Ueber die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen.

Von

Hermann Minkowski in Zürich.

Obwohl die Theorie der Annäherung an eine reelle Grösse mit Hülfe von Kettenbrüchen seit Euler und Lagrange noch mannigfache Behandlung erfahren hat, scheint einer der interessantesten Sätze auf diesem Gebiete bisher nicht bemerkt worden zu sein. Nämlich unter den verschiedenen möglichen Kettenbruchentwicklungen für eine reelle Grösse a, wobei die Theilzähler ± 1 und die Theilnenner positive ganze Zahlen sind, giebt es eine bestimmte Art der Entwicklung (und zwar die am besten convergirende), *für welche die sämmtlichen Näherungsbrüche* $\frac{x}{y}$ *sich von vornherein in einfachster Weise charakterisiren lassen: Als Zähler und Nenner der einzelnen Näherungsbrüche erscheinen dabei genau die sämmtlichen Paare von ganzen Zahlen* x, y, *für die* $y > 0$ *ist,* x *und* y *relativ prim sind und dazu die Bedingung*

$$|(x-ay)y| < \frac{1}{2}$$

erfüllt ist. Von dem Falle, dass a gleich einer ganzen Zahl $+\frac{1}{2}$ ist, hat man hierbei abzusehen.*)

*) Bekanntlich lässt sich eine nach fallenden Potenzen von z fortschreitende convergente Reihe

$$f(z) = c_{-m}z^m + c_{-m+1}z^{m-1} + \cdots + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots$$

in einen Kettenbruch

$$F_0(z) + \frac{1\,|}{|F_1(z)} + \frac{1\,|}{|F_2(z)} + \cdots$$

umwandeln, sodass $F_0(z)$ eine ganze rationale Function von z und $F_1(z)$, $F_2(z)$, $\cdots$ ganze rationale Functionen von z mindestens vom Grade 1 sind. Dabei gilt der Satz: Ein Quotient $\frac{P(z)}{Q(z)}$ zweier relativ primer ganzer rationaler Functionen von z ist

Auf die betreffende noch durch weitere bemerkenswerthe Eigenschaften ausgezeichnete Kettenbruchentwicklung habe ich bereits an anderer Stelle*) hingewiesen, ohne jedoch damals wahrzunehmen, dass die eben erwähnte Ungleichung für die Näherungsbrüche diese Entwicklung bereits vollständig charakterisirt.

Im Folgenden gebe ich eine auf geometrischen Betrachtungen gegründete und dadurch sehr anschauliche *Theorie des Systems zweier linearer Formen* $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ mit *beliebigen* reellen Coefficienten und mit *ganzzahligen* Unbestimmten. Eine Anwendung der dabei zu Tage tretenden Resultate auf die specielleren Ausdrücke $x - ay$, y liefert dann insbesondere jene Sätze über die Annäherung an eine Grösse a.

§ 1.

Satz I. *Sind* $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ *zwei lineare Formen mit beliebigen reellen Coefficienten* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *und einer Determinante* $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, *so giebt es stets ganze Zahlen* x, y, *die nicht beide Null sind und für welche*

$$|\xi\eta| \leqq \frac{1}{2}$$

ausfällt.

Wird auf die Form $\xi\eta$ eine *ganzzahlige* Substitution $x = pX + p'Y$, $y = qX + q'Y$ mit einer *Determinante* $+1$ angewandt, so nennen wir $\xi\eta$ der transformirten Form in den neuen Variabeln X, Y *äquivalent.* Zugleich mit dem Satze I beweisen wir den folgenden

Zusatz. *Ist* $\xi\eta$ *weder mit der Form* XY *noch mit der Form* $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ *äquivalent, so giebt es stets ganze Zahlen* x, y, *wofür* $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ *und* $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ *ausfällt.*

Beweis. Wir deuten x, y als irgend welche Parallelcoordinaten in einer Ebene, wobei noch für jede der zwei Coordinaten die Entfernung Eins parallel ihrer Axe in willkürlicher Weise angenommen sein kann. Es sei O der *Nullpunkt* ($x = 0$, $y = 0$). Bedeutet A einen von O verschiedenen Punkt $x = p$, $y = q$, so soll der zu ihm in Bezug auf O symmetrische Punkt $x = -p$, $y = -q$ jedesmal mit A_0 bezeichnet werden.

---

immer dann und nur dann Näherungsbruch dieses Kettenbruchs, wenn die Entwicklung von

$$(P(z) - f(z)\,Q(z))\,Q(z)$$

nach fallenden Potenzen von z mit einer Potenz von z, deren Exponent negativ ist, beginnt. Der Satz, den ich im Texte angebe, stellt das wohl von manchem Mathematiker vermisste Analogon in der Grössenlehre zu diesem Satze der Functionenlehre vor.

*) Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. XIII; 1896.

Die Gesammtheit derjenigen Punkte, für welche x wie y ganze Zahlen sind, heisse das *Zahlengitter*, und die einzelnen Punkte daraus sollen *Gitterpunkte* heissen.

Sind ϱ, σ positive Parameter, so bilden die vier Punkte R, R_0, S, S_0, für welche $\xi = \varrho$, $\eta = 0$; $\xi = -\varrho$, $\eta = 0$; $\xi = 0$, $\eta = \sigma$; $\xi = 0$, $\eta = -\sigma$ ist, die Ecken für ein Parallelogramm mit O als Mittelpunkt und mit den Linien $\xi = 0$, $\eta = 0$ als *Diagonalen.* Ein solches Parallelogramm werde mit $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ bezeichnet. Seine vier Seiten besitzen die Gleichungen $\pm \frac{\xi}{\varrho} \pm \frac{\eta}{\sigma} = 1$, wo für die zwei Vorzeichen alle vier Combinationen $+, +; -, +; -, -; +, -$ in Betracht kommen, und der Bereich von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ wird daher durch

$$\left|\frac{\xi}{\varrho}\right| + \left|\frac{\eta}{\sigma}\right| \leqq 1$$

dargestellt.

Wir können nun von so kleinen Werthen für ϱ und σ ausgehen, dass das zugehörige Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ jedenfalls keinen Gitterpunkt ausser dem Nullpunkte O in sich fasst. Dann lassen wir ϱ und σ *unter Festhaltung der Grösse ihres Verhältnisses* $\varrho : \sigma$ wachsen. Dabei dehnt sich $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ nach allen Richtungen von O aus in gleichem Maasse aus. Wir müssen daher schliesslich zu gewissen Werthen ϱ, σ kommen, wobei $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ auf seiner *Begrenzung* weitere Gitterpunkte aufnimmt, während immer noch O der einzige Gitterpunkt im *Inneren* von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ist. Es sei bei diesen Werthen ϱ, σ, bei denen wir nun verweilen, A $(x = p,\ y = q)$ ein Gitterpunkt auf der Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$. Da zugleich mit A auch der Gitterpunkt A_0 $(x = -p,\ y = -q)$ auf der Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ auftritt, so können wir annehmen, für A sei $\eta > 0$ oder $\eta = 0$, $\xi > 0$. Wir setzen für A: $\xi = \varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$, so dass $\mu \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$, $\varepsilon = \pm 1$ ist.

Die ganzen Zahlen p, q haben gewiss keinen gemeinsamen Theiler > 1, weil die Strecke OA keinen Gitterpunkt zwischen O und A enthält. Wir bestimmen zwei ganze Zahlen r, s irgendwie so, dass $ps - qr = \varepsilon$ ist, und setzen

$$x = p\overline{X} + rY, \quad y = q\overline{X} + sY.$$

Dabei werde $\varepsilon\xi = \lambda\overline{X} + \bar{\lambda}\,Y$, $\eta = \mu\overline{X} + \bar{\mu}\,Y$. Dann haben $\varepsilon\xi$, η in $\overline{X}$, Y die Determinante $\varepsilon\varepsilon = 1$ und folgt

$$Y = \lambda\eta - \mu\varepsilon\xi. \tag{1}$$

Die Gitterpunkte x, y werden genau die Punkte mit ganzzahligen Bestimmungsstücken $\overline{X}$, Y. Diese Punkte ergeben auf der Linie $Y = 0$, d. i. der Geraden durch O und A die unendliche Punktreihe zu den Werthen $\overline{X} = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$, wobei $\overline{X} = 0$ den Nullpunkt,

$\bar{X} = 1$ den Punkt A liefert und alle diese Punkte sich in einem constanten Abstande $= OA$ folgen. Sodann bilden sie auf einer jeden der zu $Y = 0$ parallelen Geraden $Y = 1$, $Y = -1$, $Y = 2$, $Y = -2, \cdots$ jedesmal eine äquidistante Punktreihe mit dem gleichen constanten Abstande $= OA$ zwischen benachbarten Punkten. Von diesen sämmtlichen einander parallelen Geraden sind $Y = 1$ und $Y = -1$ die zwei an $Y = 0$ nächstgelegenen.

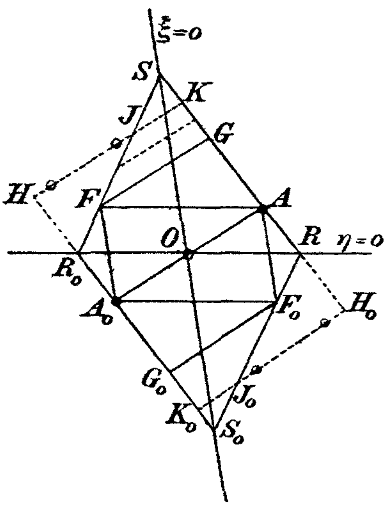

Fig. 1.

1. Wir nehmen zunächst an, dass A *nicht* eine *Ecke* von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, also $\lambda > 0$, $\mu > 0$ ist.*) Es sei F der Punkt $\xi = -\varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$. Das Parallelogramm mit den Ecken A, F, A_0, F_0 ist durch $-\lambda \leqq \xi \leqq \lambda$, $-\mu \leqq \eta \leqq \mu$ definirt und befindet sich, von den Ecken abgesehen, ganz im Inneren des Parallelogramms $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$.

Nehmen wir weiter an, dass A auch *nicht Mitte* einer Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ist. Die zu $A_0 O A$ parallele Gerade durch F trifft dann die Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ausser in F in einem zweiten Punkte G, so dass die Strecke FG offenbar *grösser* als OA ist. Ebenso würde jede parallele Gerade zu $A_0 O A$, die in dem Streifen zwischen $A_0 O A$ und FG verläuft, eine Strecke $> OA$ ganz im Inneren von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ liegen haben. Da nun im Inneren von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ sich kein Gitterpunkt ausser O befindet, welcher Punkt auf $Y = 0$ liegt, müssen danach die Geraden $Y = \pm 1$ ausserhalb des durch die Parallelen FG und $F_0 G_0$ begrenzten Streifens verlaufen, d. h. für den Punkt F muss jedenfalls $|Y| < 1$ sein. Nun hat man für F: $Y = 2\lambda\mu$, also folgt

$$2\lambda\mu < 1.$$

Danach ist der Gitterpunkt A hier von der im Satze I und dem Zusatze geforderten Beschaffenheit.

2. Ist A *Mitte* einer Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, also $\lambda = \frac{1}{2}\varrho$, $\mu = \frac{1}{2}\sigma$, so ist $A_0 O A$, also die Gerade $Y = 0$ parallel einer Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$. Jede Parallele zu $A_0 O A$, welche in's Innere von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eintritt, hat dann mit $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eine Strecke $= A_0 O A > OA$ gemein. Die Geraden $Y = \pm 1$ können daher nicht in's Innere von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eintreten, $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ liegt also ganz in dem Streifen $-1 \leqq Y \leqq 1$. Insbesondere gilt danach für den Punkt F: $Y \leqq 1$, d. h. man hat

*) Wie die Buchstaben R und R_0 in der Figur eingetragen sind, ist darin $\varepsilon = 1$ für den Punkt A angenommen. Die Gitterpunkte sind hier und in den weiteren Figuren durch kleine Kreise angedeutet.

$$2\lambda\mu \leqq 1.$$

Der Punkt A hat also wieder die im Satze I verlangte Beschaffenheit.

Das Gleichheitszeichen in dieser Ungleichung, (dessen Eintreten zugleich $\varrho\sigma = 2$ bedeuten würde), hat dann Statt, wenn eine Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ auf die Gerade $Y = 1$ fällt. Da diese Seite an Länge $= 2\,OA$ ist, so enthält sie alsdann entweder *innerhalb*, jeder ihrer durch F getrennten Hälften je einen Gitterpunkt, in welchem Falle für diese Gitterpunkte nach dem bereits in 1. Ausgeführten sich $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ herausstellt, oder aber es sind auf ihr sowohl beide Ecken wie die Mitte F Gitterpunkte. In diesem zweiten Falle wären in $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ alle vier Mitten der Seiten Gitterpunkte. Wir können dann A als die Mitte von RS, d. h. $\varepsilon = 1$ voraussetzen. Ist für F hier $Y = 1$, $\overline{X} = g$ und setzt man $\overline{X} = X + gY$, so sind $A\left(\xi = \frac{1}{2}\varrho,\ \eta = \frac{1}{2}\sigma\right)$ und $F\left(\xi = -\frac{1}{2}\varrho,\ \eta = \frac{1}{2}\sigma\right)$ durch $X = 1$, $Y = 0$ und $X = 0$, $Y = 1$ bestimmt, und hat man daher

$$\xi = \frac{1}{2}\varrho(X - Y),\quad y = \frac{1}{2}\sigma(X + Y),\quad \varrho\sigma = 2,\quad \xi\eta = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2).$$

3. Endlich nehmen wir an, dass der Gitterpunkt A eine *Ecke* von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, also dafür $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ sei; dann ist selbstverständlich für diesen Punkt $|\xi\eta| = 0 < \frac{1}{2}$. In jedem Falle entpricht somit der Gitterpunkt A den Bedingungen des Satzes I.

