlich viele beliebig kleine, abgeschlossene Teile zerlegen, deren je $m+2$ (also a fortiori je $n+1$, wenn $m < n$ ist) keinen gemeinsamen Punkt besitzen[8]).

Eine wichtige Anwendung findet ferner der Satz (A) in der auf der rekursiven Definition der Dimensionszahl beruhenden *Dimensionstheorie*[9]), indem er die Grundlage für den von Brouwer bewiesenen „Rechtfertigungssatz des Dimensionsbegriffes" bildet, wonach dem Euklidischen $R_n$ (oder, was auf dasselbe hinauskommt, einem beschränkten Gebiet des $R_n$) auch im Sinne der genannten Theorie die Zahl $n$ als Dimension zugewiesen wird[10]). Der wesentliche Inhalt dieses Theorems steckt in der Behauptung, daß die Dimension des $R_n$ *nicht kleiner ist als* $n$[11]). Nun führt sich aber die letztere Behauptung auf Satz (A) zurück auf Grund der Tatsache, daß ein kompakter Raum von einer Dimension $< n$ die im Satz (A) formulierte Eigenschaft nicht besitzt[12]).

Im folgenden wird ein Beweis des Lebesgue-Brouwerschen Satzes (A) gegeben, der sich von den bisherigen Beweisen hauptsächlich durch Verwendung der sog. (siehe unten) „ziegelartigen" Kombination von $n$-dimensionalen Intervallen unterscheidet, was einen glatten Induktionsschluß nach der Dimensionszahl ermöglicht und eine bedeutende Vereinfachung des Beweises bewirkt. Im übrigen knüpft unser Beweis sehr eng an die Darstellung von Lebesgue[13]) an[13a]).

---

[8]) Vgl. Lebesgue, Fund. Math. 2, S. 265ff.

[9]) Vgl. etwa Menger, Bericht über die Dimensionstheorie, Jahresber. d. D. Math.-Ver. **35** (1926), S. 113.

[10]) Das erste Mal wurde das Theorem von Brouwer (in der sub [2]) zitierten Arbeit) bewiesen. Über weitere Literatur vgl. Menger l. c. [9]), S. 123. — Aus dem genannten Theorem in Verbindung mit der fast trivialen Tatsache, daß die Dimension eine topologische Invariante von Punktmengen ist, folgt der oben angeführte Brouwersche „Invarianzsatz".

[11]) Daß die Dimension des $R_n$ nicht größer ist als $n$, ist höchst einfach zu zeigen; vgl. etwa Menger, Monatshefte f. Math. u. Phys. **34** (1924), S. 152.

[12]) D. h. ein kompakter Raum von einer Dimension $< n$ ist in endlich viele beliebig kleine abgeschlossene Teile zerlegbar, die zu je $n+1$ fremd sind (vgl. Menger, letztes Zit., S. 153; Urysohn, Fund. Math. 8, S. 292). Von Urysohn (vgl. die soeben zitierte Abhandlung, S. 294) wurde gezeigt, daß dieses Verhalten für die weniger als $n$-dimensionalen kompakten Räume auch charakteristisch ist, so daß also zwischen dem Satz (A) und der Behauptung, daß der $R_n$ mindestens $n$-dimensional ist, eine vollständige Äquivalenz besteht.

[13]) Vgl. Fund. Math. 2 (1921), S. 257.

[13a]) In dem während der Korrektur dieser Arbeit erschienenen Aufsatze von E. Sperner (Abhandlungen des Hamburgischen Math. Sem. 6, S. 265—272, eingereicht im Juni 1928) findet sich ein Beweis des Lebesgue-Brouwerschen Theorems, welcher mit dem hier dargelegten eine weitgehende Analogie aufweist.

## § 1.

Wir betrachten ein $n$-dimensionales Intervall $I^n$[14]), d. h. die Gesamtheit aller Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des Zahlenraumes $R_n$, deren Koordinaten $n$ Ungleichungen:

$$a_i \leqq x_i \leqq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen, wo $a_i$, $b_i$ vorgegebene reelle Zahlen bedeuten und $a_i < b_i$ vorausgesetzt wird.

