Zur intuitionistischen Axiomatik der projektiven Geometrie.

Von

A. Heyting in Enschede (Niederlande).

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	491
§ 1.	Die Axiome	493
§ 2.	Eigenschaften der Ebene	497
§ 3.	Eigenschaften des Raumes	501
§ 4.	Entfernungsbeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen	507
§ 5.	Der erste Satz von Desargues	509
§ 6.	Der zweite Satz von Desargues	512
§ 7.	Der Involutionssatz	514
§ 8.	Projektivitäten zweiter Stufe	515
§ 9.	Die zentrale Kollineation	518
§ 10.	Koordinaten auf der Geraden	521
§ 11.	Koordinaten in der Ebene	525
§ 12.	Koordinaten im Raum	528
§ 13.	Koordinatentransformationen	529
§ 14.	Der Satz von Pascal	531
§ 15.	Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie	533

Bemerkung. Die Bezeichnung $A, B, C \omega D, E, F$ bedeutet: *jeder* der Punkte A, B, C liegt von *jedem* der Punkte D, E, F entfernt.

Einleitung.

Die folgende Untersuchung beschränkt sich darauf, von bestimmten Verknüpfungsaxiomen ausgehend, die Geometrie soweit aufzubauen, daß darin Koordinaten eingeführt werden können. Hauptzweck ist, diesen Aufbau so zu machen, daß allen Anforderungen der intuitionistischen Mathematik genügt wird. Neue Resultate werden nicht abgeleitet. Jedoch ist wohl kein einziger der angeführten Sätze jemals streng bewiesen worden.

In meiner (holländisch geschriebenen) Dissertation „Intuitionistische Axiomatiek der Projectieve Meetkunde“ [1]) habe ich mit Hilfe von Ordnungs- und Stetigkeitsaxiomen Koordinaten eingeführt, welche sich umkehrbar eindeutig auf die gewöhnlichen reellen Zahlen abbilden ließen. Hier werden nur Verknüpfungsaxiome vorausgesetzt; dementsprechend kann nur gezeigt werden, daß die Koordinaten gewissen, eine Zahlenspezies kennzeichnenden Postulaten genügen. In einer früheren Abhandlung [2]) habe ich ein System solcher Postulate gegeben und für ein Zahlensystem, das diesen genügt, die Theorie der linearen Gleichungen und die Anfänge der analytischen Geometrie ausgearbeitet. Die Resultate dieser Arbeit werden in § 11 ff. benutzt.

Bei der Wahl der Axiome habe ich mich von Pieri [3]), dem auch Whitehead [4]) die Axiome entnimmt, führen lassen; das Pierische System mußte aber durchgreifend geändert werden, um zu erreichen, daß alle Axiome in der soeben erwähnten analytischen Geometrie galten. Weiter ist ausgiebig Gebrauch gemacht von den Werken von F. Schur, „Grundlagen der Geometrie“ (hauptsächlich in § 9), und K. Th. Vahlen, „Abstrakte Geometrie“ (in §§ 11, 12).

In § 1 werden zunächst die Axiome angegeben; sodann wird bewiesen, daß sie für die in „Lineare Gleichungen“ aufgebaute analytische Geometrie gelten; dabei ergibt sich zugleich der Grund für die Änderungen in dem System von Pieri. In § 2 bis 7 werden die Hauptsätze der projektiven Geometrie bis einschließlich die beiden Sätze von Desargues in der Ebene abgeleitet. Als Vorbereitung zu der Einführung von Koordinaten auf der Geraden behandle ich in § 8 nach dem Vorgang von Whitehead (loc. cit. Chapter V, § 30 bis 40) die Projektivitäten zweiter Stufe und in § 9 nach dem Vorgang von Schur (loc. cit. S. 25) die zentralen Kollineationen. In § 10 werden Koordinaten auf der Geraden eingeführt nach einer Methode, die im wesentlichen derjenigen von Schur nachgebildet ist. In § 11 und 12 werden die Koordinaten auf die Ebene und auf den Raum ausgedehnt und wird der Zusammenhang mit der analytischen Geometrie hergestellt. In §§ 13—15 wird noch der Zusammenhang des sogenannten Pascalschen Satzes mit der kommutativen Eigenschaft der Multiplikation einerseits und dem Fundamentalsatz andererseits streng bewiesen.

---

[1]) Groningen, P. Noordhoff, 1925.

[2]) „Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplikation“; die Abhandlung befindet sich in diesem Annalenband und wird weiterhin zitiert als „Lineare Gleichungen“ oder „Lin. Gl.“.

[3]) Memorie di Torino, 1898.

[4]) „The Axioms of Projective Geometrie“, Cambridge Un. Press, 1913.

Die Forderungen der intuitionistischen Mathematik bringen beträchtliche Änderungen in der Reihenfolge der Sätze und in den einzelnen Beweisen mit sich. Die Zahl der Sätze ist sehr gewachsen, da mancher für die alte Theorie bedeutungslose, für uns aber grundlegende Satz eingeschaltet werden mußte. Auch mußten, weil ich beim Leser keine Vertrautheit mit der befolgten Denkweise voraussetzen durfte, die Beweise ziemlich ausführlich gegeben werden. Indessen habe ich mich bemüht, die Darstellung möglichst kurz und einfach zu gestalten.

Zum Schluß sei es mir gestattet, Herrn Prof. Brouwer für seine Anregungen und allgemeinen Ratschläge zu dieser Arbeit herzlichst zu danken.

§ 1.

Die Axiome.

Wir zählen zunächst die Axiome einfach auf und geben alle Bemerkungen und Erläuterungen nachher.

Axiom I. Der Raum ist eine mathematische Spezies.

Definition. Die Elemente des Raumes heißen Punkte.

Axiom II. (*Axiom der Separation.*)

IIa. $A\sigma B$ (*A fällt mit B zusammen*) und $A\omega B$ (*A ist entfernt von B*) sind umkehrbare Beziehungen zwischen den Punkten A und B.

IIb. Für jeden Punkt A ist $A\sigma A$.

IIc. Die Beziehungen $A\sigma B$ und $A\omega B$ schließen sich gegenseitig aus.

IId. Wenn $A\omega B$ ungereimt ist, gilt $A\sigma B$.

IIe. Wenn zwischen den Punkten A und B die Beziehung $A\omega B$ besteht, so gilt für jeden Punkt C entweder $A\omega C$ oder $B\omega C$.

Sätze. α) *Aus* $A\sigma B$, $B\sigma C$ *folgt* $A\sigma C$.

β) *Aus* $A\omega B$, $B\sigma C$ *folgt* $A\omega C$.

Wir wiederholen hier den Beweis (vgl. „Lineare Gleichungen", § 1, Sätze α, β).

α) Wenn $A\sigma B$, $B\sigma C$, so würde nach IIe aus $A\omega C$ folgen $A\omega B$ oder $B\omega C$; beide Beziehungen sind ungereimt; nach IId ist also $A\sigma C$.

β) Wenn $A\omega B$, ist nach IIe entweder $A\omega C$ oder $B\omega C$; da letzteres ungereimt ist, gilt $A\omega C$.

Axiom III. Es können zwei voneinander entfernt liegende Punkte bestimmt werden.

Axiom IV. (*Axiom der Geraden.*) Die Geraden sind Punktspezies mit den folgenden Eigenschaften:

IVa. Wenn der Punkt P zur Geraden l gehört, so gehört jeder mit P zusammenfallende Punkt ebenfalls zu l.

IVb. Zwei voneinander entfernt liegende Punkte bestimmen eine Gerade, die sie beide enthält (d. h. man kann eine Gerade l bestimmen, die sie beide enthält, und jede Gerade, die sie beide enthält, ist mit l identisch), ihre *Verbindungsgerade*.

IVc. Jede Gerade enthält zum mindesten drei voneinander entfernt liegende Punkte.

Definition. Der Punkt P *ist* von der Punktspezies α *entfernt* (auch: *liegt außerhalb* der Punktspezies α), wenn er von jedem Punkt dieser Spezies entfernt ist; wir schreiben dann $P \omega \alpha$.

Die Punktspezies α *fällt* mit der Punktspezies β *zusammen* oder $\alpha \sigma \beta$, wenn jeder Punkt von α mit einem Punkt von β und jeder Punkt von β mit einem Punkt von α zusammenfällt.