Um auch noch den Zusatz unter den letzten Umständen als richtig zu erkennen, stellen wir uns A etwa als die Ecke R ($\xi = \varrho$, $\eta = 0$) von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ vor. Dann ist nach (1.): $Y = \varrho\eta$. Nunmehr halten wir ϱ fest und denken uns den Parameter σ als veränderlich. Dabei bleibt die Diagonale R_0R (A_0OA) von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ auf $Y = 0$ fest, während sich die Endpunkte S_0, S der anderen Diagonale auf der Linie $\xi = 0$ verschieben. Bei hinreichend kleinem σ liegt $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ganz im Bereiche $-1 < Y < 1$, enthält dann also gewiss keinen Gitterpunkt ausser A_0, O, A. Wird $\sigma = \frac{1}{\varrho}$, so erreicht $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ die Gerade $Y = 1$ mit der Ecke S ($\xi = 0$, $\eta = \sigma$). Fällt dabei diese Ecke zugleich in einen Gitterpunkt, so sei für ihn $Y = 1$, $\overline{X} = g$. Setzt man alsdann $\overline{X} = X + gY$, so gilt für S: $\xi = 0$, $\eta = \sigma$; $X = 0$, $Y = 1$, für R: $\xi = \varrho$, $\eta = 0$; $X = 1$, $Y = 0$, also hat man in diesem Falle:

$$\xi = \varrho X,\quad \eta = \sigma Y,\quad \varrho\sigma = 1,\quad \xi\eta = XY.$$

Fällt hingegen der Punkt $\xi = 0$, $\eta = \frac{1}{\varrho}$ nicht in einen Gitterpunkt, so kann man σ über $\frac{1}{\varrho}$ hinaus wachsen lassen, ohne dass zunächst neue

Gitterpunkte in $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eintreten. Dabei wird die Strecke, welche der Bereich von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ aus der Linie $Y = 1$ herausschneidet und deren variable Endpunkte J, K heissen mögen, nach beiden Enden zu immer ausgedehnter und wird sich schliesslich einer dieser zwei Fälle ereignen:

Entweder fällt, so lange noch diese Strecke $JK < OA$ ist, einer ihrer Endpunkte (wie in Fig. 2 der Punkt J) in einen Gitterpunkt A' auf der Geraden $Y = 1$. Dabei reicht dann wegen $JK < \frac{1}{2} A_0OA$ das Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ noch nicht an $Y = 2$ heran, enthält also gewiss keinen Gitterpunkt ausser O, A, A_0, A', A_0', und zugleich liegt der Punkt A' auf $Y = 1$ näher an S (wofür $Y < 2$ ist), als an dem anderen Endpunkte (A_0 in Fig. 2) der durch ihn gehenden Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, also ist A' keinenfalls Mitte dieser Seite. In diesem Falle gilt für A' nach den früheren Bemerkungen $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$.

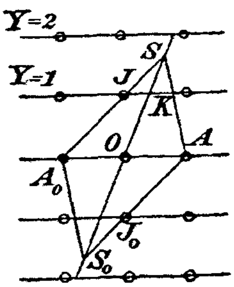

Fig. 2.

Der andere mögliche Fall ist, dass erst, wenn die Strecke JK bis zur Länge OA gewachsen ist, ihre beiden Endpunkte in Gitterpunkte zu liegen kommen. In dieser Endlage stösst dann $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ gerade mit der Ecke S auf $Y = 2$, sodass auch hier noch $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ keinen Gitterpunkt ausser O im Inneren enthält, aber in den Mitten aller vier Seiten Gitterpunkte aufweist. In diesem Falle erweist sich, wie schon oben unter 2. ausgeführt ist, $\xi\eta$ als äquivalent mit $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$. Werden alle erörterten Einzelheiten zusammengefasst, so tritt die Richtigkeit des zum Satze I gemachten Zusatzes hervor. —

Den Beweis der Ungleichung $2\lambda\mu \leqq 1$ für den Gitterpunkt A und damit des Satzes I können wir auch durch folgende, auf dem Begriffe des *Flächeninhalts* beruhende Betrachtung erhalten, die noch zu einem weiter reichenden Resultate führt.

Da wir im Hinblick auf die festzustellende Relation $|\xi\eta| \leqq \frac{1}{2}$ die Rolle der Formen ξ, η vertauschen, auch ξ durch $-\xi$ ersetzen können, wobei freilich als Werth der Determinante von ξ, η auch -1 zuzulassen ist, so dürfen wir ohne wesentliche Einschränkung annehmen, A falle auf die Seite RS von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ und noch derart, dass $RA \leqq AS$ ist, d. h. wir setzen $\varepsilon = 1$ und $\frac{\lambda}{\varrho} \geqq \frac{\mu}{\sigma}$ voraus. Indem A auf der Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ liegt, hat man

$$(2) \qquad \frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\mu}{\sigma} = 1,$$

also $\frac{\lambda}{\varrho} = \frac{1}{2} + \omega$, $\frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{2} - \omega$, $\frac{\lambda\mu}{\varrho\sigma} = \frac{1}{4} - \omega^2 \leqq \frac{1}{4}$. Nun werden wir beweisen, dass für ein Parallelogramm wie $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, welches einen Gitterpunkt A auf der Berandung, im Inneren aber O als einzigen Gitterpunkt enthält, stets

(3) $$\varrho\sigma \leqq 2$$

gilt. Daraus folgt dann unmittelbar $\lambda\mu \leqq \frac{1}{2}$. Dieser Satz (3) ist aber einschneidender.

Der *Flächeninhalt* von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, d. h. das Doppelintegral $\int\int dx\,dy$, über diesen Bereich erstreckt, ist, da ξ, η die Determinante ± 1 in x, y haben, $= 4 \cdot \frac{1}{2}\varrho\sigma = 2\varrho\sigma$. Es seien nun H, K (Fig. 1) die Schnittpunkte von $Y = 1$ mit den Geraden S_0R_0 und RS. Wegen (2) haben die Formen $\frac{\xi}{\varrho} + \frac{\eta}{\sigma}$ und Y die Determinante 1 in den Variabeln X, Y und dann eine Determinante ± 1 in x, y. Also ist der Flächeninhalt des Parallelogramms K_0H_0KH gleich 4.

Tritt nun die Strecke HK in das *Innere* von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ein, so liegt K auf RS zwischen A und S und hat HK mit $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eine Strecke JK gemein, die nothwendig $\leqq OA$ ist, weil kein Gitterpunkt ausser O im Inneren von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ liegt. Wegen $JK \leqq OA$ liegt J auf R_0S und so, dass $R_0J \geqq JS$ ist. Infolgedessen ist der Flächeninhalt des Dreiecks JKS nicht grösser als der des Dreiecks JHR_0. Nun entsteht das Parallelogramm RSR_0S_0 aus dem Parallelogramm K_0H_0KH, indem von letzterem die Dreiecke J_0H_0R und JHR_0 fortgenommen und die Dreiecke $J_0K_0S_0$ und JKS von nicht grösserem Flächeninhalte hinzugefügt werden. Daraus folgt für die Flächeninhalte der zwei Parallelogramme das Verhältniss $2\varrho\sigma \leqq 4$.

Tritt jedoch die Strecke HK überhaupt nicht in das Innere von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ein, so ist das Parallelogramm RSR_0S_0 ganz im Parallelogramme K_0H_0KH enthalten und daher ebenfalls $2\varrho\sigma \leqq 4$.

§ 2.

1. Es mögen ξ und η dieselbe Bedeutung wie in Satz I haben. Wir wollen jedoch jetzt von vornherein die besonderen Fälle ausschliessen, dass die Form $\xi\eta$ der Variabeln x, y mit der Form XY oder mit der Form $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ der Variabeln X, Y äquivalent ist. Von diesen Ausnahmefällen abgesehen, gilt der

Satz II. *Sind $x = p$, $y = q$ zwei relativ prime ganze Zahlen, wofür $|\xi| > 0$ und $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ ausfällt, so kann man stets zwei ganze Zahlen*

$x = p'$, $y = q'$ finden, so dass $pq' - qp' = \pm 1$ ist und für welche ebenfalls $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ ist, aber $|\xi|$ kleiner ausfällt als für das erstere System.

Beweis. Da wir anstatt p, q ebensogut das System $-p$, $-q$ zu Grunde legen können, nehmen wir an, für $x = p$, $y = q$ sei $\xi = \varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$ und dabei $\mu > 0$, $\lambda > 0$, $\varepsilon = \pm 1$ oder $\mu = 0$, $\lambda > 0$, $\varepsilon = 1$. Wir bestimmen zwei ganze Zahlen r, s irgendwie so, dass

$$ps - qr = \varepsilon$$

ist, und setzen

$$x = p\overline{X} + rY, \quad y = q\overline{X} + sY.$$

Alsdann sei

$$\varepsilon\xi = \lambda\overline{X} + \bar{\lambda}Y, \quad \eta = \mu\overline{X} + \bar{\mu}Y,$$

so folgt noch

$$\lambda\bar{\mu} - \mu\bar{\lambda} = 1, \quad Y = \lambda\eta - \mu\varepsilon\xi = \varepsilon(py - qx).$$

Wir bezeichnen den Gitterpunkt $x = p$, $y = q$ ($\xi = \varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$) mit A, ferner, wenn $\mu > 0$ ist, mit F den Punkt $\xi = -\varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$. Für F wird $Y = 2\lambda\mu$, d. i. $Y < 1$ auf Grund unserer Voraussetzung über den Gitterpunkt A. Die Geraden $Y = \pm 1$ schliessen also das Parallelogramm mit den Ecken A, F, A_0, F_0 ganz zwischen sich ein, ohne es zu treffen, so dass insbesondere F und F_0 gewiss nicht Gitterpunkte sind.

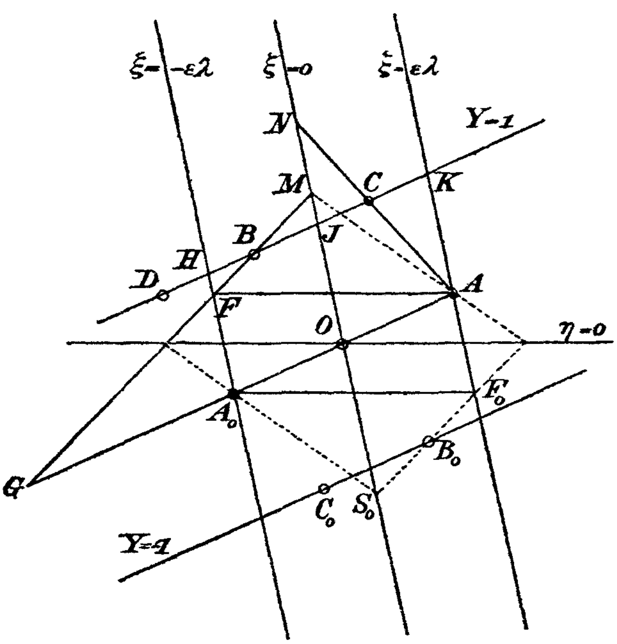

Fig. 3.

Die Gerade $Y = 1$ trifft nun die Linien $\xi = -\varepsilon\lambda$, $\xi = 0$, $\xi = \varepsilon\lambda$ in drei Punkten H, I, K (Fig. 3), für die $\eta = \frac{1 - \lambda\mu}{\lambda}$, $\eta = \frac{1}{\lambda}$, $\eta = \frac{1 + \lambda\mu}{\lambda}$ ist, welche Grössen sämmtlich $> \mu$ sind. Da $HJ = JK = OA$ ist, so werden auf dieser Geraden $Y = 1$ entweder die drei Punkte H, J, K Gitterpunkte sein, oder es liegt ein Gitterpunkt B innerhalb der Strecke HJ und ein Gitterpunkt C innerhalb der Strecke JK. In diesem letzteren Falle sei dann M der Schnittpunkt der Geraden FB (oder A_0B im Falle $\mu = 0$) mit der Geraden $\xi = 0$ und N der Schnittpunkt der Geraden AC mit der Geraden $\xi = 0$.

Wir bezeichnen nun mit A' ($x = p'$, $y = q'$) *erstens*, wenn J ein Gitterpunkt ist, diesen Gitterpunkt, *zweitens*, wenn in J kein Gitterpunkt fällt und wenn zugleich M näher an O liegt als N, also $OM < ON$ ist, den Gitterpunkt B, *drittens*, wenn in J kein Gitterpunkt fällt und dabei $OM \geqq ON$ ist, den Gitterpunkt C. Da A' auf $Y = 1$ liegt, gilt jedesmal $pq' - qp' = \varepsilon = \pm 1$. Für A' können wir sodann $\xi = \varepsilon'\lambda'$, $\eta = \mu'$ setzen, sodass $\lambda' = 0$ im ersten, $\varepsilon' = -\varepsilon$, $\lambda' > 0$ im zweiten, $\varepsilon' = \varepsilon$, $\lambda' > 0$ im dritten Falle ist, ferner in jedem Falle $\lambda' < \lambda$, $\mu' > \mu$. Im ersten Falle denken wir uns noch $\varepsilon' = -\varepsilon$. Wir wollen ferner hier unter $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ mit den Ecken RSR_0S_0 speciell dasjenige völlig bestimmte Parallelogramm mit $\xi = 0$, $\eta = 0$ als Diagonalen verstehen, dessen Berandung sowohl den Punkt A, wie den Punkt A' aufnimmt. Die Ecke $S(\xi = 0, \eta = \sigma)$ kommt dabei im ersten Falle in J, im zweiten in M, im dritten in N zu liegen. Wir können nun zeigen, dass in jedem Falle dieses Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ keinen Gitterpunkt ausser O im Inneren enthält und dass darin auch A' nicht Mitte einer Seite ist. Aus diesen Umständen folgt nach den Betrachtungen in § 1, dass $\lambda'\mu' < \frac{1}{2}$ ist, und da zudem $\lambda > \lambda' \geqq 0$ gilt, wird danach in der That der Gitterpunkt p', q' von der im Satze II geforderten Beschaffenheit sein. Wir unterscheiden nun die genannten drei Fälle:

Ist *erstens* J ein Gitterpunkt, $A' = J$, so erreicht das Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ die Gerade $Y = 1$ nur im Punkte J. Dieses Parallelogramm enthält daher keinen Gitterpunkt ausser O im Inneren und A, A_0, J, J_0 auf der Begrenzung. Dabei werden J, J_0 die Ecken S, S_0. Da ferner H ausserhalb dieses Parallelogramms $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ fällt, so liegt wegen $OH = AJ$ der Punkt A von S weiter entfernt als die Mitte $\xi = \frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ der Seite, welche A und S enthält. Man hat also $\lambda > \frac{\varrho}{2}$, $\mu < \frac{\sigma}{2}\cdot$ Andererseits gilt $\lambda' = 0 < \frac{\varrho}{2}$, $\mu' = \sigma > \frac{\sigma}{2}\cdot$ — Zu bemerken ist noch, dass hier jedenfalls $\mu > 0$ ist. Denn wäre $\mu = 0$, also auch A eine Ecke in $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, so enthielte dieses Parallelogramm in den vier Ecken Gitterpunkte. Dann wäre nach § 1, 3. die Form $\xi\eta$ der Variabeln x, y äquivalent mit der Form XY der Variabeln X, Y.