Denken wir uns das vorgelegte $n$-dimensionale Intervall $I$ in eine Anzahl von $n$-dimensionalen Teilintervallen

$$(') \qquad Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$$

zerlegt, die zu je zwei keine inneren Punkte gemein haben. Wir nennen diese Zerlegung *ziegelartig*[15]), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Kein Punkt gehört mehr als $n+1$ verschiedenen Intervallen $Z_i$ an

2. Sind irgendwie $k$ von den Intervallen $(')$ gegeben, wo $2 \leqq k \leqq n+1$ ist, und haben diese $k$ Intervalle gemeinsame Punkte, so bilden die letzteren ein $(n+1-k)$-dimensionales Intervall; insbesondere haben also je $n+1$ der Intervalle $Z_i$, wenn überhaupt, dann nur einen Punkt gemein[16])[17]).

Die beigefügte Figur gibt ein Beispiel einer ziegelartigen Zerlegung des Quadrates. Man erkennt leicht die allgemeine Gültigkeit der folgenden, in den Fällen $n = 2,3$ anschaulich evidenten Tatsache: Ein $n$-dimensionales Intervall $I^n$ kann ziegelartig in Teilintervalle zerlegt werden, deren Kantenlängen kleiner sind als eine willkürlich vorgegebene positive Zahl $\varepsilon$.[18])

---

[14]) Den Index $n$ werden wir, wofern keine Mißverständnisse entstehen können, weglassen.

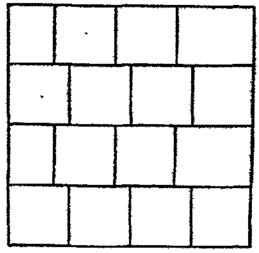
[15]) Diese Zerlegungen wurden zum anderen Zwecke bereits von Lebesgue l. c. [8]) verwendet. Vgl. oben Fußnote [8]) und die zugehörige Stelle im Text.

[16]) Wir bezeichnen nämlich eine aus nur einem Punkte bestehende Menge als ein 0-dimensionales Intervall.

[17]) Es sei der Vollständigkeit halber bemerkt, daß die Bedingung 2. von selbst erfüllt ist, wenn 1. gilt und überdies die Teilintervalle $Z_i$ so klein sind, daß keines von ihnen zwei gegenüberliegende Seiten des Intervalls $I$ verbindet. Im folgenden findet diese Bemerkung keinerlei Anwendung.

[18]) Vgl. Lebesgue a. a. O. S. 266. — Man kann dies anders zeigen, indem man sich auf die folgende Bemerkung stützt: Es liege eine ziegelartige Zerlegung des Intervalls $I$ in die Intervalle $Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ vor. Zerlegt man eines der letztgenannten Intervalle, etwa $Z_1$, in zwei Intervalle $Z_1'$ und $Z_1''$, so ist auch die Zerlegung von $I$ in die $m+1$ Intervalle $Z_1'$, $Z_1''$, $Z_i$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$ ziegelartig, wofern

Im folgenden werden $I$ als ein festes $n$-dimensionales Intervall und $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ als Teilintervalle einer beliebigen, aber ebenfalls festgewählten ziegelartigen Zerlegung von $I$ vorausgesetzt. Es gelten folgende einfache Behauptungen:



(a) Projiziert man auf eine $(n-1)$-dimensionale Seite $B$ des Intervalls $I$ alle an $B$ anstoßenden Intervalle ($'$), so erhält man eine ziegelartige Zerlegung des $(n-1)$-dimensionalen Intervalls $B$.

(b) Ist die Strecke $s$ Durchschnitt von $n$ Intervallen $Z_i$ [19]), so ist jeder der beiden Endpunkte von $s$, wofern derselbe im Innern von $I$ liegt, gemeinsamer Punkt von $n+1$ Intervallen $Z_i$ [20]). Alle übrigen Punkte von $s$ gehören hingegen nur $n$ Intervallen $Z_i$ an[21]).

## § 2.

Indem wir jetzt die Intervalle ($'$) irgendwie in Gruppen verteilen und die Vereinigungsmenge der Intervalle jeder Gruppe bilden, bekommen wir eine neue Zerlegung:

$$I = D_1 + D_2 + \ldots + D_k,$$

---

nur die $Z_1'$ und $Z_1''$ trennende $(n-1)$-dimensionale Ebene mit keiner der Grenzebenen der Intervalle $Z_2, \ldots, Z_m$ zusammenfällt. Wenn man nun von einer beliebigen ziegelartigen Zerlegung von $I$ ausgeht (etwa von der trivialen „Zerlegung", bei der $I$ selbst als das einzige Teilintervall auftritt) und durch wiederholte Anwendung der obigen Bemerkung die Intervalle der Zerlegung sukzessiv verkleinert, gelangt man schließlich zu einer Zerlegung von dem vorgeschriebenen Feinheitsgrad.