Die Punktspezies α *ist* von der Punktspezies β *entfernt*, wenn α einen Punkt enthält, der von β entfernt ist; wir schreiben dann $\alpha \omega \beta$. Diese Relation ist nicht umkehrbar.

Axiom V. Außerhalb jeder Geraden kann ein Punkt bestimmt werden.

Axiom VI. Liegt von drei voneinander entfernten Punkten A, B, C der Punkt A außerhalb der Geraden BC, so liegt B außerhalb AC.

Definition. Drei Punkte liegen *in Dreieckslage*, wenn sie voneinander entfernt liegen und einer außerhalb der die beiden anderen enthaltenden Geraden liegt.

Nach VI liegt dann jeder außerhalb der Verbindungsgeraden der anderen.

Definition. Sind A, B, C Punkte in Dreieckslage, so ist die *Ebene* ABC die Spezies der Punkte P mit der Eigenschaft, daß ein Punkt Q von AB und ein von Q entfernt liegender Punkt R von AC bestimmt werden können, derart, daß P, Q und R kollinear sind.

Axiom VII. Sind A, B, C Punkte in Dreieckslage und hat die Gerade l mit AB und AC zwei voneinander entfernt liegende Punkte gemein, deren erster von B entfernt ist, so hat l mit BC einen Punkt gemein.

Axiom VIII. Außerhalb jeder Ebene kann ein Punkt bestimmt werden.

Axiom IX. Liegt von vier voneinander entfernt liegenden Punkten A, B, C, D der Punkt A außerhalb BC und D außerhalb ABC, so liegt A außerhalb DBC.

Bemerkung. Damit DBC bestimmt sei, ist notwendig, daß D außerhalb BC liegt. Dies folgt daraus, daß jeder Punkt von BC zu ABC gehört, was unmittelbar aus der Definition der Ebene folgt.

Definition. Vier Punkte A, B, C, D liegen *in Tetraederlage*, wenn sie voneinander entfernt liegen, A außerhalb BC und D außerhalb ABC.

Axiom X. Es gibt vier Punkte A, B, C, D in Tetraederlage, derart daß man durch jeden Punkt eine Gerade legen kann, die mit ABC und BCD zwei voneinander entfernt liegende Punkte gemeinsam hat.

Bemerkungen. In der Abhandlung über „Lineare Gleichungen" ist für die meisten Axiome der Beweis, daß sie in der dort aufgebauten analytischen Geometrie gelten, erbracht.

Für Axiom II findet man dort den Beweis in § 2, 3, da in § 6, 1 ein Punkt einfach als Zahlenverhältnis definiert wird. Axiom IV (besonders IVc) ergibt sich leicht aus § 6, 1; Axiom V, VI sind in § 6, 2 bewiesen. Die Definition der Ebene fordert eine Erläuterung. Die einfachere Definition: „Sind A, B, C Punkte in Dreieckslage, so ist die Ebene ABC die Spezies der Punkte, welche auf den Verbindungsgeraden von A mit den Punkten von BC liegen," trifft in der analytischen Geometrie nicht zu. Es seien nämlich x_i, y_i, z_i $(i = 1, \ldots, 4)$ die Koordinaten von A, B, C; dann sind die Koordinaten von einem Punkt D der Ebene ABC:

$$p_i = \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i .$$

Ein Punkt der Verbindungsgeraden von A mit $E(\alpha y_i + \beta z_i)$ auf BC hat die Koordinaten

$$q_i = \xi x_i + \eta(\alpha y_i + \beta z_i) .$$

Damit D ein solcher Punkt ist, müssen also α, β, ξ, η (α oder β und ξ oder $\eta \mp 0$) sich so bestimmen lassen, daß

$$\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i = \xi x_i + \eta(\alpha y_i + \beta z_i),$$

oder

$$(1) \qquad (\xi - \lambda) x_i + (\eta\alpha - \mu) y_i + (\eta\beta - \nu) z_i = 0 .$$

Da wir nach „Lin. Gl." § 6, 2 ohne Beschränkung annehmen dürfen, daß die r. Designante von drei dieser Gleichungen in den Veränderlichen $(\xi - \lambda)$, $(\eta\alpha - \mu)$, $(\eta\beta - \nu)$ von 0 entfernt ist, ist nach „Lin. Gl." § 5, Satz IV für jedes l. Verhältnis dieser Veränderlichen eines der ersten Glieder aus (1) von 0 entfernt; wenn also den Veränderlichen Werte beigelegt werden, die (1) genügen, kann keiner dieser Werte von 0 entfernt sein. Es folgt, daß mit (1) äquivalent ist:

$$(2) \qquad \xi - \lambda = 0, \qquad \eta\alpha - \mu = 0, \qquad \eta\beta - \nu = 0 .$$

Es gibt Punkte der Ebene, für welche weder $\mu \mp 0$ noch $\nu \mp 0$ bekannt ist; für diese Punkte ist es nicht möglich, aus (2) α und β so zu bestimmen, daß eine dieser Zahlen von 0 entfernt ist.

Der wesentliche Inhalt dieser Schwierigkeit ist, daß ein Punkt der Ebene, der nicht von A entfernt ist, mit A keine Verbindungsgerade bestimmt und also nicht unter die Definition fällt.

Es ist zu zeigen, daß die oben (auf Axiom VI folgend) gegebene Definition in der analytischen Geometrie gilt. Es sei wieder $P\,(p_i = \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i)$ ein Punkt von ABC. Ein Punkt Q von AB hat die Koordinaten $(q_i = \alpha x_i + \beta y_i)$; ein Punkt R von AC die Koordinaten $r_i = \gamma x_i + \delta z_i$. Aus $Q\,\omega\,R$ folgt $Q\,\omega\,A$ oder $R\,\omega\,A$, also $\beta \neq 0$ oder $\delta \neq 0$. Auch das Umgekehrte gilt, denn, wenn z. B. $\beta \neq 0$ und

$$\varDelta = \underrightarrow{\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}} \neq 0$$

(„Lin. Gl.", § 6, 2), so ist

$$\underrightarrow{\begin{vmatrix} x_i & q_i & z_i \\ x_k & q_k & z_k \\ x_l & q_l & z_l \end{vmatrix}} = \underrightarrow{\begin{vmatrix} x_i & \alpha x_i + \beta y_i & z_i \\ x_k & \alpha x_k + \beta y_k & z_k \\ x_l & \alpha x_l + \beta y_l & z_l \end{vmatrix}} = \varDelta \neq 0$$

(„Lin. Gl." § 4, 7 [analoger Satz für Kolonnen] und **1**), also Q liegt außerhalb AC und $Q\,\omega\,R$. Damit nun P auf einer Geraden wie QR liegt, müssen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta$ sich so bestimmen lassen, daß α oder $\beta \neq 0$, γ oder $\delta \neq 0$, β oder $\delta \neq 0$, ξ oder $\eta \neq 0$ und

$$\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i = \xi(\alpha x_i + \beta y_i) + \eta(\gamma x_i + \delta z_i). \tag{3}$$

Wie oben ersieht man, daß (3) äquivalent ist mit

$$\xi\alpha + \eta\gamma = \lambda, \qquad \xi\beta = \mu, \qquad \eta\delta = \nu. \tag{4}$$

Wir wählen $\beta \neq 0$, $\eta \neq 0$, weiter beliebig; dann ist

$$\gamma = \frac{1}{\eta}(\lambda - \xi\alpha); \qquad \xi = \mu\frac{1}{\beta}; \qquad \delta = \frac{1}{\eta}\nu.$$

α kann noch beliebig gewählt werden. Nun ist entweder $\lambda \neq 0$ (dann wählen wir $\alpha = 0$, so daß $\gamma \neq 0$), oder $\mu \neq 0$ (also $\xi \neq 0$; dann wählen wir $\alpha \neq \frac{1}{\xi}\lambda$, so daß $\gamma \neq 0$), oder $\nu \neq 0$, also $\delta \neq 0$. Man kann also immer allen Forderungen genügen.