Wir verfolgen jetzt die Annahme, dass J kein Gitterpunkt ist. Es bedeute noch G den Schnittpunkt der Geraden FB mit der Geraden $Y = 0$; dieser Punkt liegt im Falle $\mu > 0$ auf der Verlängerung von A_0O über A_0 hinaus, im Falle $\mu = 0$ fällt er mit A_0 zusammen. Aus den zwei ähnlichen Dreiecken GOM und BJM einerseits und aus den zwei ähnlichen Dreiecken OAN und JCN andererseits erhält man die Proportionen

$$(1) \qquad \frac{JM}{OJ + JM} = \frac{BJ}{GO}, \quad \frac{JN}{OJ + JN} = \frac{JC}{OA}.$$

Der *zweite* der obigen Fälle, $A' = B$, hat Statt, wenn J kein Gitterpunkt ist und dabei $OM < ON$ ist. Der gezeichneten Figur 3 ist speciell dieser Fall zu Grunde gelegt. Dabei giebt dann FBM (A_0BM für $\mu = 0$) eine Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ab. Für den Punkt M gilt hier stets $Y < 2$. Denn entweder hat man $BJ < JC$; wegen $BJ + JC = A_0 O$ ist dann $BJ < \frac{1}{2} A_0 O \leqq \frac{1}{2} GO$ und folgt aus (1): $JM < OJ$. Ist aber $BJ \geqq JC$, so ist wegen $BJ + JC = OA$ jetzt $JC \leqq \frac{1}{2} OA$ und folgt aus der zweiten Relation in (1): $JN \leqq OJ$, und um so mehr gilt dann $JM < OJ$. In jedem Falle ist dann weiter $OM < 2\,OJ$, d. h. eben $Y < 2$ für den Punkt M.

Das Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ liegt somit hier ganz im Bereiche $-2 < Y < 2$. Von der Geraden $Y = 1$ enthält es eine Strecke mit B als einem Endpunkte und mit einem Punkte zwischen J und C als anderem Endpunkte, von der Geraden $Y = 0$ enthält es die Strecke $A_0 O A$. Von Gitterpunkten finden sich also darin allein O im Inneren und A, A_0, B, B_0 auf der Begrenzung. Da ferner $BC = OA$ ist, die Strecke BC bei B in's Innere von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eintritt, aber C ausserhalb $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ fällt, so liegt B an S ($= M$) *näher* als die Mitte $\xi = -\frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ der B und S enthaltenden Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, man hat also $\lambda' < \frac{\varrho}{2}$, $\mu' > \frac{\sigma}{2}$; und andererseits liegt deshalb der Punkt A von der Ecke S ($= M$) *weiter* ab als die Mitte $\xi = \frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ der A und S enthaltenden Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, mithin ist $\lambda > \frac{\varrho}{2}$, $\mu < \frac{\sigma}{2}$.

Ueber die Ermittlung des Gitterpunktes A' in diesen beiden ersten Fällen bemerken wir Folgendes: Man hat für A' hier $\xi = -\varepsilon\lambda'$, $\eta = \mu'$ und $0 \leqq \lambda' < \lambda$, andererseits $\overline{X} = g$, $Y = 1$, wo g eine ganze Zahl ist, und dann $p' = r + gp$, $q' = s + gq$. Nun folgt $-\varepsilon\lambda' = \varepsilon(\overline{\lambda} + g\lambda)$, also soll $0 \leqq -\overline{\lambda} - g\lambda < \lambda$ oder $0 \leqq -\frac{\overline{\lambda}}{\lambda} - g < 1$ sein. Danach ist g die grösste in $-\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}$ enthaltene ganze Zahl:

$$g = \left[-\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}\right].$$

Die Relation $Y = 1$ für A' ist gleichbedeutend mit $\lambda\mu' + \mu\lambda' = 1$. Ist nun $-\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}$ genau eine ganze Zahl, so wird $\lambda' = 0$, $A' = J$. Anderenfalls wird $\lambda' > 0$ und ist der Punkt M auf der Geraden FB (A_0B für $\mu = 0$) bestimmt durch $\xi = 0$, $\frac{\eta - \mu'}{\xi + \varepsilon\lambda'} = \frac{\eta - \mu}{\xi + \varepsilon\lambda}$, also für M: $\eta(\lambda - \lambda') = \lambda\mu' - \mu\lambda' = 2\lambda\mu' - 1$, der Punkt N auf der Geraden AC hingegen ist, da C hier den Werthen $\xi = -\varepsilon\lambda' + \varepsilon\lambda$, $\eta = \mu' + \mu$ entspricht, bestimmt durch $\xi = 0$, $\frac{\eta - \mu' - \mu}{\xi + \varepsilon\lambda' - \varepsilon\lambda} = \frac{\eta - \mu}{\xi - \varepsilon\lambda}$, also für N: $\eta\lambda' = \lambda\mu' + \mu\lambda' = 1$. Die Relation $OM < ON$ kommt danach auf $\frac{2\lambda\mu' - 1}{\lambda - \lambda'} < \frac{1}{\lambda'}$ d. i., da $\lambda > 0$ ist, auf $2\lambda'\mu' < 1$ hinaus.

Endlich nehmen wir als *dritten* Fall den, dass J kein Gitterpunkt ist und dabei $OM \geqq ON$ gilt. Dann hat für $A'(\xi = \varepsilon'\lambda', \eta = \mu')$ der Punkt C einzutreten, so dass $\varepsilon' = \varepsilon$ ist. Für B ist dann $\xi = -\varepsilon(\lambda - \lambda')$, $\eta = \mu' - \mu$; es folgt also zunächst $\mu' - \mu > \mu$. Die Relation $OM \geqq ON$ kommt hier nach der eben gemachten Ausführung auf $2(\lambda - \lambda')(\mu' - \mu) \geqq 1$ hinaus.

Es sei zunächst $OM > ON$. Aus $JM > JN$ folgt nach (1), da $GO \geqq OA$ ist, $BJ > JC$. Diese Beziehung ist hier gleichbedeutend mit $\lambda - \lambda' > \lambda'$. Wegen $BJ + JC = OA$ hat man sodann $JC < \frac{1}{2}\, OA$, und wegen (1) daher $JN < OJ$. Danach gilt für den Punkt N jedenfalls $Y < 2$. Das Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ reicht also nicht an $Y = 2$ heran. Von der Geraden $Y = 1$ enthält es eine Strecke mit einem Punkte zwischen B und J als einem Endpunkte und mit dem anderen Endpunkte in C, von der Geraden $Y = 0$ enthält es die Strecke A_0OA. Danach enthält es keinen Gitterpunkt ausser O und A, A_0, C, C_0. Da ferner B ausserhalb dieses Parallelogramms liegt und $AC = OB$ ist, so ist AC grösser als die Hälfte der A und C enthaltenden Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ und befindet sich daher C näher an $S\,(= N)$ und A weiter von S als die Mitte $\xi = \frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ dieser Seite; man hat also $\lambda' < \frac{\varrho}{2} < \lambda$, $\mu' > \frac{\sigma}{2} > \mu$.

Jetzt sei $OM = ON$, sodass M mit N zusammenfällt. Nehmen wir zudem $\mu > 0$ an, so dass A nicht Ecke in $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ wird, so ist $GO > A_0O$ und daher wieder $BJ > JC$, $\lambda - \lambda' > \lambda'$, und gelten alle Ueberlegungen wie vorhin, nur dass ausser A, A_0, C, C_0 noch die Gitterpunkte B und B_0 auf die Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ zu liegen kommen. Weil OB parallel AC ist, wird dabei B Mitte einer Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, also $\lambda - \lambda' = \frac{\varrho}{2}$, $\mu' - \mu = \frac{\sigma}{2}$, dagegen ist, weil $OB = AC$ und weder A noch C eine Ecke von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ist, weder C noch A Mitte einer Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$; man hat wieder $\lambda' < \frac{\varrho}{2} < \lambda$, $\mu' > \frac{\sigma}{2} > \mu$.

Hat man schliesslich $OM = ON$ *und dazu* $\mu = 0$, so ist A_0OA Diagonale von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ und fällt G mit A_0 zusammen. Dann folgt $BJ = JC = \frac{1}{2}\, OA$, also $\lambda - \lambda' = \lambda'$ und weiter $JN = OJ$, $CN = AC = OB$. Unter diesen Umständen reicht $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ mit der Ecke S gerade an $Y = 2$

heran, es enthält wieder im Inneren ausser O keinen Gitterpunkt, aber nicht bloss B, sondern auch C ist darin Mitte einer Seite. Für B wie für C gilt dann $|\xi\eta| = \frac{1}{2}$. Es wäre dieses derjenige Fall, wo $\xi\eta$ sich als äquivalent mit der Form $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ erweist, ein Fall, der vorweg ausgeschlossen wurde.

Aus den Betrachtungen in § 1 folgt nunmehr in jedem Falle, dass der Gitterpunkt A' den Forderungen des Satzes II entspricht. Zur Bestimmung dieses Gitterpunktes $x = p'$, $y = q'$ aus dem Gitterpunkte A hat sich zugleich die folgende Regel herausgestellt:

Man bezeichne mit g die grösste in $-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$ enthaltene ganze Zahl und setze $h = g$ oder $h = g + 1$, je nachdem

$$(-\bar{\lambda} - \lambda g)(\bar{\mu} + \mu g) < \text{ oder } \geqq \frac{1}{2}$$

ist. Dann hat man $p' = r + ph$, $q' = s + qh$.

2. Verändern wir die Parameter ϱ, σ des in 1. betrachteten Parallelogramms $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ in der Weise, dass σ verkleinert wird, also S und S_0 näher an O heranrücken, dass aber die Seiten noch fortwährend durch A, A_0 (und F, F_0) gehen, so erhalten wir, so lange die Abnahme von σ eine gewisse Grenze nicht erreicht, ein neues Parallelogramm mit $\xi = 0$, $\eta = 0$ als Diagonalen, welches offenbar keine anderen Gitterpunkte ausser A_0, O, A enthält. Daraus geht der Satz hervor:

Satz III. *Ist ein Gitterpunkt $x = p$, $y = q$ so beschaffen, dass die Zahlen p, q relativ prim sind und dafür $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ ausfällt, so kann man stets Parallelogramme*

$$\left|\frac{\xi}{\varrho}\right| + \left|\frac{\eta}{\sigma}\right| \leqq 1$$

construiren, welche den Gitterpunkt auf der Begrenzung liegen haben und ausser den drei Punkten $x, y = p, q$; $0, 0$; $-p, -q$ überhaupt keinen Gitterpunkt enthalten.

Wenn andererseits für einen Gitterpunkt $x = p$, $y = q$ ein Parallelogramm der hier bezeichneten Art existirt, so zeigt der Beweis zum Satze I, dass umgekehrt stets p, q relativ prim sind und dafür $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ ausfällt.

Auf Grund dieses Satzes III beweisen wir über das Verhältniss der in 1. mit A und A' bezeichneten zwei Gitterpunkte den folgenden wichtigen Zusatz:

Es kann keinen von A, A_0, A', A_0' verschiedenen Gitterpunkt x, y geben, *für den ebenfalls* x, y *relativ prim sind und ebenfalls* $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$, *dabei aber* $\lambda \geqq |\xi| \geqq \lambda'$ *wäre.*

Beweis. Nehmen wir an, es existirte ein Gitterpunkt A^* der hier bezeichneten Art, und es sei für ihn $|\xi| = \lambda^*$, $|\eta| = \mu^*$. Wir hezeichnen (Fig. 4) mit E den Punkt $\xi = \lambda$, $\eta = \mu$, mit E' den Punkt $\xi = \lambda'$, $\eta = \mu'$, mit R und S die Schnittpunkte der Geraden EE' mit $\eta = 0$ und $\xi = 0$, weiter mit L den Punkt $\xi = \lambda$, $\eta = 0$, mit L' den Punkt $\xi = \lambda'$, $\eta = 0$, endlich mit E^* den Punkt $\xi = \lambda^*$, $\eta = \mu^*$. Nach dem Satze III müsste es zufolge unserer Voraussetzungen möglich sein, ein Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho^*, \sigma^*)$ mit $\xi = 0$, $\eta = 0$ als Diagonalen zu construiren, dessen Begrenzung den Punkt A^* aufnimmt, welches aber weder A noch A' enthielte. Sind R^*, S^* die Ecken $\xi = \varrho^*$, $\eta = 0$ und $\xi = 0$, $\eta = \sigma^*$ dieses Parallelogramms, so enthält die Strecke R^*S^* den Punkt E^*, es darf aber weder E, noch E' dem Dreiecke OR^*S^* angehören. Da nun nach Voraussetzung E^* in dem Parallelstreifen $\lambda' \leqq \xi \leqq \lambda$ liegt und noch dafür $\eta \geqq 0$ ist, müsste danach E^* sich nothwendig im Viereck $L'LEE'$ und dabei nicht auf der Seite EE' desselben befinden. Aber das Parallelogramm RSR_0S_0 enthält im Inneren O als einzigen Gitterpunkt, danach kann E^* nicht in $L'LEE'$ bei Ausschluss der Strecke EE' liegen. Ein Gitterpunkt, wie wir ihn in A^* angenommen haben, kann also nicht existiren.

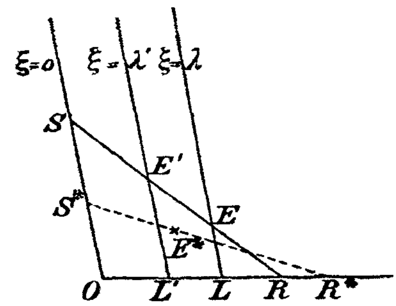

Fig. 4.

In entsprechender Weise leuchtet ein, dass es keinen von A, A_0, A', A_0' verschiedenen Gitterpunkt geben kann, für den ebenfalls x, y relativ prim sind und ebenfalls $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$, dabei aber $\mu \leqq |\eta| \leqq \mu'$ wäre.