[19]) Wir erinnern daran, daß je $n$ Intervalle ($'$) entweder keinen gemeinsamen Punkt haben, oder eine (zu einer der Koordinatenachsen parallele) Strecke als Durchschnitt haben.

[20]) Sei etwa $s$ der Durchschnitt der Intervalle

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \qquad \text{(x)}$$

und sei $p$ ein im Innern von $I$ gelegener Endpunkt von $s$. Setzen wir $s$ über $p$ hinaus um eine kleine Strecke $s'$ fort, so kann $s'$ nicht allen Intervallen $(x)$ angehören. Nehmen wir an, $s'$ liege außerhalb $Z_1$. Die im Punkte $p$ senkrecht zu $s$ errichtete $(n-1)$-dimensionale Ebene bildet Grenze zwischen $Z_1$ und einem Intervall $Z_i$, das von sämtlichen Intervallen $(x)$ verschieden ist. Also ist $p$ $n+1$ Intervallen $Z_i$ gemeinsam.

[21]) Angenommen nämlich, der Punkt $p$ der Strecke $s$ gehört außer den Intervallen $Z_{i_1}, Z_{i_2}, \ldots, Z_{i_n}$, deren Durchschnitt $s$ ist, noch einem Intervalle $Z_k$ an. Dann ist $p$ der *einzige* Punkt des Durchschnittes $Z_{i_1} \cdot Z_{i_2} \ldots Z_{i_n} \cdot Z_k$, also der einzige gemeinsame Punkt des $n$-dimensionalen Intervalls $Z_k$ und des ein-dimensionalen Intervalls $s$, was nur dann möglich ist, wenn $p$ Endpunkt von $s$ ist.

wo also jede der Mengen $D_i$ entweder mit einem der Intervalle $Z_i$ zusammenfällt oder Summe von mehreren $Z_i$ ist, und jedes $Z_i$ nur einem der Komplexe $D_i$ angehört. Wir wollen zeigen:

(A′) *Unter der Voraussetzung, daß keiner der Intervallkomplexe $D_i$ Punkte auf zwei gegenüberliegenden Randseiten von $I$ besitzt, gibt es Punkte, die $n+1$ der Mengen $D_i$ gemeinsam sind*[22]).

Diese Behauptung ist nichts anderes als der Lebesgue-Brouwersche Satz (A), ausgesprochen für die Zerlegungen des Intervalls I in die speziellen Mengen $D_i$.

Zum Beweise numerieren wir zunächst die Seiten von $I$

$$B_1, B_2, \ldots, B_n, \quad B_1', B_2', \ldots, B_n',$$

und zwar so, daß mit $B_i$ und $B_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zwei gegenüberliegende Seiten bezeichnet werden. Sodann verstehen wir unter $E_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ die Summe aller derjenigen $D_j$, die die Seite $B_i$ berühren, aber zu sämtlichen Seiten $B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}$ punktfremd sind. Die Summe jener $D_j$, die mit keiner der $n$ Seiten $B_i$ gemeinsame Punkte haben (d. h. in keine der bisher definierten Mengen $E_i$ eingehen) bezeichnen wir mit $E_{n+1}$. Es gilt dann:

$$(*) \quad E_i B_i' = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \quad E_i B_{i-1} = 0 \ (i = 2, 3, \ldots, n+1).$$ [22a])

Ein Punkt, der allen $n+1$ Mengen $E_i$ gemeinsam ist, gehört zu mindestens $n+1$ verschiedenen Mengen $D_i$, denn jedes $D_i$ ist in genau einem $E_j$ enthalten. Daraus ergibt sich, daß die Behauptung (A′) von dem folgenden Satz impliziert wird:

(A″) Ist jede der $n+1$ Mengen

$$E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$$

Summe von Intervallen (′), bzw. mit einem dieser Intervalle identisch, wobei jedes $Z_i$ einem und nur einem $E_j$ angehört, und sind die Bedingungen (*) erfüllt, so haben die Mengen $E_i$ mindestens einen gemeinsamen Punkt.