Durch die neue Definition der Ebene war Axiom VII mitbedingt. Wir wollen jetzt zeigen, daß es in der analytischen Geometrie gilt. Es sei wieder $A(x_i)$, $B(y_i)$, $C(z_i)$; die Gerade l habe mit AB den Punkt P $(p_i = \alpha x_i + \beta y_i;\ \alpha \neq 0)$ und mit AC den Punkt Q $(q_i = \gamma x_i + \delta z_i;$ γ oder $\delta \neq 0)$ gemein; wie oben zeigt sich, daß $P\,\omega\,Q$ äquivalent ist mit β oder $\delta \neq 0$. Es ist zu zeigen, daß λ, μ, ξ, η sich so bestimmen lassen, daß λ oder $\mu \neq 0$; ξ oder $\eta \neq 0$; $\lambda p_i + \mu q_i = \xi y_i + \eta z_i = u_i$.

$$(\lambda\alpha + \mu\gamma)x_i + (\lambda\beta - \xi)y_i + (\mu\delta - \eta)z_i = 0. \tag{5}$$

(5) ist äquivalent mit

$$(6) \qquad \lambda\alpha + \mu\gamma = 0, \qquad \lambda\beta - \xi = 0, \qquad \mu\delta - \eta = 0.$$

(6) wird genügt durch $\mu \neq 0$, weiter beliebig; $\lambda = -\mu\gamma\frac{1}{\alpha}$; $\xi = -\mu\gamma\frac{1}{\alpha}\beta$; $\eta = \mu\delta$. Da $\mu \neq 0$, sind (u_i) die Koordinaten eines Punktes, also ξ oder $\eta \neq 0$ („Lin. Gl." § 6, **1**).

Den Beweis für Axiom VIII und IX findet man in „Lin. Gl." § 6, **4**.

Die Form von Axiom X ist durch Analogie mit Axiom VII bestimmt. In der analytischen Geometrie gilt es bei beliebiger Wahl der Punkte $A(x_i)$, $B(y_i)$, $C(z_i)$, $D(u_i)$ in Tetraederlage. Für den Punkt $P(p_i)$ haben die Gleichungen

$$(7) \qquad \lambda_1 x_i + \ldots + \lambda_4 u_i + \varrho p_i = 0$$

nach „Lin. Gl." § 5, Satz II eine Lösung, in welcher $\varrho \neq 0$ (man erhält nämlich fünf Gleichungen in fünf Veränderlichen mit verschwindender Designante, indem man die letzte Gleichung (7) doppelt zählt).

$$p_i = \frac{1}{\varrho}(\lambda_1 x_i + \ldots + \lambda_4 u_i).$$

Da (p_i) ein Punkt ist, ist nach „Lin. Gl." § 6, **1** eine der Zahlen $\lambda_i \neq 0$, also entweder eine der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ oder eine der Zahlen $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \neq 0$. Ist z. B. das erste der Fall, so ist

$$p_i = \frac{1}{\varrho}(\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i) + \frac{1}{\varrho}\lambda_4 u_i.$$

P liegt also auf der Geraden, die mit ABC den Punkt $Q\,(\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i)$ und mit BCD den Punkt $D(u_i)$ gemein hat. $D\,\omega\,ABC$, also $D\,\omega\,Q$.

§ 2.

Eigenschaften der Ebene.

1 bis **6**. *Vorbereitende Sätze.*

1. Satz. *Wenn zwei Punkte P und Q gegeben sind*[5]), *kann man auf der Geraden l einen Punkt bestimmen, der von P und Q entfernt liegt.*

Beweis. Nach IVc bestimme man auf l drei voneinander entfernte Punkte. Nach IIe ist P von wenigstens zwei daraus entfernt; ebenso Q, also wenigstens einer der drei Punkte ist von P und Q entfernt.

2. Satz. *Wenn durch einen Punkt S zwei Gerade SA und SB gehen, während A außerhalb SB liegt, so liegt jeder Punkt von einer dieser Geraden, der von S entfernt ist, außerhalb der anderen.* (Axiom VI.)

[5]) Wenn nicht ausdrücklich gesagt, wird nicht angenommen, daß die in einem Satz als gegeben angenommenen Elemente voneinander entfernt liegen.

Korollar. Die Relation ω zwischen Geraden durch einen Punkt ist umkehrbar.

3. Satz. *Sind A, B, C Punkte in Dreieckslage, so kann man in ABC einen außerhalb AB und AC liegenden Punkt bestimmen.*

Beweis. Nach **2** genügt ein Punkt von BC, der von B und C entfernt ist; ein solcher besteht nach **1**.

4. Satz. *Wenn P zu ABC gehört, gehört jeder mit P zusammenfallende Punkt zu ABC.*

Folgt aus der Definition der Ebene.

5. Lemma. Sind A, B, C Punkte in Dreieckslage, so liegt jeder Punkt von ABC, der von A entfernt ist, entweder außerhalb AB oder außerhalb AC.

Beweis. Durch einen beliebigen Punkt P von ABC geht eine Gerade l, die mit AB den Punkt X und mit AC den Punkt Y gemeinsam hat, während $X \omega Y$. Also $X \omega A$ oder $Y \omega A$; wir nehmen an $Y \omega A$. Aus $P \omega A$ folgt $P \omega X$ oder $A \omega X$ und aus $X \omega Y$ folgt $P \omega X$ oder $P \omega Y$. Wenn $P \omega X$, liegt P außerhalb AB (**2**); wenn aber zugleich $A \omega X$ und $P \omega Y$, so liegt P außerhalb AC (**2**). Der Fall $X \omega A$ wird ebenso erledigt[6]).

6. Lemma. Axiom VII kann wie folgt erweitert werden: Liegen die Punkte A, B, C so, daß A und B zur Geraden a gehören und C außerhalb a liegt, so hat jede Gerade l, die mit a und AC zwei voneinander entfernte Punkte gemeinsam hat, deren erster von B entfernt liegt, auch mit BC einen Punkt gemeinsam. (Es wird also nicht gefordert $A \omega B$.)

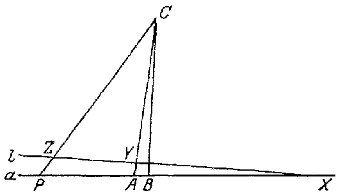

Fig. 1.

Beweis. Es sei X der gemeinschaftliche Punkt von l und a. Man wähle auf a den Punkt P, von A und X entfernt (**1**). Entweder $B \omega A$ oder $B \omega P$. Im ersten Fall erhalten wir Axiom VII; im zweiten ist $PA \equiv PB \equiv a$ so daß C, P, A und auch C, P, B in Dreieckslage liegen. Durch Anwendung von VII auf CAP findet man einen gemeinschaftlichen Punkt Z von l mit CP; $X \omega Z$ (**2**) und $X \omega B$; also gibt VII, auf CBP angewandt, einen gemeinschaftlichen Punkt von l und BC.

[6]) Wenn mehrere Fälle zu erledigen sind, die durch einfachen Buchstabenwechsel aus einander hervorgehen, so betrachten wir immer nur einen, ohne dieses Verfahren jedesmal von neuem zu rechtfertigen.

7 bis **10.** *Die Bestimmung der Ebene durch drei Punkte in Dreieckslage.*

7. Satz. *Sind A, B, C Punkte in Dreieckslage und ist A' ein Punkt von AB, der von B entfernt ist, so ist $A'BC$ identisch mit ABC.*

Beweis. Wir nehmen vorläufig an $A' \omega A$. Es ist zu zeigen, daß jeder Punkt von ABC zu $A'BC$ gehört und umgekehrt. Durch einen beliebigen Punkt P von ABC geht eine Gerade l, die mit AB den Punkt X und mit AC den Punkt Y gemeinsam hat, während $X \omega Y$. Man hat immer einen der folgenden drei Fälle:

a) $X \omega A'$; b) $X \omega A$ und $P \omega Y$; c) $X \omega A$ und $P \omega X$.

Fall a. Nach 2 liegen A, A', C in Dreieckslage; wegen VII, angewandt auf $AA'C$, hat l einen Punkt Z mit $A'C$ gemeinsam; nach 2 liegt X außerhalb $A'C$, also $X \omega Z$; da P, X, Z kollinear sind, liegt P in $A'BC$.

Fall b (Fig. 2a). Jetzt liegt nach 2 X und also auch P außerhalb AC. CP hat mit CA und XY die Punkte C bzw. P gemeinsam und $C \omega A$; nach **6** hat dann CP mit XA einen Punkt U gemeinsam. Da $C \omega U$, wird P durch CU als Punkt von $A'BC$ charakterisiert.