3. Durch die aus A und A' entnommene Substitution

$$T) \qquad x = pX + p'Y, \quad y = qX + q'Y,$$

deren Determinante $pq' - qp' = \pm 1$ ist, geht die Form $\xi\eta$ in eine äquivalente Form

$$\varphi X^2 + \chi XY + \psi Y^2 = (\varepsilon\lambda X + \varepsilon'\lambda' Y)(\mu X + \mu' Y)$$

über.

Man erhält zunächst die Gleichung $\chi^2 - 4\varphi\psi = 1$.

Sodann ist $\varphi = \varepsilon\lambda\mu$, $\psi = \varepsilon'\lambda'\mu'$ und gilt $|\varphi| < \frac{1}{2}$, $|\psi| < \frac{1}{2}$. Weiter hat man, wenn $\varepsilon' = -\varepsilon$ ist, $\lambda\mu' + \mu\lambda' = 1$, $\lambda > \lambda' \geqq 0$, $\mu' > \mu \geqq 0$ und $\chi = \varepsilon(\lambda\mu' - \mu\lambda') = \varepsilon(1 - 2\mu\lambda')$; also ist in diesem Falle $0 < \varepsilon\chi \leqq 1$. Wenn dagegen $\varepsilon' = \varepsilon$ ist, hat man $\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1$, $\lambda > 2\lambda' > 0$, $\mu' > 2\mu \geqq 0$

und $\chi = \varepsilon(\lambda\mu' + \mu\lambda') = \varepsilon(1 + 2\mu\lambda')$; da hier $2\mu\lambda' < \mu'\lambda' < \frac{1}{2}$ ist, folgt also $1 \leqq \varepsilon\chi < \frac{3}{2}\cdot$ Die Relation $(\lambda - \lambda')(\mu' - \mu) \geqq \frac{1}{2}$, die in diesem zweiten Falle besteht, ergiebt $\varepsilon(\chi - \varphi - \psi) \geqq \frac{1}{2}\cdot$ — Die Vorzeichen ε und ε' entnimmt man hiernach bereits aus dem Werthe von χ allein, ausser wenn gerade $\chi = \pm 1$ (also $\varphi = 0$ oder $\psi = 0$) ist.

Da aus $pq' - qp' = \pm 1$ schon hervorgeht, dass p und q einerseits und andererseits p' und q' relativ prim sind, so sind die besonderen Umstände, welche hier für die zwei Gitterpunkte $A(\xi = \varepsilon\lambda,\ \eta = \mu)$ und $A'(\xi = \varepsilon'\lambda',\ \eta = \mu')$ gelten, völlig zusammengefasst in den Beziehungen: $\lambda > 0$; $\mu > 0$, $\varepsilon = \pm 1$ oder $\mu = 0$, $\varepsilon = 1$; $pq' - qp' = \varepsilon$, ferner *entweder:*

$$\varepsilon' = -\varepsilon, \quad \lambda > \lambda' \geqq 0, \quad \lambda\mu < \frac{1}{2}, \quad \lambda'\mu' < \frac{1}{2}$$

oder:

$$\varepsilon' = \varepsilon, \quad \lambda > \lambda' > 0, \quad \lambda\mu < \frac{1}{2}, \quad (\lambda - \lambda')(\mu' - \mu) \geqq \frac{1}{2}\cdot$$

Bemerkenswerth ist noch, dass bei dieser zweiten Reihe von Bedingungen für $\varepsilon' = \varepsilon$ die Ungleichung $\lambda\mu < \frac{1}{2}$ eine Folge der übrigen Ungleichungen ist. Denn man hat hier $\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1$. Aus

$$(\lambda - \lambda')(\mu' - \mu) \geqq \frac{1}{2}$$

und $\lambda > \lambda'$ folgt zuvörderst $\mu' > \mu$; sodann kann diese Ungleichung ersetzt werden durch

$$\lambda\mu' + \lambda'\mu - \lambda\mu - \lambda'\mu' \geqq \frac{1}{2}(\lambda\mu' - \lambda'\mu),$$

d. i.

$$\frac{1}{2}\lambda\mu' + \frac{3}{2}\lambda'\mu - \lambda\mu - \lambda'\mu' \geqq 0$$

oder

$$\frac{1}{2}(\lambda - \lambda')(\mu' - 2\mu) \geqq \frac{1}{2}\lambda'(\mu' - \mu).$$

Daraus folgt $\mu' - 2\mu > 0$. Ersetzt man weiter hier $\lambda\mu'$ durch $1 + \lambda'\mu$, so entsteht endlich

$$\frac{1}{2} + 2\lambda'\mu \geqq \lambda\mu + \lambda'\mu', \quad \text{also} \quad \frac{1}{2} \geqq \lambda\mu + \lambda'(\mu' - 2\mu),$$

und daraus entnimmt man in der That $\frac{1}{2} > \lambda\mu$.

§ 3.

Fassen wir die Resultate des § 1 und § 2 zusammen und nehmen die Sätze hinzu, welche daraus bei Vertauschung der Rollen von ξ und η, bei Ersetzung von ξ, η durch $\eta, -\xi$, hervorgehen, so entsteht der folgende

Satz IV. *Es seien $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ zwei lineare Formen mit beliebigen reellen Coefficienten und einer Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; jedoch sei die Form $\xi\eta$ in x, y nicht äquivalent mit der Form XY oder der Form $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ in X, Y. Alsdann lassen sich die sämmtlichen Systeme von ganzen Zahlen x, y, für welche x, y relativ prim sind und $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ und zudem $\eta > 0$, bez. $\eta = 0$, $\xi > 0$ ist, in eine Reihe nach wachsendem Werthe η ordnen. Dabei sind sie zugleich nach abnehmendem Werthe $|\xi|$ geordnet.*

Für je zwei auf einander folgende Systeme $x = p$, $y = q$ und $x = p'$, $y = q'$ in der Reihe gilt dann stets

$$pq' - qp' = \pm 1.$$

Diese Reihe weist ein bestimmtes erstes System auf, wofür $\eta = 0$, $\xi > 0$, also $\frac{x}{\delta} = \frac{y}{-\gamma}$ und > 0 ist, wenn $\frac{\delta}{-\gamma}$ rational ist; sie weist ein bestimmtes letztes System auf, wofür $\xi = 0$, $\eta > 0$, also $\frac{x}{-\beta} = \frac{y}{\alpha}$ und > 0 ist, wenn $\frac{-\beta}{\alpha}$ rational ist. Sie ist ohne ein erstes System, wenn $\frac{\delta}{-\gamma}$ irrational ist, ohne ein letztes System, wenn $\frac{-\beta}{\alpha}$ irrational ist; sie ist nach Anfang und Ende hin unbegrenzt, wenn sowohl $\frac{\delta}{-\gamma}$ wie $\frac{-\beta}{\alpha}$ irrational sind.

Ist die Reihe ohne ein letztes System, so convergirt in ihrem Verlaufe $|\xi|$ nach Null und wächst η über jede Grenze; ist sie ohne ein erstes System, so wächst bei umgekehrter Folge der Systeme in ihr $|\xi|$ über jede Grenze und convergirt η nach Null.

Diese zuletzt erwähnte Thatsache folgt aus dem Umstande, dass überhaupt nur für eine endliche Anzahl von Systemen der Reihe $|\xi|$ oder η zwischen gegebenen positiven Grenzen liegen kann. Denn soll etwa $\varrho_1 \geqq |\xi| \geqq \varrho_0 > 0$ sein, so folgt aus $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ und $|\xi| \geqq \varrho_0$ noch $|\eta| < \frac{1}{2\varrho_0}$; in einem Parallelogramme $|\xi| \leqq \varrho_1$, $|\eta| \leqq \frac{1}{2\varrho_0}$ liegen aber stets nur eine endliche Anzahl von Gitterpunkten x, y.

Die Reihe der hier in Betracht kommenden Gitterpunkte x, y, nach wachsendem Werthe ihres η geordnet, soll die *Kette zu* den Formen ξ, η

heissen, ein einzelner Gitterpunkt $x = p$, $y = q$ daraus ein *Kettenglied*, ferner die mittelst zweier auf einander folgender Kettenglieder $x = p$, $y = q$ und $x = p'$, $y = q'$ gebildete Substitution

$$x = pX + p'Y, \quad y = qX + q'Y$$

eine *Substitution der Kette* heissen.

Wir bezeichnen die nach einander auftretenden Kettenglieder mit

$$p_i,\ q_i \qquad (i = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots),$$

wobei wir, wenn ein erstes Glied vorhanden ist, *diesem* Gliede und anderenfalls einem beliebig gewählten Gliede den Index 0 ertheilen wollen. Für $x = p_i$, $y = q_i$ setzen wir $\xi = \varepsilon_i \lambda_i$, $\eta = \mu_i$, so dass $\mu_i \geqq 0$, $\lambda_i \geqq 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$ sei. Ferner schreiben wir allgemein, soweit die Indices in Betracht kommen,

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} = \vartheta_i.$$

Für ein etwa vorhandenes erstes Glied ist $\varepsilon_0 = 1$. Für einen etwa vorhandenen letzten Index $i = w$, wobei dann $\lambda_w = 0$ wäre, denken wir uns $\vartheta_w = -1$ gewählt. Die Substitution

$$x = p_{i-1} X_i + p_i Y_i, \quad y = q_{i-1} X_i + q_i Y_i$$

oder kurz $\begin{pmatrix} p_{i-1}, & p_i \\ q_{i-1}, & q_i \end{pmatrix}$ bezeichnen wir mit T_i.

Man hat dann allgemein:

$$\lambda_{i-1} > \lambda_i, \quad \mu_{i-1} < \mu_i,$$

ferner

(1) $$\lambda_{i-1}\mu_i - \vartheta_i \mu_{i-1}\lambda_i = 1, \quad p_{i-1}q_i - q_{i-1}p_i = \varepsilon_{i-1}.$$

Die am Schlusse von § 2, 1 entwickelte Regel, welche überhaupt dazu verhilft, aus einem Kettengliede das nächstfolgende abzuleiten, ergiebt einen einfachen Zusammenhang zwischen drei auf einander folgenden Kettengliedern: p_{i-1}, q_{i-1}; p_i, q_i; p_{i+1}, q_{i+1}. Wir können p_i, q_i mit dem Gitterpunkte p, q (ε_i mit ε, λ_i mit λ) und p_{i+1}, q_{i+1} mit p', q' aus § 2 identificiren. Für die Zahlen r, s dort, welche der Bedingung $p_i s - q_i r = \varepsilon_i$ zu genügen haben, kann man dann mit Rücksicht auf (1): $s = -\vartheta_i q_{i-1}$, $r = -\vartheta_i p_{i-1}$ einführen, und dabei wird

$$\xi = \varepsilon_i \bar{\lambda} = -\vartheta_i \varepsilon_{i-1} \lambda_{i-1}.$$

Also ist dann $\bar{\lambda}$ durch $-\lambda_{i-1}$ zu ersetzen. Dadurch entsteht die folgende *Regel:*

Man bezeichne mit g_i die grösste in $\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}$ enthaltene ganze Zahl und setze $h_i = g_i$ oder $= g_i + 1$, je nachdem

$$(\lambda_{i-1} - g_i \lambda_i)(g_i \mu_i - \vartheta_i \mu_{i-1}) < \text{ oder } \geqq \frac{1}{2}$$

ist, dann gilt

$$p_{i+1} = -\vartheta_i p_{i-1} + h_i p_i, \qquad q_{i+1} = -\vartheta_i q_{i-1} + h_i q_i$$

und überdies wird $\vartheta_{i+1} = -1$ *im ersten,* $=1$ *im zweiten Falle.*

Man erhält hiernach

$$(2) \quad \begin{pmatrix} p_{i-1}, & p_i \\ q_{i-1}, & q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_i \\ 1, & h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i, & p_{i+1} \\ q_i, & q_{i+1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{i-1} \lambda_{i-1}, & \varepsilon_i \lambda_i \\ \mu_{i-1}, & \mu_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_i \\ 1, & h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \lambda_i, & \varepsilon_{i+1} \lambda_{i+1} \\ \mu_i, & \mu_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Es wird also

$$p_{i-1} X_i + p_i Y_i = p_i X_{i+1} + p_{i+1} Y_{i+1},$$
$$q_{i-1} X_i + q_i Y_i = q_i X_{i+1} + q_{i+1} Y_{i+1}$$

vermöge

$$X_i = -\vartheta_i Y_{i+1}, \qquad Y_i = X_{i+1} + h_i Y_{i+1}.$$

Setzt man allgemein $-\frac{X_i}{Y_i} = t_i$, so gilt daher weiter

$$(3) \qquad \frac{-p_{i-1} t_i + p_i}{-q_{i-1} t_i + q_i} = \frac{-p_i t_{i+1} + p_{i+1}}{-q_i t_{i+1} + q_{i+1}},$$

während

$$(4) \qquad t_i = \frac{\vartheta_i}{h_i - t_{i+1}}$$

ist. Dabei ist zu bemerken, dass Zähler und Nenner der rechten Seite von (3) genau die Ausdrücke sind, die bei der naturgemässen Umformung des Zählers oder des Nenners der linken Seite je in einen Quotienten zweier ganzer Functionen von t_{i+1} als die Zähler dieser beiden Quotienten erscheinen. Aus (3) und (4) erhält man sogleich allgemeiner:

$$(5) \qquad \frac{-p_{i-1} t_i + p_i}{-q_{i-1} t_i + q_i} = \frac{-p_{k-1} t_k + p_k}{-q_{k-1} t_k + q_k}, \qquad i < k,$$

wenn

$$(6) \qquad t_i = \cfrac{\vartheta_i}{h_i - \cfrac{\vartheta_{i+1}}{h_{i+1} - \cdots - \cfrac{\vartheta_{k-1}}{h_{k-1} - t_k}}}$$

ist, und dabei gilt über die Entstehung von Zähler und Nenner der rechten Seite in (5) aus Zähler und Nenner der linken Seite eine ganz entsprechende Bemerkung wie bei den Beziehungen (3) und (4).