Wir wenden uns nun dem Beweis des Satzes (A″) zu. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Dimensionszahl $n$, was dadurch ermöglicht wird, daß wir gleichzeitig mit (A″) noch die folgende Zusatzbehauptung beweisen: Der Durchschnitt $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$ (der, wenn nicht leer, jedenfalls nur endlich viele Punkte besitzt[23])) besteht aus einer *ungeraden Anzahl von Punkten*.

---

[22]) Bei Lebesgue, Fund. Math. 2, S. 257 wird die analoge Behauptung für Komplexe aus Intervallen einer „Gitterzerlegung" bewiesen. Für ziegelartige Zerlegungen gestaltet sich der Beweis, wie wir sogleich sehen werden, wesentlich einfacher.

[22a]) Dagegen erfüllen die Mengen $E_i$ für $n > 1$ die Voraussetzung des Satzes (A′) nicht.

[23]) Denn jeder seiner Punkte ist Schnittpunkt von $n+1$ Intervallen $Z_i$, die Anzahl dieser Schnittpunkte ist aber endlich $\left(\text{nämlich} \leqq \binom{m}{n+1}, \text{ wo } m \text{ die Anzahl aller } Z_i \text{ ist}\right)$.

Für $n = 1$ ist die Behauptung (A″) nebst Zusatz trivial. In der Tat, die nulldimensionalen Seiten $B_1$ bzw. $B_1'$ des eindimensionalen Intervalls $I = [a, b]$ sind bei passender Bezeichnung die Endpunkte $a$ bzw. $b$, also enthält der Intervallkomplex $E_1$ $a$, aber nicht $b$, und ein Punkt, der sich längs der Strecke $I$ von $a$ nach $b$ bewegt, gelangt aus $E_1$ in $E_2$, muß demnach eine ungerade Anzahl von Malen die Grenze zwischen $E_1$ und $E_2$ überschreiten. Mit andern Worten haben die Intervallsummen $E_1$ und $E_2$ eine ungerade Anzahl von Punkten gemein.

Sei nun $n > 1$. Wir nehmen unsere Behauptungen für $n - 1$ als bewiesen an und wollen daraus ihre Gültigkeit für $n$ herleiten.

Wegen $B_n \cdot E_{n+1} = 0$ ist $B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} B_n \cdot E_i$. Nach der Behauptung (a) in § 1 sind die Mengen $B_n \cdot E_i$ Summen von Teilintervallen einer ziegelartigen Zerlegung des $(n-1)$-dimensionalen Intervalls $B_n$. Ferner erfüllen diese Mengen, wie man leicht sieht, die den Bedingungen (*) analogen Bedingungen in bezug auf die entsprechend numerierten $(n-2)$-dimensionalen Seiten von $B_n$,[24]) woraus sich vermöge der Induktionsannahme ergibt, daß der Durchschnitt $\prod\limits_{i=1}^{n} B_n \cdot E_i = B_n \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} E_i$ nicht leer ist und aus einer ungeraden Anzahl von Punkten besteht. Setzen wir zur Abkürzung $P = \prod\limits_{i=1}^{n} E_i$ und bemerken wir, daß (nach den Annahmen (*)), die Seite $B_n$ ausgenommen, keine Seite des Intervalls $I$ von $P$ berührt wird, so haben wir:

I. Die Menge $P$ ist nicht leer und besitzt eine ungerade Anzahl von Punkten auf dem Rande von $I$.

$P$ setzt sich aus einer Anzahl von Strecken

$$s_1, s_2, \ldots, s_r$$

zusammen (wir nennen sie *Teilstrecken* von $P$), wo $s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ Durchschnitt ist von $n$ Intervallen

$$Z_{i_1}, Z_{i_2}, \ldots, Z_{i_n}, \tag{1}$$

die bei entsprechender Anordnung die Beziehungen erfüllen:

$$Z_{i_k} \subset E_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Betrachten wir die Endpunkte der Strecken $s_i$, oder, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, die *Eckpunkte* von $P$.[25]) Wir sprechen von einem

[24]) Die Rolle der Seiten $B_i$ bzw. $B_i'$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ wird nämlich von den Projektionen dieser Seiten auf $B_n$ übernommen.

[25]) Aus der Bemerkung (b) in § 1 folgt, daß ein Punkt von $P$ dann und nur dann ein Eckpunkt ist, wenn in ihm $n+1$ Intervalle $Z_i$ zusammenstoßen.