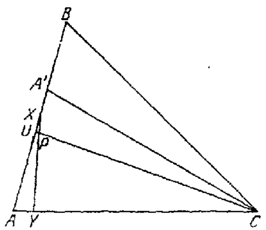

Fig. 2a.

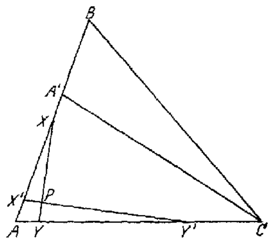

Fig. 2 b.

Fall c (Fig. 2b). Wir wählen auf AC einen Punkt Y', von A und Y entfernt; nach 2 liegt Y' außerhalb XY und X außerhalb $Y'P$. $Y'P$ hat mit AC und XY die Punkte Y' bzw. P gemeinsam; $Y' \omega P$ und $Y' \omega A$, also nach **6** hat $Y'P$ mit AX den Punkt X' gemeinsam. Da $X' \omega X$, verkehrt entweder XY oder $X'Y'$ im Fall a, wofür der Satz schon bewiesen ist.

Ist nicht bekannt, ob A' von A entfernt liegt, so wählen wir auf AB den Punkt D, von A und B entfernt. $A' \omega A$ oder $A' \omega D$; im letzten Fall ist $ABC \equiv DB.C \equiv A'BC$.

8. Satz. *Sind A, B, C Punkte in Dreieckslage, so ist ABC identisch mit BAC.*

Beweis. Es sei A' ein Punkt von AB, von A und B entfernt; dann ist $ABC \equiv A'BC$ (7) $\equiv A'AC$ (nach Def.) $\equiv BAC$ (7).

9. Satz. *Sind A, B, C Punkte in Dreieckslage und liegt D in ABC außerhalb AB, so ist $ABC \equiv ABD$.*

Beweis. Es gibt eine Gerade XY durch D, so daß X auf AB und Y auf AC liegt und $X \omega Y$. Y liegt also außerhalb AB (2). Nach 7 kann man B in einen beliebigen, von A entfernten Punkt von AB versetzen; wir dürfen also annehmen $X \omega B$. Dann ist

$$ABC \equiv ABY\,(7) \equiv XBY\,(7) \equiv YXB\,(8) \equiv DXB\,(7) \equiv XDB\,(8) \equiv ADB\,(7) \equiv ABD\,(8).$$

10. Satz. *Sind A, B, C Punkte in Dreieckslage, und D, E, F Punkte in Dreieckslage in ABC, so ist $ABC \equiv DEF$.*

Beweis. Nach 5 liegt D außerhalb wenigsten zwei der Geraden AB, AC, BC, z. B. außerhalb AB; dann ist $ABC \equiv ABD$ (9). E liegt außerhalb AD oder BD (5), z. B. außerhalb AD; dann ist $ABD \equiv ADE$. F liegt außerhalb DE, also $DEA \equiv DEF$.

Korollar. Drei Punkte in Dreieckslage bestimmen eine Ebene, die sie enthält[7]).

11 bis **13.** *Gerade in einer Ebene.*

11. Satz. *Eine Gerade, die zwei voneinander entfernte Punkte D und E einer Ebene enthält, ist ganz in dieser Ebene enthalten.*

Beweis. Die Ebene sei durch die in Dreieckslage liegenden Punkte A, B, C bestimmt. Wir dürfen annehmen $D \omega A$ und D außerhalb AB (5); dann liegt E außerhalb DA oder DB (5); z. B. DA, also liegen A, D, E in Dreieckslage und $ABC \equiv ADE$ (**10**). Die Gerade DE gehört zu ADE nach Definition.

12. Satz. *Zwei Gerade einer Ebene, deren eine einen außerhalb der anderen liegenden Punkt enthält, bestimmen einen gemeinschaftlichen Punkt (d. h. sie haben einen Punkt S gemeinsam, und jeder ihnen gemeinsame Punkt fällt mit S zusammen[7])), ihren Schnittpunkt.*

Beweis. Es seien l und m zwei in der Ebene α liegende Gerade; auf m sei der Punkt A außerhalb l gegeben. Wir wählen auf m den Punkt D so, daß $A \omega D$, und auf l die Punkte B und C so, daß $B \omega C$; dann ist $\alpha \equiv ABC$, also liegt D in ABC und nach 5 entweder außer-

[7]) Vgl. die Bemerkung in Klammern zu Axiom IVb, S. 494.

halb AB oder außerhalb AC; wir nehmen das erste an. Nach Definition der Ebene geht durch D eine Gerade, die mit BA und BC die Punkte E bzw. F gemeinsam hat, so daß $E \omega F$; F liegt also außerhalb AB (2). Nun hat l mit AB und DE die Punkte B bzw. F gemeinsam; $B \omega F$ und $B \omega A$, so daß l nach 6 einen Punkt S mit DA gemeinsam hat.

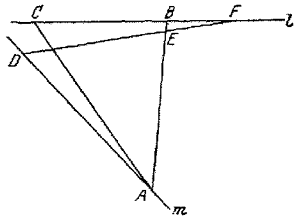

Fig. 3.

Ein gemeinschaftlicher Punkt T von l und m kann nicht von S entfernt sein, da dann l mit m identisch wäre (IVb), und fällt also mit S zusammen (IId).

13. Lemma. Wenn die Gerade l in der Ebene α gegeben ist, so kann man in α einen außerhalb l liegenden Punkt bestimmen.

Beweis. Es seien A, B, C Punkte in Dreieckslage in α, D ein Punkt von l, der von A entfernt ist. Wegen **6** liegt D außerhalb AB oder AC, z. B. AB. Nun ist der Schnittpunkt von l mit AB (**12**) entweder von A oder von B entfernt; je nachdem liegt A oder B außerhalb l (**2**).

§ 3.

Eigenschaften des Raumes.

Wir lassen vorläufig Axiom X, das die Dimensionenzahl des Raumes auf drei beschränkt, außer Betracht.

Im ganzen Paragraphen bedeuten A, B, C, D vier gegebene Punkte in Tetraederlage.

Aus § 2, **8** und Axiom IX folgt direkt der

Satz. *Vier Punkte, die in einer gegebenen Reihenfolge in Tetraederlage liegen, liegen auch in jeder anderen Reihenfolge in Tetraederlage.*

1. Definition. $R_3(ABCD)$ ist die Spezies der Punkte, die auf einer Geraden liegen, welche mit ABC und BCD zwei voneinander entfernte Punkte gemein hat.

2 bis **6**. *Vorbereitende Sätze.*

2. Lemma. Durch jeden Punkt von $R_3(ABCD)$ geht eine Gerade, die mit ABC und BCD zwei voneinander entfernte Punkte X' und Y' gemein hat, von denen Y' außerhalb BC und außerhalb einer in BCD gezogenen Geraden BC', die von BC entfernt ist, liegt.

Beweis. Es seien X und Y die Punkte, welche die Gerade, die P als Punkt von $R_3(ABCD)$ kennzeichnet, mit ABC und BCD gemein hat. Wir nehmen Y' in BCD außerhalb BC und BC' so, daß $Y \omega Y$. (Nach § 2, **3** gibt es Z außerhalb BC und BC'; auf BZ liegt H, das von B und Z entfernt ist; je nachdem $Y \omega Z$ oder $Y \omega H$, wähle man Z oder H für Y'.) YY' trifft BC in S (§ 2, **12**). Wir unterscheiden die Fälle a: $X \omega S$; b: $Y \omega S$.

Fall a (Fig. 4a). Y' liegt außerhalb ABC (IX), also außerhalb XS. Demnach liegen X, Y', S in Dreieckslage, also nach § 2, **2** auch X, Y', Y, also $Y' \omega P$. Da PY' und XS in XSY' liegen, bestimmen sie den Schnittpunkt X'; $X'Y'$ genügt der Forderung.

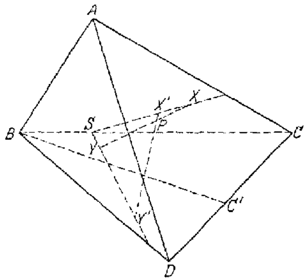

Fig. 4a.

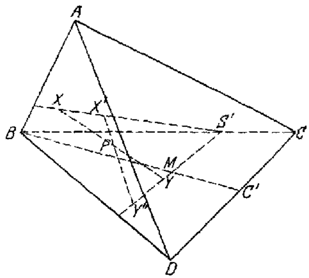

Fig. 4b.