Ebenso wie ξ, η haben $\eta, -\xi$ die Determinante 1. Die Kette zu $\eta, -\xi$ ist im Wesentlichen die umgekehrte Kette zu ξ, η. Durchläuft p_i, q_i die Gitterpunkte der Kette zu ξ, η in umgekehrter Reihenfolge,

d. h. sodass die Indices i abnehmen, so hat man dabei in den Systemen $x = -\varepsilon_i p_i$, $y = -\varepsilon_i q_i$, (für welche $-\xi \geqq 0$ ausfällt), die Glieder der Kette zu η, $-\xi$. Ueber den Fortgang in dieser letzteren Kette sei noch die aus (2) folgende Beziehung:

$$(7) \quad \begin{pmatrix} -\varepsilon_{i+1} p_{i+1}, & -\varepsilon_i p_i \\ -\varepsilon_{i+1} q_{i+1}, & -\varepsilon_i q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_{i+1} \\ 1, & h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_i p_i, & -\varepsilon_{i-1} p_{i-1} \\ -\varepsilon_i q_i, & -\varepsilon_{i-1} q_{i-1} \end{pmatrix}$$

angemerkt.

§ 4.

An die Sätze in § 2 schliesst sich folgendes Theorem an:

Satz V. *Sind $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ zwei lineare Formen mit beliebigen reellen Coefficienten und einer Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und sind ξ_0, η_0 irgend welche gegebene reelle Grössen, so giebt es stets ganze Zahlen x, y, für welche*

$$|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \leqq \frac{1}{4}$$

ausfällt.

Beweis. Betrachten wir vorweg die Fälle, dass es eine ganzzahlige Substitution mit einer Determinante ± 1 giebt, durch welche die Form $\xi\eta$ der Variabeln x, y in die Form XY oder in die Form $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ der neuen Variabeln X, Y übergehe. Dem Werthsysteme $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ entspreche dabei das System $X = X_0$, $Y = Y_0$, so erweist sich vermöge jener Substitution

$$(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) = (X - X_0)(Y - Y_0), \quad \text{bez.} \quad = \frac{1}{2}((X - X_0)^2 - (Y - Y_0)^2).$$

Bestimmen wir nun X und Y als ganze Zahlen so, dass $|X - X_0| \leqq \frac{1}{2}$, $|(Y - Y_0)| \leqq \frac{1}{2}$ ist, so wird im ersten Falle, wo $\xi\eta$ äquivalent XY ist, $|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \leqq \frac{1}{4}$. Dabei ist zu bemerken, dass das Gleichheitszeichen hier unter gewissen Umständen wirklich in Betracht kommt, nämlich wenn sowohl X_0 wie Y_0 gleich ganzen Zahlen vermehrt um $\frac{1}{2}$ sind. — Im zweiten Falle, wo $\xi\eta$ äquivalent $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ ist, stellt sich sogar $|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \leqq \frac{1}{8}$ heraus.

Nunmehr schliessen wir die Fälle aus, dass $\xi\eta$ äquivalent mit XY oder mit $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ ist.

Betrachten wir irgend eine Substitution

$$x = pX + p'Y, \qquad y = qX + q'Y$$

der zu ξ, η gehörigen Kette. Wir bezeichnen den Gitterpunkt p, q mit A, den Gitterpunkt p', q' mit A'. Nach § 2 haben wir ein ganz bestimmtes Parallelogramm RSR_0S_0 oder $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$: $\left|\frac{\xi}{\varrho}\right| + \left|\frac{\eta}{\sigma}\right| \leqq 1$, dessen Berandung sowohl A, wie A' aufnimmt. Der grösseren Anschaulichkeit wegen wollen wir in der Zeichnungsebene die Coordinaten x, y derart interpretiren, dass dieses Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ein *Quadrat* im gewöhnlichen Sinne wird. Für p, q sei $\xi = \varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$, $(\lambda \geqq 0, \mu \geqq 0, \varepsilon = \pm 1)$, für p', q' sei $\xi = \varepsilon'\lambda'$, $\eta = \mu'$, $(\lambda' \geqq 0, \mu' \geqq 0, \varepsilon' = \pm 1)$. Wir haben nun die beiden, auch in § 2 unterschiedenen Fälle $\varepsilon' = -\varepsilon$ und $\varepsilon' = \varepsilon$ gesondert zu untersuchen.

1°. Es sei zunächst $\varepsilon' = -\varepsilon$ und $\lambda > \lambda' \geqq 0$, $\mu' > \mu \geqq 0$. Ein gleichzeitiges Eintreten von $\mu = 0$ und $\lambda' = 0$ ist dadurch ausgeschlossen, dass $\xi\eta$ nicht äquivalent XY sein soll. Es sei M die Seitenmitte $\xi = \frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ und M' die Seitenmitte $\xi = -\frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ in $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$. Nach den Bemerkungen in § 2 kommen A und A' derart auf der Berandung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ zu liegen, dass bei einer Umlaufung derselben in einem gewissen Sinne sich A, M, (S), A', M', A_0, M_0, (S_0), A_0', M_0' folgen (s. Fig. 5; um die Figur nicht zu compliciren, sind darin die Seiten von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ nicht ausgezogen); A ist von M, A' von M' verschieden.

Da wir die Rollen von ξ und η vertauschen, anstatt ξ, η auch η, $-\xi$ zu Grunde legen können, so dürfen wir noch die Annahme $\lambda'\mu' \geqq \lambda\mu$ machen; (weil nicht zugleich $\lambda' = 0$, $\mu = 0$ sein kann, wird dann gewiss $\lambda' > 0$, also A' von S verschieden sein). Da auf jeder Seite des Quadrates $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ der Werth $\left|\frac{\xi\eta}{\varrho\sigma}\right|$ stets von der Mitte der Seite nach ihren Enden hin abnimmt und dabei auf allen vier Seiten gleichen Werth erhält bei der nämlichen *Entfernung* von der Seitenmitte, den Begriff der Entfernung im gewöhnlichen Sinne genommen, so läuft jene Annahme darauf hinaus, dass $A'M' \leqq AM$ sein soll.

Wir construiren weiter das Quadrat $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$, dessen Ecken auf $\eta = 0$, $\xi = 0$ halb so grosse Entfernungen von O haben wie R, R_0, S, S_0. Die Berandung von $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ nimmt die Punkte $X = \pm\frac{1}{2}$, $Y = 0$ und $X = 0$, $Y = \pm\frac{1}{2}$ auf. Legen wir sodann um jeden einzigen Gitterpunkt als Mittelpunkt ein Quadrat, welches dem Quadrate $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ gleich und in den Seiten parallel gestellt ist, so ergeben diese Quadrate das Bild der in Fig. 5 mit ausgezogener Umrandung gezeichneten Quadrate. Die einzelnen Gitterpunkte sind in dieser Figur durch ihre Coordinaten X, Y

angedeutet. Das erste Quadrat $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ um den Nullpunkt stösst mit Stücken seiner Seiten an die Quadrate mit den Mittelpunkten A, A', A_0, A_0', während es die übrigen Quadrate überhaupt nicht trifft. Danach liegen jene Quadrate offenbar so, dass keine zwei in einander eingreifen, und zwischen sich lassen sie noch lauter gleiche und parallel liegende Lücken in Form von Rechtecken, welche die einzelnen Punkte $X+\frac{1}{2}$, $Y+\frac{1}{2}$ mit ganzzahligen X, Y zu Mittelpunkten haben.

Es sei beispielsweise $GHJK$ die rechteckige Lücke mit dem Mittelpunkte $X=\frac{1}{2}$, $Y=\frac{1}{2}$ oder L, so dass die Seiten GH, HJ, JK, KG

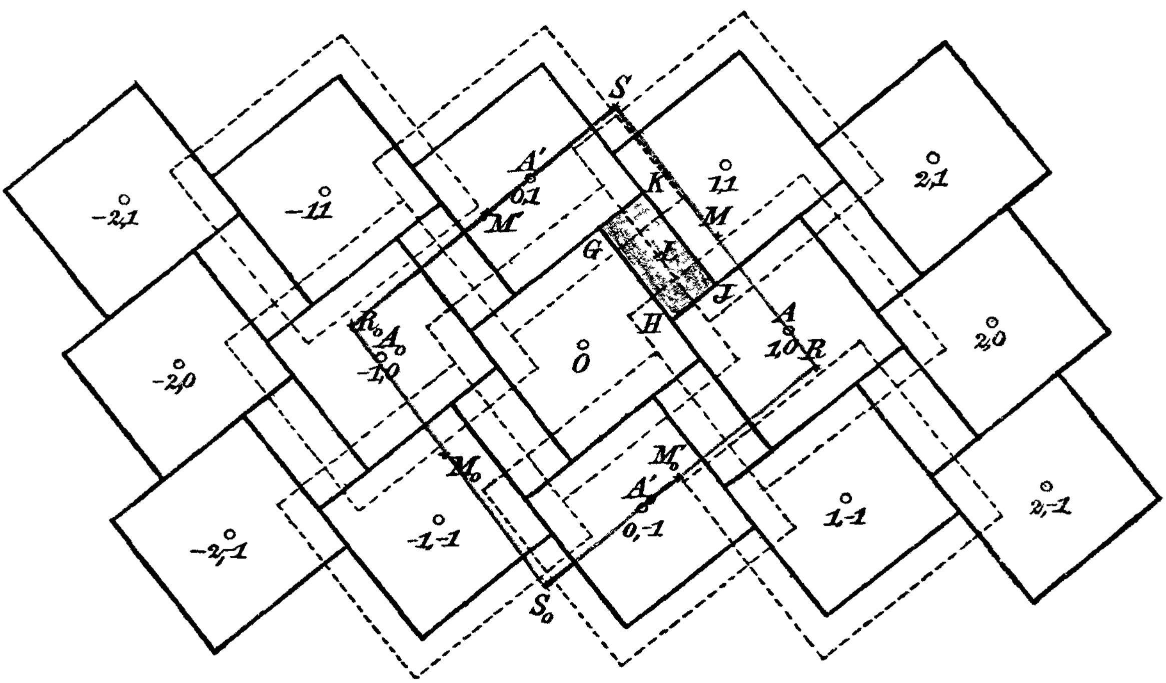

Fig. 5.

sich an die Quadrate mit den Mittelpunkten $X, Y = 0, 0; 1, 0; 1, 1; 0, 1$ anlegen. Da AH, $M'GM$, $A'K$ sämmtlich parallel der Linie $\eta = 0$ sind, so ist $GH = MA \leqq MS$ und $GK = M'A' < M'S$, also $GH \geqq GK$ und überdies $\frac{1}{2} RS \geqq GH$, $\frac{1}{2} RS > GK$; (man beachte, dass A' nicht in S fällt). In jeder der rechteckigen Lücken ist daher eine Seite kleiner, die andere höchstens so gross als die Seite des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$.

Unter dem Inhalt einer Figur wollen wir den Werth des Integrales $\iint dX\,dY$ über ihre Fläche verstehen. Der Inhalt des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ ist dann, weil $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $pq' - qp' = \pm 1$ ist, gleich $\frac{1}{2}\varrho\sigma$ und der Inhalt des Rechteckes $GHJK$ ist $< \frac{1}{2}\varrho\sigma$. Nun kommt in der ganzen Ebene auf jeden Gitterpunkt $X = X^*$, $Y = Y^*$ einerseits ein Parallelogramm $-\frac{1}{2} \leqq X - X^* \leqq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqq Y - Y^* \leqq \frac{1}{2}$ vom Inhalte 1, wobei diese Parallelogramme die ganze Ebene lückenlos erfüllen, ohne gegenseitig in einander einzudringen, andererseits kommt hier auf jeden Gitterpunkt X^*, Y^* ein Quadrat mit dem Mittelpunkte X^*, Y^* vom Inhalte $\frac{1}{2}\varrho\sigma$ und ein Rechteck mit dem Mittelpunkte $X^* + \frac{1}{2}$, $Y^* + \frac{1}{2}$ von einem gewissen Inhalte $< \frac{1}{2}\varrho\sigma$, und alle diese Quadrate und Rechtecke erfüllen ebenfalls die ganze Ebene lückenlos, ohne gegenseitig in einander einzudringen. Danach folgt offenbar

$$\frac{1}{2}\varrho\sigma < 1 < 2 \cdot \frac{1}{2}\varrho\sigma. \tag{1}$$

Es verhalte sich die Entfernung des Punktes O von der Geraden GH zu der des Punktes L von dieser Geraden, also $\frac{1}{2} M'S : \frac{1}{2} M'A'$ wie $1 : \varkappa - 1$, dabei ist $1 < \varkappa < 2$. Construiren wir dann das Quadrat $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$ mit O als Mittelpunkt, dessen Seiten denen von $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ parallel sind, so geht dessen Berandung durch L und wird deshalb dieses Quadrat eine Hälfte der Lücke $GHJK$ vollständig überdecken. Legen wir nun um jeden Gitterpunkt als Mittelpunkt ein diesem Quadrate $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$ gleiches und parallel gestelltes Quadrat, so werden daher diese Quadrate zweiter Art, die in Fig. 5 mit gestrichelter Berandung gezeichnet sind, jedenfalls die *ganze* Ebene, ohne Lücken zu lassen, überdecken. Also wird der Punkt, für den die Bestimmungsstücke ξ, η gleich den gegebenen Werthen ξ_0, η_0 sind, in wenigstens eines dieser Quadrate fallen müssen; für den Gitterpunkt x, y, welcher der Mittelpunkt des betreffenden Quadrates ist, gilt dann

$$\left|\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right| + \left|\frac{\eta - \eta_0}{\sigma}\right| \leqq \frac{\varkappa}{2}. \tag{2}$$

In das Innere des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$ dringen von allen übrigen dieser Quadrate zweiter Art nur die vier Quadrate mit den Mittelpunkten A, A_0, A', A_0'. Dabei liegen diese vier Quadrate selbst völlig auseinander, auch reichen sie nicht bis an den Nullpunkt O heran. Danach zeigt sich, dass die Gesammtheit dieser Quadrate zweiter Art die Ebene so überdecken, dass sie kein Gebiet mehr als zweifach überlagern, während noch gewisse $\llcorner\!\urcorner$ förmige Partieen mit den einzelnen Gitterpunkten als Mittelpunkten vorhanden sind, die jedesmal nur je einem dieser Quadrate angehören. Infolgedessen ist der Inhalt des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$ nothwendig < 2, d. h. man hat

(3) $$\frac{1}{2}\varkappa^2\varrho\sigma < 2.$$

Aus (2) folgt, weil das geometrische Mittel zweier Beträge nicht grösser als ihr arithmetisches Mittel ist,

$$\left|\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{\varrho\sigma}\right| \leqq \left(\frac{\varkappa}{4}\right)^2,$$

und daraus mit Rücksicht auf (3)

$$|(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)| < \frac{1}{4}.$$

2^0. Zweitens sei $\varepsilon' = \varepsilon$ und $\lambda > \lambda' > 0$, $\mu' > \mu \geqq 0$. Die Punkte A und A' werden hier von einer und derselben Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ aufgenommen, wobei weder A noch A' in die Mitte der Seite fallen und A, aber nicht A' eine Ecke sein kann. Die Länge der betreffenden Seite ist $\leqq 2AA'$.