Eckpunkt *m-ter Ordnung*, wenn $m$ die Anzahl der Strecken ist, welche ihn als Endpunkt besitzen. Wir zeigen:

II. Jeder Eckpunkt von $P$ hat höchstens die Ordnung 2. Eckpunkte von der Ordnung 1 sind erstens die auf der Grenze von $I$ gelegenen Punkte von $P$ und zweitens die Punkte des Durchschnittes $\Pi = \prod_{i=1}^{n+1} E_i$.[26]) Alle übrigen Eckpunkte sind von zweiter Ordnung.

Daß jeder auf der Grenze von $I$ liegende Punkt von $P$ Eckpunkt erster Ordnung ist, ist klar. Sei jetzt $p$ ein im Innern von $I$ gelegener Eckpunkt von $P$, etwa Endpunkt der Teilstrecke $s_i$ von $P$, die als Durchschnitt der Intervalle (1) definiert ist. Nach der Bemerkung (b) im vorigen Paragraphen gehört $p$ außer den $n$ Intervallen (1) noch einem Intervall

$$Z_{i_{n+1}}$$

an, das in (1) nicht vorkommt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $p$ liegt in $\Pi = P \cdot E_{n+1}$. Dann ist eines der $p$ enthaltenden Intervalle $Z_i$ in $E_{n+1}$ enthalten. Nach (2) kann dies nur das Intervall $Z_{i_{n+1}}$ sein, es ist also $Z_{i_{n+1}} \subset E_{n+1}$, und daher ist das System (1) das einzige $n$-tupel aus in $p$ zusammenstoßenden Intervallen $Z_i$, in dem Intervalle aus jedem der $n$ Komplexe $E_1, E_2, \ldots, E_n$ vertreten sind. Dies bedeutet aber, daß $s_i = \prod_{k=1}^{n} Z_{i_k}$ die einzige in $p$ mündende Teilstrecke von $P$ ist. Somit ist $p$ ein Eckpunkt *erster* Ordnung.

2. $p$ liegt außerhalb $\Pi$, also außerhalb $E_{n+1}$. Dann ist $Z_{i_{n+1}}$ in einem $E_k$ für $k \leqq n$ enthalten. Aus dem System der $n+1$ Intervalle $Z_{i_k}$ kann man dann außer dem $n$-tupel (1) noch ein und nur ein $n$-tupel herausgreifen, in dem je ein Intervall aus jedem der $n$ Komplexe $E_1, E_2, \ldots, E_n$ vorkommt, nämlich das $n$-tupel

$$(3) \qquad Z_{i_1}, \ldots, Z_{i_{k-1}}, \quad Z_{i_{k+1}}, \ldots, Z_{i_{n+1}}.$$

In $p$ münden somit zwei Teilstrecken von $P$: die Strecke $s_j$ und die als Durchschnitt des $n$-tupels (3) definierte Strecke $s_i'$.[27]) Folglich ist $p$ ein Eckpunkt *zweiter* Ordnung. Damit ist die Behauptung II[27a]) bewiesen.

Sei $\alpha_1$ bzw. $\alpha_2$ die Anzahl aller Eckpunkte erster bzw. zweiter Ordnung von $P$. Da $\alpha_1 + 2\alpha_2$ die verdoppelte Anzahl aller Teilstrecken von

---

[26]) Mit Rücksicht auf [25]) ist jeder Punkt von $\Pi$ Eckpunkt von $P$.

[27]) Daß $p$ *Endpunkt* der letzteren Strecke ist, folgt aus der Behauptung 2 in § 1.

[27a]) Man kann II auch in der Gestalt aussprechen: Die Menge $P$ besteht aus einer Anzahl von (geschlossenen oder nicht geschlossenen) Streckenzügen, deren im Innern von $I$ gelegene Endpunkte mit den Punkten von $\Pi$ übereinstimmen.

$P$ ist, ist die Zahl $\alpha_1$ *gerade*. Von den $\alpha_1$ Eckpunkten erster Ordnung liegt aber nach I eine ungerade Anzahl auf der Grenze von $I$ und daher eine ebenfalls ungerade Anzahl im Innern von $I$. Nach II bedeutet dies, daß $\Pi$ nicht leer ist und aus einer ungeraden Anzahl von Punkten besteht. Damit ist (A″) und folglich auch (A′) bewiesen[28]) [28a]).