Fall b (Fig. 4b). Jetzt liegt Y außerhalb BC; wir wählen einen von B und X entfernten Punkt S' auf BC (§ 2, **1**) und auf $S'Y$ den Punkt Y'', entfernt von Y und S'. $S'Y$ trifft BC' in M; $M \omega Y$ oder $M \omega Y''$, also entweder Y oder Y'' liegt außerhalb BC'. Im ersten Fall genügt XY der Forderung, im zweiten zeigt man, wie im Fall a, daß PY'' existiert und ihr genügt.

3. Satz. *Jeder Punkt E von AB, der von B entfernt ist, liegt außerhalb BCD.*

Denn D liegt außerhalb ABC und $ABC \equiv EBC$; also liegen D, E, B, C in Tetraederlage.

Derselbe Satz besagt in anderer Form:

Enthält die Gerade l den Punkt P, der zur Ebene α gehört, und den Punkt Q außerhalb α, so liegt jeder Punkt von l, der von P entfernt ist, außerhalb α.

Denn wenn man die Punkte R und S in α so bestimmt, daß $R \omega P$ und S außerhalb PR liegt (§ 2, **13**), so liegen Q, P, R, S in Tetraederlage.

Es folgt auch der

Satz. *Jeder Punkt E von ABC außerhalb BC liegt außerhalb BCD.*

Beweis. EC trifft AB in dem Punkt F außerhalb BC (§ 2, 2); nach dem vorigen Satz liegt F, also auch E, außerhalb BCD.

4. Satz. *Jeder Punkt von $R_3(ABCD)$ liegt außerhalb wenigstens einer der Ebenen ABC, BCD, CDA, DAB.*

Beweis. Nach 2 bestimmen wir durch den Punkt E von $R_3(ABCD)$ eine Gerade, die mit ABC und BCD die voneinander entfernten Punkte X und Y gemein hat, von denen Y außerhalb BC liegt. $E\omega X$ oder $E\omega Y$; im ersten Fall liegt E außerhalb ABC (3). Im zweiten Fall bemerken wir, daß $X\omega B$ oder $X\omega C$; wir nehmen das erste an; dann ist nach § 2, 5 einer der Fälle erfüllt:

a) $X\omega BC$; b) $X\omega BA$.

Im Fall a) folgt aus $E\omega Y$ nach 3 unmittelbar $E\omega BCD$.

Im Fall b) liegt X außerhalb ABD (3). XA trifft BC in S; $S\omega B$ (§ 2, 2), also S liegt außerhalb BD. SY trifft BD in F (außerhalb BC) und AF begegnet XY in Z. Aus $Z\omega X$ folgt $E\omega X$ oder $E\omega Z$. X liegt außerhalb ABD und Z außerhalb ABC (3), also ergibt $E\omega X$ nach 3 $E\omega ABC$ und $E\omega Z$ ebenso $E\omega ABD$.

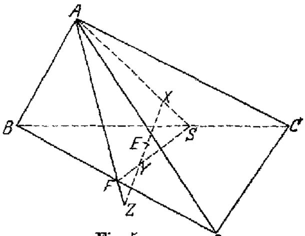

Fig. 5.

5. Satz. *Jeder Punkt von $R_3(ABCD)$, der von B entfernt ist, liegt außerhalb wenigstens einer der Ebenen BAC, BAD, BCD.*

Beweis. Wenn wir X und Y bestimmen wie im vorigen Beweis, ist $E\omega X$ oder $B\omega X$; für beide Fälle ist der geforderte Beweis soeben gegeben worden.

6. Satz. *Jeder Punkt von $R_3(ABCD)$, der außerhalb BC liegt, liegt außerhalb ABC oder BCD.*

Beweis. Unter Beibehaltung der in 4 und 5 eingeführten Bezeichnungen ist $E\omega X$ oder $E\omega Y$.

$E\omega X$ ergibt nach 3 $E\omega ABC$.

Falls $E\omega Y$ wählen wir X' in ABC außerhalb BC, so daß $X'\omega X$ (z. B. indem wir aus zwei voneinander und von B entfernten Punkten

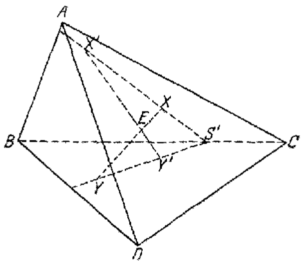

Fig. 6.

auf AB den von X entfernten wählen). $E \omega X$ (ist schon erledigt) oder $E \omega X'$. Im letzten Fall treffen XX' und BC sich in S' und $X'E$ trifft YS' in Y'. Aus $E \omega BC$ folgt $E \omega S'$, also $E \omega Y'$ oder $S' \omega Y'$. Im ersten Fall liegt E außerhalb BCD (3); im zweiten liegt Y' außerhalb BC, so daß sich aus $E \omega X'$ ergibt $E \omega ABC$.

7. bis **10.** *Die Bestimmung eines R_3 durch vier Punkte in Tetraederlage.*

7. Satz. *Wenn C' in BCD außerhalb BD liegt, ist*

$$R_3(ABCD) \equiv R_3(ABC'D).$$

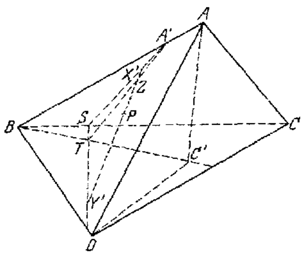

Fig. 7.

Beweis. Wir nehmen erst an $C' \omega BC$. Durch einen beliebigen Punkt P von $R_3(ABCD)$ ziehen wir die Gerade $X'Y'$, deren Existenz in 2 bewiesen wurde. Weiter bestimmen wir den Punkt A' auf BA, so daß $A' \omega B$ und $A' \omega X'$ (§ 2, 1). $A'X'$ trifft BC in S. $Y'S$ trifft BC' in T. PY' liegt in $A'Y'T$ und Y' außerhalb $A'T$ (denn $Y' \omega ABC'$; 3), also PY' schneidet $A'T$ und kennzeichnet P als Punkt von $R_3(ABC'D)$.

Ebenso zeigt man, daß jeder Punkt von $R_3(ABC'D)$ zu $R_3(ABCD)$ gehört.

Ist nicht bekannt, daß $C' \omega BC$, so wähle man C'' in BCD außerhalb BC, BC' und BD (es sei C'' ein von C und D entfernter Punkt auf CD und E der Schnittpunkt von BC' und CD; entweder $E \omega C$, also $C' \omega BC$, oder $E \omega C''$, also C'' genügt obiger Forderung). $R_3(ABCD) \equiv R_3(ABC''D) \equiv R_3(ABC'D)$.

8. Satz. $R_3(ABCD) \equiv R_3(ABDC)$.

Beweis. Wenn C' ein Punkt in BCD außerhalb BC und BD ist (§ 2, 3), so ist $R_3(ABCD) \equiv R(ABC'D)$ (7) $\equiv R_3(ABC'C)$ (nach Def.) $\equiv R_3(ABDC)$ (7).

Man folgert leicht, daß $R_3(ABCD) = R_3(PQRS)$, wo $PQRS$ eine beliebige Permutation von $ABCD$ bedeutet.

9. Satz. *Wenn E ein Punkt von $R_3(ABCD)$ außerhalb BCD ist, so ist $R_3(ABCD) \equiv R_3(EBCD)$.*

Beweis. Nach 2 bestimmen wir durch E die Gerade XY mit X in ABC und Y in BCD, so daß $X \omega Y$ und $Y \omega BC$; nach 3 liegt X außerhalb BCD. $R_3(ABCD) \equiv R_3(XBCY)$ (nach Def.) $\equiv R_3(EBCY)$ (8, 7) $\equiv R_3(EBCD)$ (nach Def.).