Gehen wir nunmehr zu dem Quadrat $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ über und construiren um jeden Gitterpunkt als Mittelpunkt ein diesem gleiches und parallel gestelltes Quadrat, so liefern diese Quadrate das Bild der in Fig. 6 mit ausgezogener Umrandung gezeichneten Quadrate. Die Gitterpunkte sind dort durch ihre Coordinaten X, Y bezeichnet. Diese verschiedenen Quadrate nun greifen nicht in einander ein und lassen zwischen sich im Allgemeinen wieder lauter gleiche und parallel gelagerte rechteckige Lücken mit den einzelnen Punkten $X+\frac{1}{2}$, $Y+\frac{1}{2}$ für ganzzahlige X, Y als Mittelpunkten. Diese Lücken kommen nur zum Fortfall, wenn auch der Gitterpunkt $X=-1$, $Y=1$ auf die Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ fällt, (wenn $(\lambda-\lambda')(\mu'-\mu) = \frac{1}{2}$ ist). Es sei, wenn nicht dieser Specialfall statthat, $GHJK$ die rechteckige Lücke mit dem Mittelpunkte L: $X=\frac{1}{2}$, $Y=\frac{1}{2}$, wobei GH, HJ, JK, KG ihre an die Quadrate um $X, Y = 0,0;\ 1,0;\ 1,1;\ 0,1$ anstossenden Seiten seien. Dann ist die Seite GK gleich der Seite des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$, die Seite GH kleiner als diese Seite. Der Grenzfall, dass $GH = GK$ wäre, würde nur eintreten, wenn A und A' beide in Ecken von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ fielen, was dadurch ausgeschlossen ist, dass $\xi\eta$ nicht äquivalent der Form XY sein soll. Nunmehr erweist sich durch eine entsprechende Ueberlegung wie in 1^0, dass der Inhalt des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ zusammen mit dem des Rechteckes $GHJK$ gleich 1 sein muss, woraus

$$\frac{1}{2}\varrho\sigma \leqq 1 < 2 \cdot \frac{1}{2}\varrho\sigma \tag{1}$$

hervorgeht. Die Gleichung $\frac{1}{2}\varrho\sigma = 1$ hat statt, wenn die Lücken zum Fortfall kommen, also H mit G, J mit K zusammenfällt.

Es verhalte sich die Entfernung des Punktes A von der Geraden HJ zu der des Punktes L von dieser Geraden wie $1 : \varkappa - 1$, so ist $1 \leqq \varkappa < 2$.

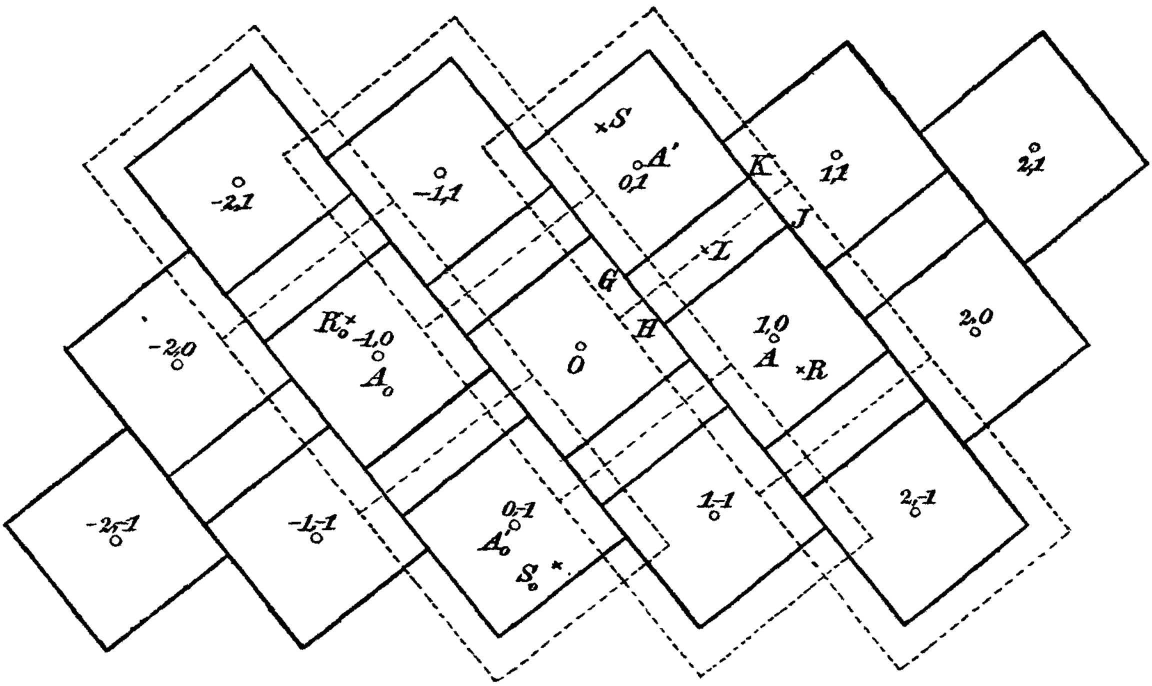

Fig. 6.

Construiren wir nun das Quadrat $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$, so wird es die Hälfte der Lücke mit dem Mittelpunkte $X = -\frac{1}{2}$, $Y = \frac{1}{2}$ vollständig überdecken. Legen wir dann gleiche und parallel gestellte Quadrate um jeden Gitterpunkt als Mittelpunkt, so erfüllen daher diese Quadrate jedenfalls die ganze Ebene. Also wird derjenige Punkt, für den die Bestimmungsstücke ξ, η die gegebenen Werthe $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ haben, in wenigstens eines dieser Quadrate fallen müssen; alsdann gilt für den Gitterpunkt x, y, welcher der Mittelpunkt des betreffenden Quadrates ist,

$$\left|\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right| + \left|\frac{\eta - \eta_0}{\sigma}\right| \leqq \frac{\varkappa}{2}. \tag{2}$$

Andererseits überdecken diese neuen Quadrate keinen Theil der Ebene mehr als *zweimal*, während noch gewisse Rechtecke mit den einzelnen Gitterpunkten als Mittelpunkten da sind, welche jedesmal nur je einem dieser Quadrate angehören. Infolgedessen muss der Inhalt des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$ kleiner als 2, also

$$\frac{1}{2}\varkappa^2\varrho\sigma < 2 \tag{3}$$

sein. Aus (2) und (3) ergiebt sich wie oben

$$|(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)| < \frac{1}{4}\cdot$$

Damit ist der Satz V vollständig bewiesen. —

Wir bemerken noch Folgendes: Aus $1 < \varrho\sigma$ und $\varkappa^2\varrho\sigma < 4$ entnimmt man $\varkappa^2 < 4$. Aus (2) erhält man daher $|\xi-\xi_0| < \varrho$; nach § 2 ist aber stets $\varrho < 2\lambda$. Hat nun die Kette zu ξ, η kein letztes Glied, ist also $\frac{-\beta}{\alpha}$ irrational, so convergirt im Verlaufe ihrer Glieder die Grösse λ nach Null. In solchem Falle kann man daher einen Gitterpunkt x, y bestimmen, wofür $|(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)| < \frac{1}{4}$ ausfällt und zudem $|\xi-\xi_0|$ unter einer beliebig vorgeschriebenen positiven Grösse liegt.

5.

Es sei jetzt a eine beliebige reelle Grösse, und wir setzen $\xi = x - ay$, $\eta = y$. Die Form $(x-ay)y$ ist nur dann äquivalent mit der Form XY, wenn a eine ganze Zahl ist, und nur dann äquivalent mit $\frac{1}{2}(X^2-Y^2)$, wenn a gleich einer ganzen Zahl vermehrt um $\frac{1}{2}$ ist. Von diesen zwei Fällen wollen wir absehen. Die Kette zu ξ, η hat hier ein bestimmtes erstes Glied p_0, q_0; für dasselbe soll $\frac{p_0}{1} = \frac{q_0}{0}$ und > 0 sein, also hat man $p_0 = 1$, $q_0 = 0$. Für das zweite Kettenglied p_1, q_1 soll $p_0q_1 - q_0p_1 = \varepsilon_0 = 1$, also $q_1 = 1$ und $|(p_1 - aq_1)q_1| < \frac{1}{2}$ sein; also ist dann p_1 gleich der an der Grösse a nächstgelegenen ganzen Zahl h_0, für die $|h_0 - a| < \frac{1}{2}$ ist. Setzt man sodann in den Formeln (5) und (6) des § 3: $i = 1$, $t^k = 0$, so resultirt $\frac{p_k}{q_k} = h_0 - t_1$. Die in § 3 erhaltenen Resultate führen nunmehr zu folgendem Satze:

Satz VI. *Es sei a eine beliebige reelle Grösse, jedoch weder eine ganze Zahl, noch gleich einer ganzen Zahl $+\frac{1}{2}\cdot$ Man bilde in folgender Weise eine Reihe von ganzzahligen Systemen p_i, q_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$.*

Zunächst sei $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, sodann $q_1 = 1$ und $p_1 = h_0$ die an der Grösse a nächstgelegene ganze Zahl so, dass $|h_0 - a| < \frac{1}{2}$ ist. Allgemein, wenn man bis zu einem Systeme p_i, q_i gelangt ist, wofür noch $p_i - aq_i \neq 0$

ausfällt, stelle man den Quotienten $\frac{p_{i-1} - aq_{i-1}}{p_i - aq_i}$ *her. Es sei* ϑ_i *sein Vorzeichen und* g_i *die grösste in dem absoluten Betrage dieses Quotienten enthaltene ganze Zahl, weiter* $h_i = g_i$ *oder* $= g_i + 1$, *je nachdem*

$$|((p_{i-1} - aq_{i-1}) - \vartheta_i g_i (p_i - aq_i))(g_i q_i - \vartheta_i q_{i-1})| < \text{oder} \geqq \frac{1}{2}$$

ist. Man setze sodann

$$p_{i+1} = h_i p_i - \vartheta_i p_{i-1}, \qquad q_{i+1} = h_i q_i - \vartheta_i q_{i-1}.$$

Der auf diese Weise ermittelten Reihe von Systemen p_i, q_i *kommen folgende Eigenschaften zu:*

1⁰. *Wenn* a *rational ist, bricht die Reihe mit einem gewissen System* p_w, q_w *ab, wofür* $p_w - aq_w = 0$ *ist. Wenn* a *irrational ist, so lässt sich die Reihe dieser Systeme unbegrenzt fortsetzen.*

2⁰. *Für je zwei auf einander folgende Systeme gilt stets*

$$p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1} = \vartheta_1 \vartheta_2 \cdots \vartheta_i = \pm 1.$$

Die Zahlen p_i, q_i *sind stets relativ prim.*

3⁰. *Man hat*

$$\frac{p_k}{q_k} = h_0 - \frac{\vartheta_1|}{|h_1} - \frac{\vartheta_2|}{|h_2} - \cdots - \frac{\vartheta_{k-1}|}{|h_{k-1}}, \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Dabei sind p_k *und* q_k *selbst denjenigen Ausdrücken gleich, die bei der naturgemässen Darstellung der rechten Seite als Quotient zweier ganzer Functionen der* h_i *und* ϑ_i *den Zähler bez. Nenner abgeben.*

4⁰. *Man hat*

$$0 < q_1 < q_2 < q_3 \cdots,$$

$$\frac{1}{2} > |p_1 - aq_1| > |p_2 - aq_2| > |p_3 - aq_3|, \cdots .$$

Um so mehr nehmen die Beträge $\left|\frac{p_k}{q_k} - a\right|$ *mit wachsendem Index ab.*

Wenn a *irrational ist, convergiren die Brüche* $\frac{p_k}{q_k}$ *mit wachsendem Index nach der Grösse* a.

5⁰. Für jedes der Systeme p_k, q_k $(k = 1, 2, \cdots)$ gilt

$$|(p_k - aq_k) q_k| < \frac{1}{2}.$$

Umgekehrt: Ist x, y irgend ein System von relativ primen ganzen Zahlen, wofür $y > 0$ und

$$|(x - ay) y| < \frac{1}{2}$$

gilt, so findet sich das Zahlenpaar x, y stets unter den Systemen p_k, q_k $(k = 1, 2, \cdots)$.

Aus dem Satze V entnimmt man noch: *Sind b, c irgend zwei weitere reelle Grössen, so kann man stets ganze Zahlen x, y finden, so dass*

$$|(x-ay-b)(y-c)|<\frac{1}{4}$$

*ist, und zwar, wenn a irrational ist, noch derart, dass zugleich $|x-ay-b|$ unter einer beliebig kleinen positiven Grösse liegt.**)

Die hier definirte Kettenbruchentwicklung mit den Näherungsbrüchen $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots$ zur Annäherung an die Grösse a soll der Diagonalkettenbruch für a heissen, mit Rücksicht darauf, dass diese Näherungsbrüche zu den Parallelogrammen mit den Linien $x-ay=0$ und $y=0$ als Diagonalen in einer ganz entsprechenden Beziehung stehen, wie die Näherungsbrüche bei der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung

$$a=l_0+\frac{1|}{|l_1}+\frac{1|}{|l_2}+\cdots,$$

wo l_0 eine ganze Zahl, $l_1, l_2, \cdots$ lauter positive Zahlen sind, zu den Parallelogrammen mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit Seiten parallel zu $x-ay=0$, $y=0$. Für diese gewöhnliche (auch sogenannte regelmässige oder normale) Kettenbruchentwicklung würde ich alsdann den charakteristischeren Namen Parallelkettenbruch in Vorschlag bringen.

