Darstellung ebener Spannungszustände mit Hilfe von winkeltreuen Abbildungen.

Von **A. Nádai** in Göttingen.

(Eingegangen am 25. August 1926.)

Zwei Fälle des ebenen Problems eines elastischen Körpers, in denen die Spannungsverteilung, aus einer Randwertaufgabe der Potentialtheorie sich herleiten läßt.

Es ist bekanntlich bisher mit Ausnahme vereinzelter Fälle[1]) nicht möglich gewesen für die beiden ebenen Probleme eines elastischen Körpers die Methoden der winkeltreuen Abbildungen, wie man sie z. B. bei den Aufgaben über ebene Potentialströmungen zu benutzen pflegt, anzuwenden. Für ein durch eine Ebene begrenztes Gebiet eines elastischen Körpers, in dem ein ebener Spannungszustand herrscht, habe ich vor mehreren Jahren eine Form der Lösung aufgestellt, die eine Anwendung der Verfahren der winkeltreuen Abbildungen zuläßt. Da mir inzwischen eine Arbeit von S. D. Carothers[2]) bekannt wurde, in der von ähnlichen Ansätzen Gebrauch gemacht wird, sollen die beiden Formen hier mitgeteilt werden, in denen man die allgemeine Lösung unter der eben erwähnten Einschränkung in anschaulicher Weise darstellen kann.

Um die drei Spannungskomponenten im ebenen Problem σ_x, σ_y, τ mittels einer Spannungsfunktion $F(x, y)$ darzustellen:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

muß bekanntlich F der Differentialgleichung $\varDelta\varDelta F = 0$ genügen.

Dieser Gleichung genügen Funktionen, für die $\varDelta F = 0$ ist, ferner $F = (x^2 + y^2)\varphi$, wo $\varDelta\varphi = 0$. Eine weniger benutzte Form für Lösungen ist $x\varphi$ oder $y\varphi$ mit $\varDelta\varphi = 0$.

1. Erste Lösung. Es werde $F = y\varphi + f$ angenommen, wo $\varDelta\varphi = 0$, $\varDelta f = 0$.

Dann ist
$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= 2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \\ \tau &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \end{aligned}\right.$$

[1]) Einen solchen bildet der Spannungszustand in einem durch eine Einzelkraft belasteten Plattenstreifen. Vgl. „Die elastischen Platten“, S. 89, Berlin 1925.

[2]) Proc. Roy. Soc. (A) **97**, 110, 1920, 123.

Setzt man nun $v = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ und verlangt, daß

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = v,$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

werden sollen, so folgt

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

also $\varphi = -\frac{\partial f}{\partial y}$ und

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= v + y\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_y &= v - y\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau &= \quad\; - y\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

2. Zweite Lösung. In ähnlicher Weise leitet man, von der Form $F = y\varphi$ ausgehend, wo $\varDelta\varphi = 0$ ist, mit

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

den Spannungszustand

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2v + y\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_y &= -y\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \tau &= -u + y\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ab.

Die Gleichungen (1) stellen einen ebenen Spannungszustand in einem elastischen Körper dar, der durch die Ebene $y = 0$ begrenzt ist und auf dieser Ebene nur durch Normalspannungen $\sigma_y = v(x)$ belastet wird.

In analoger Weise stellen die Gleichungen (2) einen ebenen Spannungszustand dar, bei dem die Ebene $y = 0$ nur durch Schubspannungen $\tau = -u(x)$ belastet wird. Man erkennt ferner, daß der Spannungszustand sich in beiden Fällen aus einer komplexen Funktion Z der Veränderlichen $z = x + iy$

$$Z(z) = \varphi + i\psi$$

berechnen läßt. Es ist $\frac{dZ}{dz} = u - iv$, ähnlich wie bei ebenen Potentialströmungen. Beide Spannungsprobleme sind auf die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie zurückgeführt, im ersten Falle [Gleichung (1)] ist auf dem Rande $y = 0$, $\sigma_y = v(x)$, im zweiten Falle [Gleichung (2)] $\tau = -u(x)$ und im Innern des Gebietes $y > 0$ ist $\Delta u = 0$ bzw. $\Delta v = 0$. Dazu kommt noch eine Bedingung für das Unendliche.

Sind z. B. die Normalspannungen σ_y auf $y = 0$ vorgeschrieben (die Druckverteilung über einem elastischen Grund) und im Unendlichen alle Spannungen gleich 0, so spanne man eine dünne Membran über der positiven Halbebene $y > 0$ so aus, daß sie für $y = \infty$ mit der xy-Ebene zusammenfällt und daß ihre Ordinaten auf $y = 0$ gleich den vorgeschriebenen Werten des Druckes $\sigma_y = f(x) = v$ werden. Durch die Gestalt dieser Membran wird die Funktion v erhalten, die Spannungen hängen von den Ordinaten von v und von den Ableitungen von v nach den Koordinaten x und y ab [Gleichung (1)].

Auch die Verschiebungen ξ, η lassen sich durch Z und $\frac{dZ}{dz}$ darstellen. Es ist z. B. im Falle 1 (G = Schubelastizitätsmodul)

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2G}\left[-(1-2\nu)\psi - yu\right] + c_1 + c_3 y, \\ \eta &= \frac{1}{2G}\left[\ 2(1-\nu)\varphi - yv\right] + c_2 - c_3 x. \end{aligned}\right.$$

Göttingen, am 18. Juli 1926.