10. Satz. *Wenn E, F, G, H Punkte in Tetraederlage von $R_3(A\,B\,C\,D)$ sind, ist $R_3(A\,B\,C\,D) \equiv R_3(E\,F\,G\,H)$.*

Beweis. Nach **4** dürfen wir annehmen $E \omega B\,C\,D$, also

$$R_3(A\,B\,C\,D) \equiv R_3(E\,B\,C\,D) \qquad (9).$$

Da $F \omega E$, liegt F nach **5** außerhalb einer der Ebenen $E\,B\,C$, $E\,B\,D$, $E\,C\,D$, z. B. $E\,C\,D$, so daß

$$R_3(E\,B\,C\,D) \equiv R_3(B\,E\,C\,D) \equiv R_3(F\,E\,C\,D).$$

Da $G \omega E\,F$, liegt G nach **6** außerhalb $E\,F\,C$ oder $E\,F\,D$, z. B. $E\,F\,D$, also

$$R_3(F\,E\,C\,D) \equiv R_3(C\,E\,F\,D) \equiv R_3(G\,E\,F\,D).$$

$H \omega G\,E\,F$, also

$$R_3(G\,E\,F\,D) \equiv R_3(D\,E\,F\,G) \equiv R_3(H\,E\,F\,G) \equiv R_3(E\,F\,G\,H).$$

Korollar. Vier Punkte in Tetraederlage bestimmen einen R_3, der sie alle enthält[8]).

11. bis **14.** *Schneidung von Geraden und Ebenen in einem R_3.*

11. Satz. *Eine Ebene, die drei Punkte in Dreieckslage mit $R_3(A\,B\,C\,D)$ gemein hat, gehört ganz zu diesem R_3.*

Beweis. Es seien E, F, G die betr. Punkte und E liege z. B. außerhalb $A\,B\,C$ (**4**). Da $F \omega E$, liegt F außerhalb einer der Ebenen $E\,A\,B$, $E\,A\,C$, $E\,B\,C$ (**5**), z. B. $E\,A\,B$. $G \omega E\,F$, also G liegt außerhalb $E\,F\,A$ oder $E\,F\,B$ (**6**), z. B. $E\,F\,A$. Also ist

$$R_3(A\,B\,C\,D) \equiv R_3(A\,E\,F\,G) \qquad (10).$$

Daß $E\,F\,G$ zu $R_3(A\,E\,F\,G)$ gehört, geht unmittelbar aus den Definitionen hervor, denn eine Gerade, die mit $E\,F$ und $E\,G$ zwei voneinander entfernte Punkte gemein hat, hat diese auch mit $A\,E\,F$ und $E\,F\,G$ gemein.

12. Satz. *Eine Ebene und eine Gerade, die einen außerhalb der Ebene liegenden Punkt enthält, bestimmen, wenn sie in einem R_3 liegen, einen gemeinsamen Punkt*[8]).

Beweis. Auf der Geraden l sei der Punkt F außerhalb der Ebene α gegeben. Wir wählen G, H und K in Dreieckslage in α und denken nach **10** den R_3 bestimmt durch F, G, H, K. Weiter nehmen wir auf l den Punkt E an, so daß $E \omega F$, und beweisen zunächst, daß es durch E eine Gerade m gibt, die mit $F\,G\,H$ und $G\,H\,K$ bzw. die Punkte U und V gemein hat, von denen $U \omega F$ und V außerhalb $G\,H$ liegt. Nach **2** gibt es eine Gerade n durch E, die mit $F\,G\,H$ und $G\,H\,K$ bzw. die

[8]) Vgl. die Bemerkung in Klammern zu Axiom IV b, S. 494 und zu § 2, 12.

Punkte X und Y gemein hat, während Y außerhalb GH liegt. $X\omega F$ oder $X\omega E$. Wenn $X\omega F$, genügt n den Forderungen für m. Wenn

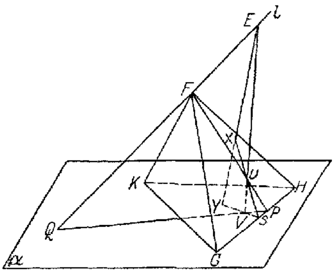

Fig. 8.

$X\omega E$, so liegt zunächst E außerhalb FGH. Wir wählen nun den Punkt U in FGH, der von F und X entfernt ist und außerhalb GH liegt (wenn L ein Punkt von FG ist, der von F und G entfernt ist, und M ein Punkt von FH, der von F und H entfernt ist, so ist $L\omega X$ oder $M\omega X$). XU trifft GH in S; UE trifft SY in V (§ 2, **12**). Nach **3** liegt V außerhalb FGH; UV genügt den gestellten Forderungen für m.

m trifft nun GH in P und l trifft PV in Q, d. h. l trifft α in Q.

Ein gemeinsamer Punkt von l und α ist nicht von Q entfernt, da l dann in α läge (§ 2, **11**) und fällt also mit Q zusammen (IId).

Nach **3** liegt jeder Punkt von l, der von Q entfernt ist, außerhalb α.

13. Satz. *Zwei Ebenen eines R_3, deren eine von der andern entfernt ist, bestimmen eine Gerade, ihre Schnittgerade, die zu beiden gehört. Jeder Punkt von einer der Ebenen, der außerhalb der Schnittgeraden liegt, liegt außerhalb der andern Ebene.*

Beweis. Die Ebene α enthalte den Punkt P außerhalb der Ebene β. Wir wählen in α noch die Punkte A, B, C in Dreieckslage und sorgen, daß $A\omega P$. PA trifft BC in Q (§ 2, **12**); $Q\omega B$ oder $Q\omega C$, z. B. $Q\omega B$. Dann liegt B außerhalb PA. PA und PB treffen β in R bzw. S. $P\omega R$ und $P\omega S$ und nach § 2, **2** also $R\omega S$. Nach § 2, **11** liegt RS in α und β.

Ist M ein Punkt von β außerhalb RS, so liegen P, R, S, M in Tetraederlage, also M außerhalb α.

Ein Punkt X von β, der zugleich in α liegt, kann also nicht außerhalb RS liegen; es sei nun Y ein von X und R entfernter Punkt auf PR; XY trifft RS in Z. $X\omega Z$ gäbe nun $X\omega RS$, was ungereimt ist, also $X\sigma Z$. X liegt also auf RS.

Korollar. Die Relation ω zwischen Ebenen eines R_3 ist umkehrbar.

14. Satz. *Liegen in einem R_3 drei voneinander entfernte Ebenen derart, daß unter ihren Schnittgeraden zwei voneinander entfernt sind, so ist jede Schnittgerade von der gegenüberliegenden Ebene entfernt, und die Ebenen bestimmen einen gemeinschaftlichen Punkt.*

Beweis. Gegeben sind die Ebenen α, β, γ und ihre Schnittgeraden: l von β und γ; m von α und γ; n von α und β. $l\,\omega\,m$. Der Schnittpunkt S von l und m gehört zu α und β, also zu n. Jeder Punkt von l, der von S entfernt ist, liegt außerhalb m, also außerhalb α (**13**), also außerhalb n. Das ergibt $l\,\omega\,\alpha$ und $l\,\omega\,n$; ebenso $m\,\omega\,\beta$; $m\,\omega\,n$. Jeder Punkt von n, der von S entfernt ist, liegt außerhalb l, also außerhalb γ (**13**), so daß $n\,\omega\,\gamma$.

Jeder gemeinschaftliche Punkt von α, β, γ gehört zu n und γ und fällt also mit S zusammen (**12**).

15. Wenn Axiom X gilt (wie wir ferner wieder annehmen), gelten die Sätze aus **2**, **4**, **5**, **6**, **12**, **13**, **14** für beliebige Punkte, Gerade und Ebenen. Nr. **10** geht in folgendes über:

Satz. *Sind E, F, G, H Punkte in Tetraederlage, so geht durch jeden Punkt eine Gerade, die mit EFG und FGH zwei voneinander entfernte Punkte gemein hat. Nach* **2** *kann man noch sorgen, daß einer dieser Punkte außerhalb FG liegt.*

16. Bemerkung. Wir gebrauchen den Ausdruck, daß zwei Gerade *sich schneiden*, nur dann, und sprechen nur dann von ihrem *Schnittpunkt*, wenn sie einen Punkt gemein haben und *voneinander entfernt sind.* Eine analoge Bemerkung gilt für den *Schnittpunkt* einer Geraden mit einer Ebene, die *Schnittgerade* zweier Ebenen und die *Verbindungsgerade* zweier Punkte.

§ 4.

Entfernungsbeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

1 bis **5**. *Punkt und Ebene.*

1. Lemma. Außerhalb jeder Ebene kann man zwei voneinander entfernte Punkte bestimmen.

Beweis. Wir wählen Q in der Ebene α und P außerhalb α. Auf PQ liegt R, so daß $P\,\omega\,R$ und $Q\,\omega\,R$; R liegt außerhalb α (§ 3, **3**).