Nach einem bekannten Satze von Lagrange kommt jedes Zahlenpaar x, y, wobei x, y relativ prim sind, $y>0$ und $\left|\frac{x}{y}-a\right|<\frac{1}{2y^2}$ ist, als Zähler und Nenner eines Näherungsbruches der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung für a vor. Danach erscheinen alle Näherungsbrüche des Diagonalkettenbruches für a auch unter den Näherungsbrüchen des Parallelkettenbruches für a und wird also, falls nicht beide Entwicklungen zusammenfallen, der Parallelkettenbruch stets langsamer convergiren.

Der Diagonalkettenbruch für a möge mit $a=DK\begin{pmatrix} & \vartheta_1, & \vartheta_2, & \cdots \\ h_0, & h_1, & h_2, & \cdots \end{pmatrix}$, der Parallelkettenbruch für a mit $a=PK(l_0, l_1, l_2, \cdots)$ bezeichnet werden. Die schon vorhin angedeutete geometrische Auffassung der

---

*) Tschebyscheff hat (in einem russisch geschriebenen Aufsatze in den Mémoires der Petersburger Academie, t. X, Appendix 4, 1866) gezeigt, dass, wenn a, b reelle Grössen sind, stets ganze Zahlen x, y existiren, wofür $|(x-ay-b)y|<\frac{1}{2}$ ist. Hermite hat (Crelle's Journal, Bd. 88, 1880) bewiesen, dass der Ausdruck links durch ganze Zahlen x, y kleiner als $\sqrt{\frac{2}{27}}$ gemacht werden kann. Der Satz im Texte ergiebt ein schärferes Resultat, weil $\frac{1}{4}<\sqrt{\frac{2}{27}}$ ist.

Parallelkettenbrüche, welche der hier gegebenen Ableitung der Diagonalkettenbrüche entspricht, führt leicht zu folgendem Satze:

Um aus der Reihe der Systeme $p_i, q_i\,(i = 0, 1, 2, \cdots)$ *für den Diagonalkettenbruch von* a *die Reihe der Zähler und Nenner der sämmtlichen Näherungsbrüche des Parallelkettenbruches von* a *zu erhalten, hat man nur die erstere Reihe in der Weise zu erweitern, dass, so oft eine Zahl* $\vartheta_i = 1$ *(für ein* $i \geqq 1$*) ausfällt, zwischen die beiden Systeme* p_{i-1}, q_{i-1} *und* p_i, q_i *noch das neue System* $p_i - p_{i-1}, q_i - q_{i-1}$ *eingefügt wird.*

Man leitet aus diesem Satze die nachstehende Regel ab, welche erlaubt, aus einem Diagonalkettenbruche $a = DK\begin{pmatrix} & \vartheta_1, & \vartheta_2, & \cdots \\ h_0, & h_1, & h_2, & \cdots \end{pmatrix}$ sogleich den Parallelkettenbruch $a = PK(l_0, l_1, l_2, \cdots)$ zu entnehmen:

Aus der Reihe der Zahlen $h_0, h_1, h_2, \cdots$ *entsteht die Reihe der Zahlen* $l_0, l_1, l_2, \cdots$, *indem an Stelle einer jeden Zahl* h_i *substituirt wird:*

$$\begin{array}{lllll} h_i, & \textit{wenn} & \vartheta_i = -1, & \vartheta_{i+1} = -1, \\ h_i - 1, & \textit{wenn} & \vartheta_i = 1, & \vartheta_{i+1} = -1, \\ h_i - 1, 1, & \textit{wenn} & \vartheta_i = -1, & \vartheta_{i+1} = 1, \\ h_i - 2, 1, & \textit{wenn} & \vartheta_i = 1, & \vartheta_{i+1} = 1 \end{array}$$

ist; dabei hat man sich noch $\vartheta_0 = -1$ *zu denken und dann von dieser Vorschrift auch für* $i = 0$ *Gebrauch zu machen.*

Die Diagonalkettenbrüche sind hiernach nicht bloss wegen der einfacheren Charakterisirung ihrer Näherungsbrüche leichter zu handhaben, sie enthalten auch alle Einzelheiten über die darzustellenden Grössen, welche die Parallelkettenbrüche erkennen lassen.

Beispiel: Der Parallelkettenbruch für $\sqrt{13}$ ist

$$PK(3, 1, 1;\ 1, 1, 6, 1, 1;\ 1, 1, 6, 1, 1; \cdots)$$

mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2};\ \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{119}{33}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71};\ \frac{393}{109}, \frac{649}{180}, \frac{4287}{1189}, \frac{4936}{1369}, \frac{9223}{2558}; \cdots,$$

der Diagonalkettenbruch für $\sqrt{13}$ ist

$$DK\begin{pmatrix} & +, & -, & +, & +, & -, & +, & +, & \cdots \\ 4, & 2; & 2, & 8, & 2; & 2, & 8, & 2; & \cdots \end{pmatrix}$$

mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{4}{1}, \frac{7}{2};\ \frac{18}{5}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71};\ \frac{649}{180}, \frac{4936}{1369}, \frac{9223}{2558}; \cdots$$

d. i. dem $2, 3;\ 5, 7, 8; \cdots 5k,\ 5k + 2,\ 5k + 3; \cdots$ ten Näherungsbruch der ersteren Entwicklung.

Dagegen würde diejenige Kettenbruchentwicklung

$$K\begin{pmatrix} & \vartheta_1, & \vartheta_2, & \cdots \\ h_0, & h_1, & h_2, & \cdots \end{pmatrix} = h_0 - \frac{\vartheta_1 |}{| h_1} - \frac{\vartheta_2 |}{| h_2} - \cdots,$$

wobei $\vartheta_1 = \pm 1$, $\vartheta_2 = \pm 1, \cdots$ und die $h_1, h_2, \cdots$ positive ganze Zahlen sind derart, dass die Reste $-\frac{\vartheta_k |}{| h_k} - \frac{\vartheta_{k+1} |}{| h_{k+1}} - \cdots$ stets zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ liegen, für $\sqrt{13}$:

$$K\begin{pmatrix} & 1, & 1, & -1, & 1, & 1, & -1, & 1, & \cdots \\ 4, & 3; & 2, & 7, & 3; & 2, & 7, & 3; & \cdots \end{pmatrix}$$

sein mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{4}{1}, \frac{11}{3}; \frac{18}{5}, \frac{137}{38}, \frac{393}{109}; \frac{649}{180}, \frac{4936}{1369}, \frac{14159}{3927}; \cdots$$

d. i. dem $2, 4; 5, 7, 9; \cdots 5k, 5k+2, 5k+4; \cdots$ten Näherungsbruche des Parallelkettenbruches für $\sqrt{13}$. Also erfüllt bei dieser Art der Entwicklung einerseits nicht jeder Näherungsbruch $\frac{x}{y}$ die Bedingung

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{13} \right| < \frac{1}{2y^2},$$

andererseits kommt nicht jeder Bruch $\frac{x}{y}$ mit dieser Eigenschaft unter den Näherungsbrüchen vor.

Der Diagonalkettenbruch für die Basis der natürlichen Logarithmen lautet:

$$e = DK\begin{pmatrix} & 1, & -1, & 1, & -1, & \cdots & 1, & -1, & \cdots \\ 3, & 3, & 2, & 5, & 2, & \cdots & 2m+1, & 2, & \cdots \end{pmatrix}.$$

Die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche dieses Kettenbruches geben also die sämmtlichen Auflösungen der Bedingung

$$-\frac{1}{2} < (x - ey)\, y < \frac{1}{2}$$

in relativ primen positiven ganzen Zahlen x, y.

§ 6.

1. Ein unendlicher Diagonalkettenbruch

$$(1) \qquad DK\begin{pmatrix} & \vartheta_1, & \vartheta_2, & \cdots \\ h_0, & h_1, & h_2, & \cdots \end{pmatrix}$$

für eine irrationale Grösse a soll periodisch heissen, wenn es eine positive Zahl v giebt, so dass von einem gewissen Index j an stets

$$(2) \qquad \vartheta_k = \vartheta_{k+v}, \quad h_k = h_{k+v} \qquad (k = j, j+1, j+2, \cdots)$$

ist. Das System der Werthe

$$\begin{pmatrix} \vartheta_j, & \vartheta_{j+1}, & \cdots, & \vartheta_{j+v-1} \\ h_j, & h_{j+1}, & \cdots, & h_{j+v-1} \end{pmatrix}$$

heisse dann eine Periode des Kettenbruches.

Wir beweisen zunächst die folgende Thatsache:

Ist der Diagonalkettenbruch für eine irrationale Grösse a periodisch, so ist a Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten.

Wir verwenden für die Kette zu den Formen $\xi = x - ay$, $\eta = y$ die in § 3 eingeführten Bezeichnungen. Durch die Substitution

$$T_i = \begin{pmatrix} p_{i-1}, & p_i \\ q_{i-1}, & q_i \end{pmatrix}$$

geht ξ in $\varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}X_i + \varepsilon_i\lambda_i Y_i$ über, man hat also die Formel der Composition:

$$(1, -a)\, T_i = (\varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1},\ \varepsilon_i\lambda_i).$$

Aus § 3, Gleich. (2) leitet man allgemeiner die Regel

$$(\varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}, \varepsilon_i\lambda_i)\begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_i \\ 1, & h_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_{i+1} \\ 1, & h_{i+1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_{k-1} \\ 1, & h_{k-1} \end{pmatrix} = (\varepsilon_{k-1}\lambda_{k-1},\ \varepsilon_k\lambda_k),$$
$$i < k$$

ab, und daraus entnimmt man insbesondere eine Beziehung:

$$\varepsilon_k\lambda_k = \varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}r_{i,k} + \varepsilon_i\lambda_i s_{i,k},$$

wo $r_{i,k}$, $s_{i,k}$ gewisse ganze Zahlen sind, die bloss von den Werthen $\vartheta_i, h_i, \vartheta_{i+1}, h_{i+1}, \cdots, \vartheta_{k-1}, h_{k-1}$ abhängen. Da mit unbegrenzt wachsendem k die Grösse λ_k nach Null convergirt, ersieht man danach, dass das Verhältniss $\frac{\varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}}{\varepsilon_i\lambda_i}$ durch die unendliche Reihe der Grössen ϑ_k, h_k für die sämmtlichen Indices $k \geqq i$ vollständig bestimmt ist.

Wenn nun mit irgend einem Werthe v für alle Indices $k \geqq j$ die Beziehungen (2) statthaben, muss daher nothwendig

$$\frac{\varepsilon_{j+v-1}\lambda_{j+v-1}}{\varepsilon_{j+v}\lambda_{j+v}} = \frac{\varepsilon_{j-1}\lambda_{j-1}}{\varepsilon_j\lambda_j}$$

sein. Setzen wir $\frac{\varepsilon_{j+v-1}\lambda_{j+v-1}}{\varepsilon_{j-1}\lambda_{j-1}} = \tau$, wobei $0 < |\tau| < 1$ sein wird, so folgt

$$\varepsilon_{j+v-1}\lambda_{j+v-1} = \tau\varepsilon_{j-1}\lambda_{j-1}, \quad \varepsilon_{j+v}\lambda_{j+v} = \tau\varepsilon_j\lambda_j.$$

Nun hat man

$$(1, -a)\, T_{j+v} = (\tau\varepsilon_{j-1}\lambda_{j-1},\ \tau\varepsilon_j\lambda_j), \quad (\varepsilon_{j-1}\lambda_{j-1},\ \varepsilon_j\lambda_j)\, T_j^{-1} = (1, -a)$$

daraus entsteht

$$(1, -a)\, T_{j+v}T_j^{-1} = (\tau, -\tau a).$$

Bezeichnet man mit $\begin{pmatrix} \mathrm{p}, & \mathrm{r} \\ \mathrm{q}, & \mathrm{s} \end{pmatrix}$ das Coefficientenschema der Substitution $T_{j+v} T_j^{-1}$, so bedeutet diese letzte Formel

$$\mathrm{p} - a\mathrm{q} = \tau, \quad \mathrm{r} - a\mathrm{s} = -\tau a.$$

Daraus erhält man

$$(\mathrm{r} - a\mathrm{s}) + (\mathrm{p} - a\mathrm{q})\, a = 0$$

und hierin kann nicht $\mathrm{q} = 0$ sein, denn sonst müsste $\mathrm{p} = \tau$ sein, während τ keine ganze Zahl ist, da $|\tau|$ zwischen 0 und 1 fällt.

2. Wir beweisen jetzt die Umkehrung der eben festgestellten Thatsache:

Satz VII. *Ist eine irrationale Grösse a Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten, so ist der Diagonalkettenbruch für a stets periodisch.*

Beweis. Es sei

$$n_0 a^2 + n_1 a + n_2 = 0$$

diejenige Gleichung für a, in der n_0, n_1, n_2 relativ prime ganze Zahlen sind und $n_0 > 0$ ist. Man hat $a = \frac{-n_1 \pm \sqrt{n_1^2 - 4 n_0 n_2}}{2 n_0}$, so dass die ganze Zahl $D = n_1^2 - 4 n_0 n_2$ positiv und wegen der vorausgesetzten Irrationalität von a jedenfalls nicht das Quadrat einer ganzen Zahl ist. Die zweite Wurzel jener Gleichung $\frac{-n_1 \mp \sqrt{D}}{2 n_0}$ werde mit $\bar{a}$ bezeichnet.

Wir setzen

$$\xi = x - ay = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \frac{1}{a - \bar{a}}(x - \bar{a} y) = \gamma x + \delta y, \quad \zeta = y.$$

Dabei haben ξ, η ebenso wie ξ, ζ die Determinante 1, und gilt eine Beziehung:

$$\zeta = \eta + b\xi, \quad b = -\frac{1}{a - \bar{a}} = \mp \frac{n_0}{\sqrt{D}}.$$

Sodann entsteht

$$\pm \sqrt{D}\, \xi \eta = f = n_0 x^2 + n_1 xy + n_2 y^2.$$

Wir betrachten nunmehr die Kette zu den Formen ξ, η. Diese Kette wird jedenfalls nach beiden Seiten unbegrenzt sein. Wir verwenden für diese Kette die in § 3 eingeführten Bezeichnungen. Ausserdem mögen ξ_i, η_i die Ausdrücke bedeuten, in welche ξ, η durch die Substitution

$$(T_i) \qquad x = p_{i-1} X_i + p_i Y_i, \quad y = q_{i-1} X_i + q_i Y_i$$

übergehen, und es bedeute T_i das quadratische Schema $\begin{pmatrix} \varepsilon_{i-1} \lambda_{i-1}, & \varepsilon_i \lambda_i \\ \mu_{i-1}, & \mu_i \end{pmatrix}$ der Coefficienten von ξ_i, η_i, wobei dann $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} T_i = \mathsf{T}_i$ gilt.