## § 3.

Den Übergang von dem kombinatorischen, finiten Satz (A′) zu dem mengentheoretischen, infinitesimalen Satz (A) vollziehen wir durch eine fast wörtliche Wiederholung des entsprechenden Lebesgueschen Schlusses[29]):

Sei $G$ ein abgeschlossenes Gebiet des $R_n$. $G$ enthält ein $n$-dimensionales Intervall von einer Kantenlänge $l$. Wir wollen zeigen, daß bei jeder Summendarstellung $G = \sum_{i=1}^{m} A_i$, wo $A_i$ abgeschlossene Mengen mit Durchmessern $< l$ sind, Punkte existieren, die $n+1$ dieser Mengen gemeinsam sind.

Nehmen wir zu dem Zwecke eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, die alle so klein gewählt sind, daß für jedes $A_i$ die Umgebungen $U(A_i, \varepsilon_k \sqrt{n})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ [30]) Durchmesser $< l$ haben. Für jedes natürliche $m$ nehmen wir eine ziegelartige Zerlegung $(\sigma_m)$ des Intervalls $I$ in Intervalle mit Kantenlängen $< \varepsilon_m$ [31]) vor und bilden bei gegebenem $m$ zu jedem $A_i$ die Summe $S_m^i$ aller derjenigen Intervalle von $\sigma_m$, die mit $A_i$ gemeinsame Punkte haben. Es ist $S_m^i \subset U(A_i, \varepsilon_m \sqrt{n})$, daher sind die Durchmesser der $S_m^i$ kleiner als $l$, und keines der $S_m^i$ berührt zwei gegenüberliegende Seiten von $I$. Nach (A′) gibt es bei jedem $m$ einen Punkt $p_m$, der $n+1$ der Mengen $S_m^i$ angehört. Dieser Punkt hat offenbar die folgende Eigenschaft: Der $n$-dimensionale Würfel von der Kantenlänge $2\varepsilon_m$

---

[28]) Es sei nachdrücklich auf den *rein kombinatorischen Charakter* aller bisherigen Überlegungen hingewiesen. Daß wir scheinbar die Geometrie der kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten verwendeten, diente nur zur Vereinfachung.

[28a]) (Zusatz bei der Korrektur.) Der angeführte Beweis wurde auf Grund meiner mündlichen Mitteilungen von Menger in seinem unlängst erschienenen Buche „Dimensionstheorie" (Leipzig 1928) reproduziert (S. 254–258). Zu beachten ist, daß sich in die Mengersche Darstellung ein Fehler eingeschlichen hat, indem dort die Gültigkeit der für die Mengen $D_i$ (bei Menger heißen dieselben $A_i$) im Satz (A′) vorausgesetzten Bedingung auch für die Mengen $E_i$ (bei Menger $B_i$) des Satzes (A″) angenommen wird. Vgl. oben Fußnote [22a]).

[29]) Vgl. Lebesgue, a. a. O. S. 259. Im Gegensatz zu den bisher verwendeten „finiten" Schlüssen hat dieser Schluß einen infinitesimalen Charakter.

[30]) Unter einer Umgebung $U(A, p)$ versteht man die Menge aller Punkte, die von der gegebenen Menge $A$ einen Abstand kleiner als $p$ haben.

[31]) Daß eine derartige Zerlegung existiert, haben wir in § 1 gesehen.

mit dem Punkt $p_m$ als Mittelpunkt besitzt gemeinsame Punkte mit mindestens $n+1$ Mengen $A_i$.

Betrachten wir einen Häufungspunkt $p$ der unendlichen Folge $p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$, so enthält offenbar jede beliebige Umgebung von $p$ Punkte aus $n+1$ verschiedenen $A_i$. Da es aber mit Rücksicht auf die Abgeschlossenheit der $A_i$ eine Umgebung von $p$ gibt, die Punkte nur aus jenen $A_i$ besitzt, die den Punkt enthalten, so liegt $p$ in mindestens $n+1$ der Mengen $A_i$. Damit ist (A) bewiesen.

Bemerken wir noch, daß sich aus den vorstehenden Überlegungen die Gültigkeit des folgenden Satzes ergibt: Wird ein $n$-dimensionales Intervall in $n+1$ abgeschlossene Mengen $E_1 E_2 \ldots E_{n+1}$ zerlegt, so daß die „Randbedingungen" (*) in § 2 erfüllt sind, so haben die $n+1$ Mengen $E_i$ mindestens einen Punkt gemeinsam.

(Eingegangen am 15. 1. 1928.)