Korollar. Man kann immer einen Punkt bestimmen, der von einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Ebene entfernt ist.

2. Satz. *Wenn ein Punkt nicht außerhalb einer Ebene liegen kann, liegt er in dieser Ebene.*

Beweis. Es sei die Ungereimtheit der Annahme, der Punkt P liege außerhalb der Ebene α, bewiesen. Wir wählen Q außerhalb α, so daß $P\,\omega\,Q$ (**1**). PQ trifft α in S; $P\,\omega\,S$ ist ungereimt (§ 3, **3**), also $P\,\sigma\,S$ und P liegt in α.

3. Satz. *Wenn der Punkt A außerhalb der Ebene α liegt, so liegt jeder Punkt entweder von A oder von α entfernt.*

Beweis. Wir wählen P außerhalb α, so daß $P \omega A$ (1). Für einen beliebigen Punkt B gilt $B \omega A$ oder $B \omega P$. Im letzten Fall gibt es einen Schnittpunkt Q von BP mit α (§ 3, 12), und man hat $B \omega A$ oder $B \omega Q$; im letzten Fall folgt aus § 3, 3, daß B außerhalb α liegt.

4. Lemma. Außerhalb jedes Ebenenpaares kann man einen Punkt bestimmen.

Beweis. Es seien α, β die gegebenen Ebenen; wir wählen zwei voneinander entfernte Punkte A und B außerhalb α (1) und C außerhalb β. $C \omega A$ oder $C \omega B$, z. B. $C \omega A$. AC trifft α in P, β in Q, und enthält einen Punkt D, der von P und Q entfernt ist. D liegt außerhalb α und β (§ 3, 3).

5. Lemma. Wenn zwei Punkte gegeben sind, kann man eine Ebene bestimmen, von der beide entfernt liegen.

Beweis. A und B seien die gegebenen Punkte. Wir wählen P, so daß $P \omega A$; weiter Q außerhalb PA und R außerhalb APQ; dann liegt A außerhalb PQR (Axiom IX). Nach 3 liegt entweder B außerhalb PQR oder $B \omega A$. Im letzten Fall wählen wir C auf AB, so daß $C \omega A$, B, weiter D außerhalb AB und E außerhalb ABD. A und B liegen außerhalb CDE (§ 3, 3).

6. *Punkt und Gerade.*

Satz. *Wenn ein Punkt nicht außerhalb einer Geraden liegen kann, liegt er auf der Geraden.*

Beweis. Es sei die Ungereimtheit der Annahme, der Punkt P liege außerhalb der Geraden l, bewiesen. Wir wählen A außerhalb l; P kann nicht außerhalb der Ebene Al liegen und liegt also in dieser Ebene (2). Nach § 2, 3 bestimmen wir den Punkt B dieser Ebene, von P und l entfernt. BP trifft l in S (§ 2, 12); $P \omega S$ ist ungereimt da dann P außerhalb l läge (§ 2, 2), also $P \sigma S$ und P liegt auf l.

7. *Zwei Ebenen.*

Satz. *Wenn zwei Ebenen voneinander entfernt sind, so ist jede Ebene von wenigstens einer der beiden entfernt.*

Beweis. Es seien α und β die gegebenen Ebenen; in α liege D außerhalb β. γ sei eine beliebige Ebene. Man kann einen Punkt Q außerhalb α und γ bestimmen (4). DQ trifft α, β, γ in D, Y, X. $D \omega Y$, also $X \omega D$ oder $X \omega Y$; im ersten Fall liegt X außerhalb α, also $\gamma \omega \alpha$; im zweiten findet man ebenso $\gamma \omega \beta$.

8. *Schneidende Gerade.*

Satz. *Wenn durch einen Punkt S zwei voneinander entfernte Gerade l und m gehen, so ist jede Gerade entweder von l oder von m entfernt.*

Beweis. Eine beliebige Gerade n enthält gewiß einen von S entfernten Punkt P. Durch P bringen wir eine Ebene α, von der S entfernt ist (**5**); diese schneidet l und m in Q und R; aus $Q \omega S$ und $R \omega S$ folgt $Q \omega R$ (§ 2, **2**). Folglich ist entweder $P \omega Q$, also $n \omega l$ oder $P \omega R$, also $n \omega m$.

9 bis **11.** *Windschiefe Gerade.*

9. Definition. Zwei Gerade, die so liegen, daß jeder Punkt der einen außerhalb der andern liegt, sind *windschief* oder *kreuzend.*

Um eine Gerade zu finden, die eine gegebene Gerade l kreuzt, wählen wir P außerhalb l, und Q außerhalb der Ebene Pl; PQ und l kreuzen sich nach § 3, **3**.

10. Satz. *Wenn zwei Gerade gegeben sind, so kann eine die beiden gegebenen kreuzende Gerade bestimmt werden.*

Beweis. Auf den Geraden l und m bestimmen wir je einen Punkt; dann bestimmen wir nach **5** eine Ebene α, außerhalb welcher beide Punkte liegen. l und m treffen α in P bzw. Q. Eine Ebene β, außerhalb welcher P und Q liegen (**5**), schneidet α in einer Geraden, die l und m kreuzt (**9**).

11. Satz. *Sind l und m windschiefe Gerade, so entfernt sich jede Ebene durch l von jeder Ebene durch m.*

Beweis. Wir wählen P auf m und legen die Ebene α durch P und l; dann wählen wir R außerhalb α und legen die Ebene β durch R und l. $P \omega \beta$ (§ 3, **13**), also m trifft β in Q; $Q \omega P$. Jede Ebene γ durch l ist entweder von β oder von α entfernt (**7**), also entweder Q oder P liegt außerhalb γ, so daß also jede Ebene durch m (die P und Q enthält) von γ entfernt ist.

§ 5.

Der erste Satz von Desargues.

Wir beweisen diesen Satz in folgender Fassung:

Sind zwei Dreiecke so aufeinander bezogen, daß entsprechende Ecken voneinander entfernt liegen und die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken voneinander entfernt liegen und durch einen Punkt gehen, so schneiden sich die entsprechenden Seiten in drei Punkten einer Geraden.

Wenn die Ebenen der Dreiecke voneinander entfernt sind oder zusammenfallen, kann der Satz ungefähr in der üblichen Weise bewiesen werden. Wir müssen aber auch den Fall betrachten, daß hierüber nichts bekannt ist.

Gegeben. ABC und $AB'C'$ sind Dreiecke. $A\omega A'$, $B\omega B'$, $C\omega C'$. AA', BB', CC' sind voneinander entfernt und gehen durch einen Punkt O.

Zu beweisen. Die entsprechenden Seiten schneiden sich in drei Punkten einer Geraden.

Beweis. **1.** Aus der Voraussetzung folgt, daß von jedem Dreieck zwei Ecken und aus jedem Paar homologer Ecken wenigstens eine von O entfernt ist; wir dürfen also annehmen A, B, A', $C'\omega O$. Dann liegen sowohl A, B, A' wie C, B, C' und A, C, C' in Dreieckslage (§ 2, 2), woraus sich ergibt, daß je zwei entsprechende Seiten voneinander entfernt sind. Da AA' und BB' sich schneiden, liegen AB und $A'B'$ in einer Ebene und bestimmen sie einen Schnittpunkt P. Ebenso gibt es den Schnittpunkt Q von BC mit $B'C'$ und den Schnittpunkt R von AC mit $A'C'$.

2. Den Nachweis, daß P, Q und R in einer Geraden liegen, führen wir zuerst für den Fall, daß die Ebenen ABC und $A'B'C'$ zusammenfallen; wir bezeichnen diese Ebene, die auch O enthält, mit α. Nun wählen wir S außerhalb α und auf OS den Punkt S', von O und S entfernt; dann liegt auch S' außerhalb α (§ 3, 3). Wir projizieren $\triangle ABC$ aus S und $\triangle A'B'C'$ aus S'. $O\omega A$ oder $O\omega A'$; setzen wir das erste voraus, so liegen S, A, O in Dreieckslage (denn $S\omega\alpha$), also $S'\omega SA$ (§ 2, 2). Dann schneiden SA und $S'A'$ sich in A''; diese Folgerung ergibt sich ebenso, wenn $O\omega A'$. In analoger Weise wie A'' bestimmen wir B'' und C''.