Durch die ganzzahlige Substitution T_i, deren Determinante ± 1 ist, geht die Form $f = \pm \sqrt{D}\, \xi \eta$ in eine Form

$$f_i = \pm \sqrt{D}\,\xi_i\,\eta_i = N_0 X_i^2 + N_1 X_i Y_i + N_2 Y_i^2$$

über. Dabei sind N_0, N_1, N_2 ganze rationale Zahlen und folgt $N_1^2 - 4N_0 N_2 = D$; da D nicht eine Quadratzahl ist, hat man gewiss $N_0 \neq 0$, $N_2 \neq 0$. Zudem bestehen dabei nach § 2, 3 diese Beziehungen:

entweder

$$\frac{N_2}{N_0} < 0, \quad \frac{N_1}{N_0} > 0, \quad |N_0| < \frac{1}{2}\sqrt{D}, \quad |N_2| < \frac{1}{2}\sqrt{D}, \quad |N_1| < \sqrt{D}$$

oder

$$\frac{N_2}{N_0} > 0, \quad \frac{N_1}{N_0} > 0, \quad |N_0| < \frac{1}{2}\sqrt{D}, \quad |N_2| < \frac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \sqrt{D} < |N_1| < \frac{3}{2}\sqrt{D},$$

$$|N_1 - N_0 - N_2| > \frac{1}{2}\sqrt{D}.$$

In jedem Falle kommen hiernach für die ganzzahligen Coefficienten N_0, N_1, N_2 einer Form f_i von vornherein nur eine endliche Anzahl von möglichen Werthsystemen in Betracht. Man wird also jedenfalls irgend zwei Indices $i = j$ und $i = j + v$, wo $v > 0$ ist, finden können, für welche die beiden Formen f_j und f_{j+v} in den Coefficienten N_0, N_1, N_2 übereinstimmen.

Ersetzt man X_{j+v}, Y_{j+v} in den Formen ξ_{j+v}, η_{j+v} durch die Zeichen X_j, Y_j der Variabeln in ξ_j, η_j, so werden dadurch Beziehungen

$$\xi_{j+v} = \mathsf{A}\xi_j + \mathsf{B}\eta_j, \qquad \eta_{j+v} = \Gamma\xi_j + \Delta\eta_j$$

hergestellt, wobei die Coefficienten $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ durch $\mathsf{T}_{j+v} = \begin{pmatrix}\mathsf{A}, & \mathsf{B}\\ \Gamma, & \Delta\end{pmatrix}\mathsf{T}_j$ bestimmt sind, und vermöge dieser Beziehungen muss dann $\xi_{j+v}\eta_{j+v} = \xi_j\eta_j$ entstehen. Vergleicht man die Coefficienten von ξ_j^2, η_j^2, $\xi_j\eta_j$ auf beiden Seiten dieser Gleichung, so folgt $\mathsf{A}\Gamma = 0$, $\mathsf{B}\Delta = 0$, $\mathsf{A}\Delta + \mathsf{B}\Gamma = 1$. Danach muss entweder

(3) $\quad \mathsf{B} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \mathsf{A} = \dfrac{1}{\Delta} = \tau; \qquad \xi_{j+v} = \tau\xi_j, \quad \eta_{j+v} = \dfrac{1}{\tau}\eta_j$

oder

(3*) $\quad \mathsf{A} = 0, \quad \Delta = 0, \quad \mathsf{B} = \dfrac{1}{\Gamma} = \tau; \qquad \xi_{j+v} = \tau\eta_j, \quad \eta_{j+v} = \dfrac{1}{\tau}\xi_j$

mit einem von Null verschiedenen Factor τ sein. Die zweite Art von Beziehungen aber ist unmöglich, weil in der Form η_j der zweite Coefficient einen grösseren absoluten Betrag hat als der erste Coefficient, in der Form ξ_{j+v} aber das Entgegengesetzte statthaben muss. Also gelten nothwendig die Beziehungen (3) und die Vergleichung der Coefficienten in η_j und η_{j+v} zeigt noch, dass τ positiv und < 1 ist.

Die Gleichungen (3) ergeben

$$\mathsf{T}_{j+v} = \begin{pmatrix}\tau, & 0\\ 0, & \frac{1}{\tau}\end{pmatrix}\mathsf{T}_j, \qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} T_{j+v}\, T_j^{-1} = \begin{pmatrix}\tau, & 0\\ 0, & \frac{1}{\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}.$$

Ist $\begin{pmatrix}\mathrm{p}, & \mathrm{r}\\ \mathrm{q}, & \mathrm{s}\end{pmatrix}$ das Coefficientenschema der Substitution $T_{j+v}\,T_j^{-1}$, wobei p, q, r, s ganze Zahlen sind und $\mathrm{ps}-\mathrm{qr}=\pm 1$ ist, so verwandeln sich hiernach ξ, η, wenn man darin x, y durch $\mathrm{p}x+\mathrm{r}y$, $\mathrm{q}x+\mathrm{s}y$ ersetzt, in die Ausdrücke $\tau\xi$, $\frac{1}{\tau}\eta$. Diese zwei Ausdrücke ergeben dasselbe Product wie ξ und η. Durch die umgekehrte Substitution werden ξ, η in $\frac{1}{\tau}\xi$, $\tau\eta$ übergehen. Hat man nun einen Gitterpunkt x, y, für den x, y relativ prim sind und $\xi=\varepsilon\lambda$, $\eta=\mu$ ($\mu>0$, $\lambda>0$, $\varepsilon=\pm 1$), $\lambda\mu<\frac{1}{2}$ ist, so existirt dann also ein anderer Gitterpunkt, für den ebenfalls x, y relativ prim sind und $\xi=\tau\varepsilon\lambda$, $\eta=\frac{1}{\tau}\mu$ ist, und ferner ein Gitterpunkt, für den x, y relativ prim sind und $\xi=\frac{1}{\tau}\varepsilon\lambda$, $\eta=\tau\mu$ ist; und diese zwei weiteren Gitterpunkte müssen dann ebenso wie der erste als Glieder der Kette zu ξ, η auftreten.

Nach (3) haben wir $\varepsilon_{j+v}\lambda_{j+v}=\tau\varepsilon_j\lambda_j$, $\mu_{j+v}=\frac{1}{\tau}\mu_j$. Nun müssen weiter die Punkte $\xi=\varepsilon_{j+v+1}\lambda_{j+v+1}$, $\eta=\mu_{j+v+1}$ und $\xi=\tau\varepsilon_{j+1}\lambda_{j+1}$, $\eta=\frac{1}{\tau}\mu_{j+1}$, welche beide als Glieder der Kette auftreten, identisch sein. Denn hätte man $\mu_{j+v+1}>\frac{1}{\tau}\mu_{j+1}$, so würde der Punkt $\xi=\tau\varepsilon_{j+1}\lambda_{j+1}$, $\eta=\frac{1}{\tau}\mu_{j+1}$ ein Kettenglied sein, für das $\mu_{j+v}<\eta<\mu_{j+v+1}$ wäre, während $\eta=\mu_{j+v}$ und $\eta=\mu_{j+v+1}$ ja zwei auf einander folgenden Kettengliedern entsprechen. Hätte man dagegen $\mu_{j+v+1}<\frac{1}{\tau}\mu_{j+1}$, so würde $\xi=\frac{1}{\tau}\varepsilon_{j+v+1}\lambda_{j+v+1}$, $\eta=\tau\mu_{j+v+1}$ ein Kettenglied sein, wofür $\mu_j<\eta<\mu_{j+1}$ wäre, was ebenfalls nicht möglich ist. Also muss $\mu_{j+v+1}=\frac{1}{\tau}\mu_{j+1}$ sein und müssen sodann jene zwei Punkte zusammenfallen.

Auf dieselbe Art erschliesst man successive weiter

(4) $$\varepsilon_{k+v}\lambda_{k+v}=\tau\varepsilon_k\lambda_k,\qquad \mu_{k+v}=\frac{1}{\tau}\mu_k$$

für $k=j+2, j+3, \cdots$. Sodann kann man in der Reihe der Indices rückwärts gehen und diese Beziehungen (4), welche auch für $k=j-1$ bereits durch (3) feststehen, nach einander für $k=j-2, j-3, \cdots$ erhalten. Also gelten diese Beziehungen (4) überhaupt für jeden möglichen Index k. Man hat nunmehr für jeden Index i: $\mathsf{T}_{i+v}=\begin{pmatrix}\tau, & 0\\ 0, & \frac{1}{\tau}\end{pmatrix}\mathsf{T}_i$; andererseits gilt nach § 3, (2) die Regel $\mathsf{T}_{i+1}=\mathsf{T}_i\begin{pmatrix}0, & -\vartheta_i\\ 1, & h_i\end{pmatrix}$. Wendet man die erstere Formel für zwei auf einander folgende Indices $i = k$, $i = k+1$ an und hernach die letztere für $i = k$ und $i = k + v$, so folgt zuerst $\mathsf{T}_{k+v}^{-1}\mathsf{T}_{k+v+1} = \mathsf{T}_k^{-1}\mathsf{T}_{k+1}$ und sodann:

(5) $$\vartheta_{k+v} = \vartheta_k, \quad h_{k+v} = h_k \qquad (k = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots).$$

Nach diesen Beziehungen (5) kann die Kette zu ξ, η als vollkommen periodisch bezeichnet werden.

Wir ziehen endlich auch die Form $\zeta = y$ heran. Für ein jedes Glied $x = p_i$, $y = q_i$ der Kette zu den Formen ξ, η gilt $\eta > 0$ und $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$. Gleichzeitig ist dabei $\sqrt{D}\,|\xi\eta|$ stets eine rationale ganze Zahl. Indem diese Zahl $< \frac{1}{2}\sqrt{D}$ ist, kann sie nicht die grösste in $\frac{1}{2}\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl überschreiten. Wir setzen letztere ganze Zahl $\left[\frac{1}{2}\sqrt{D}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{D} - d$, dabei wird $0 < d < 1$. Aus $\sqrt{D}\,|\xi\eta| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{D} - d$ folgt mit Rücksicht auf $\zeta = y = \eta + b\xi$:

$$|\xi\zeta| \leqq \frac{1}{2} - \frac{d}{\sqrt{D}} + |b\xi^2|, \qquad \zeta \geqq \eta - |b\xi|.$$

Nun nimmt, wenn man die Reihe der Kettenglieder zu ξ, η durchläuft, darin sowohl $|\xi|$ wie $\left|\frac{\xi}{\eta}\right|$ beständig ab. Geht man soweit in dieser Reihe, dass $|b\xi^2| < \frac{d}{\sqrt{D}}$ und $\left|\frac{\xi}{\eta}\right| < \frac{1}{|b|}$ ist, so hat man dann also $|\xi\zeta| < \frac{1}{2}$, $\zeta > 0$ und müssen daher die betreffenden Systeme $x = p_i$, $y = q_i$, die man nun antrifft, sämmtlich auch Glieder der Kette zu den Formen ξ, ζ sein.

Ist umgekehrt x, y ein Glied der Kette zu den Formen ξ, ζ, so ist dafür $\zeta > 0$ und $|\xi\zeta| < \frac{1}{2}$; daraus folgt

$$\sqrt{D}\,|\xi\eta| < \frac{1}{2}\sqrt{D} + |\sqrt{D}\,b\xi^2|, \qquad \eta \geqq \zeta - |b\xi|.$$

Geht man nun in der Reihe der Kettenglieder zu ξ, ζ soweit, dass $|\sqrt{D}\,b\xi^2| \leqq 1 - d$ und $\left|\frac{\xi}{\zeta}\right| < \frac{1}{|b|}$ ist, so folgt hier $\eta > 0$ und andererseits $\sqrt{D}\,|\xi\eta| < \left[\frac{1}{2}\sqrt{D}\right] + 1$. Da aber $\sqrt{D}\,|\xi\eta|$ hierbei stets eine ganze rationale Zahl wird, muss dann überhaupt $\sqrt{D}\,|\xi\eta| \leqq \left[\frac{1}{2}\sqrt{D}\right] < \frac{1}{2}\sqrt{D}$, mithin $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ sein. Danach findet sich alsdann das betreffende System x, y stets auch unter den Gliedern der Kette zu ξ, η.

Auf diese Weise stimmen überhaupt die zu ξ, η und die zu ξ, ζ gehörige Kette von gewissen zwei Gliedern an in dem ganzen weiteren Verlaufe ihrer Kettenglieder völlig mit einander überein. Da nun die einzelnen Werthe ϑ_i, h_i in einer Kette jedesmal aus drei auf einander folgenden Kettengliedern abzuleiten sind, so werden sich danach auch die Relationen (5) von einem gewissen Index an auf die Kette zu $\xi = x - ay$, $\zeta = y$ übertragen, d. h. eben der Diagonalkettenbruch für die Grösse a ist periodisch.

In entsprechender Beziehung wie der Diagonalkettenbruch für a zu der Kette steht, die zu den Formen ξ, η gehört, steht der Diagonalkettenbruch für die conjugirte algebraische Zahl $\bar{a}$ zu der Kette, die zu den Formen $(a - \bar{a})\,\eta$, $-\frac{1}{a-\bar{a}}\,\xi$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu η, $-\xi$ gehört. Der einfache Zusammenhang der Kette zu ξ, η und der Kette zu η, $-\xi$ ist am Schlusse von § 3 erörtert; aus der dort angegebenen Beziehung (7) erhellt nun, dass, wenn $\begin{pmatrix} \vartheta_j, & \vartheta_{j+1}, & \cdots, & \vartheta_{j+v-1} \\ h_j, & h_{j+1}, & \cdots, & h_{j+v-1} \end{pmatrix}$ eine Periode des Diagonalkettenbruches für a ist, $\begin{pmatrix} \vartheta_j, & \vartheta_{j+v-1}, & \cdots, & \vartheta_{j+1} \\ h_{j+v-1}, & h_{j+v-2}, & \cdots, & h_j \end{pmatrix}$ eine Periode des Diagonalkettenbruches für $\bar{a}$ sein wird.

Zürich, den 31. December 1899.