3. Aus $S\omega S'$ folgt entweder $A''\omega S$ oder $A''\omega S'$; das nämliche gilt für B'' und C'', so daß entweder S oder S' von zwei der Punkte A'', B'', C'' entfernt ist. Wir wollen einen Augenblick annehmen A'', $B''\omega S$. Da S, A, B in Dreieckslage liegen, liegt jetzt A'' außerhalb SB (§ 2, 2); ebenso liegt A'' außerhalb SC und B'' außerhalb SA und SC. Die Punkte A'', B'', C'' sind also voneinander entfernt. Dieses Resultat ist unabhängig von der vorübergehend gemachten Annahme $S\omega A''$, B''.

4. Nehmen wir an, daß $A''\omega S$, so liegt nach § 3, 3 A'' außerhalb SBC, denn S, A, B, C liegen in Tetraederlage. Daraus folgt, daß A'', B'', C'' in Dreieckslage liegen; dasselbe ergäbe sich, wenn $B''\omega S$ oder $C''\omega S$. $A''\omega A$ oder $A''\omega A'$; da S und S' außerhalb α liegen, folgt aus beiden Annahmen $A''\omega\alpha$. Die Ebene $A''B''C''$ ist also von α entfernt und schneidet α in der Geraden m. Da $A''B''$ sowohl AB wie $A'B'$ schneiden muß, gehen AB und $A'B'$ durch den Schnittpunkt von $A''B''$ mit m, d. h. P liegt auf m. Ebenso ergibt sich, daß Q und R auf m liegen.

5. Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, daß über die gegenseitige Lage der Ebenen ABC und $A'B'C'$ nichts bekannt ist. Der Nachweis für die Existenz der Schnittpunkte P, Q, R aus Absatz **1** gilt auch dann. $P \omega A$ oder $P \omega B$; wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen $P \omega B$; daraus folgt $P \omega Q$ (§ 2, 2). Läge nun R außerhalb PQ, so müßte die Ebene PQR mit ABC und $A'B'C'$ zusammenfallen. Für diesen Fall ist aber schon bewiesen, daß R auf PQ liegt; die Annahme, daß R außerhalb PQ liegt, ist also ungereimt, also liegt R auf PQ (§ 4, **6**).

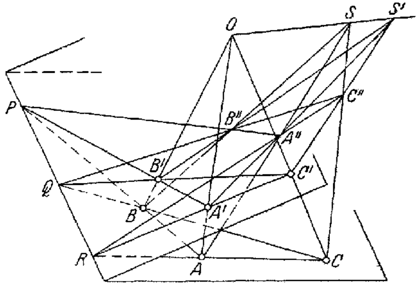

Fig. 9.

Bemerkung. Bekanntlich trifft der Satz auch zu, wenn von den Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken einige zusammenfallen; er ist dann trivial. Es gelingt aber nicht ihn zu beweisen für alle Fälle, wo über das wohl oder nicht Zusammenfallen von Ecken oder Verbindungsgeraden der Ecken nichts bekannt ist. Um das durch ein Beispiel zu erläutern, wählen wir im gewöhnlichen Cartesischen Raum auf den drei Koordinatenachsen je zwei Punkte, vom Schnittpunkt der Achsen, aber nicht notwendig voneinander entfernt. Diese Punkte lassen sich zu zwei Dreiecken zusammenfassen, für welche die Verbindungsgeraden[9]) entsprechender Ecken die Koordinatenachsen sind. Wenn der Satz von Desargues zuträfe, hätten die Ebenen der beiden Dreiecke immer eine Gerade gemeinsam; die analytische Geometrie lehrt aber, daß nur bei voneinander entfernten Ebenen immer eine Schnittgerade bestimmt ist.

Liegen die Punkte auf einer der Achsen voneinander entfernt, so besteht die Schnittgerade der Ebenen, aber für ein Paar homologe Seiten ist unbekannt, ob sie von der Schnittgerade entfernt sind, so daß sie mit dieser und miteinander keinen bestimmten Schnittpunkt zu haben brauchen. Wenn auf zwei Achsen die Punkte voneinander entfernt sind, trifft der Satz zu.

[9]) Wir weichen in dieser Bemerkung von der Verabredung des § 3, **16** ab. Genauer wäre die Bezeichnung „die homologen Ecken enthaltende Gerade" statt „Verbindungsgerade der homologen Ecken".

§ 6.

Der zweite Satz von Desargues.

Satz. *Sind zwei Dreiecke so aufeinander bezogen, daß je zwei entsprechende Seiten voneinander entfernt sind und die Schnittpunkte entsprechender Seiten drei voneinander entfernte Punkte einer Geraden sind, so liegen je zwei entsprechende Ecken voneinander entfernt und die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken gehen durch einen Punkt.*

Gegeben: ABC und $A'B'C'$ sind Dreiecke; $AB \omega A'B'$; der Schnittpunkt dieser Seiten ist P; ebenso gibt es die Schnittpunkte Q von AC mit $A'C'$ und R von BC mit $B'C'$. P, Q und R sind voneinander entfernt und liegen auf der Geraden l.

Zu beweisen: $A \omega A'$; $B \omega B'$; $C \omega C'$; AA', BB' und CC' gehen durch einen Punkt.

Beweis. **1.** $A \omega P$ oder $A \omega Q$; wenn $A \omega P$, liegt A außerhalb $A'B'$ (§ 2, **2**), also $A \omega A'$; dasselbe Ergebnis folgt aus $A \omega Q$. Ebenso zeigt man $B \omega B'$ und $C \omega C'$.

2. Wir nehmen zuerst an, daß die Ebenen ABC und $A'B'C'$ voneinander entfernt sind. Es sei α die Ebene durch AB und $A'B'$, β diejenige durch AC und $A'C'$; ebenso γ durch BC und $B'C'$. α ist entfernt von einer der Ebenen der Dreiecke, z. B. von ABC (§ 4, **7**); nach § 3, **13** liegt dann C außerhalb α, also β und γ sind von α entfernt; ebenso ergibt sich $\beta \omega \gamma$. Auch hat man $CC' \omega \alpha$, also $CC' \omega AA'$. Es sind also alle Voraussetzungen von § 3, **14** erfüllt und α, β, γ bestimmen einen gemeinschaftlichen Punkt M, durch welchen auch AA', BB' und CC' laufen.

3. Nunmehr betrachten wir den Fall, daß die beiden Dreiecke in derselben Ebene π liegen; l liegt also in π. Wir wählen den Punkt X außerhalb π und legen die Ebene ϱ durch l und X. Dann wählen wir S' außerhalb π und ϱ (§ 4, **4**) und projizieren $A'B'C'$ aus S' auf ϱ in A'', B'', C''. Da S', A', B', C' in Tetraederlage liegen, liegen nach § 2, **2** und § 3, **3** auch S', A'', B'', C'' in Tetraederlage, also A'', B'', C'' in Dreieckslage. $l \omega BC$ oder $l \omega B'C'$ (§ 4, **8**). Im ersten Fall hat man $BC \omega \varrho$, also $BC \omega B''C''$; im zweiten liegt jeder Punkt D' von $B'C'$, der außerhalb l liegt, außerhalb ϱ, und der Schnittpunkt D'' von $S'D'$ mit ϱ liegt außerhalb π (§ 3, **3**), also $B''C''$ (die D'' enthält) ist entfernt von BC. Man hat also immer $BC \omega B''C''$. Ebenso ergibt sich, daß die anderen entsprechenden Seiten von $\triangle ABC$ und $\triangle A''B''C''$ voneinander entfernt sind. Sie treffen sich in P, Q und R, also nach Absatz **2** gehen AA'', BB'', CC'' durch einen Punkt S. — Von $\triangle A'B'C'$ liegt eine Ecke, z. B. A', außerhalb l (§ 2, **13**); dann liegt A'' außerhalb π, also A'', A', A liegen in Dreieckslage. Nun gilt $S \omega S'$ oder $S \omega A''$; im letzten Fall liegt S außerhalb $A''A'$ (§ 2, **2**), also gilt wieder $S \omega S'$. SS' trifft π in O. Die Ebene $S'BB'$ enthält B'', also BB'', also S; daraus folgt, daß BB' und SS' sich in O treffen. Ebenso ergibt sich, daß AA' und BB' durch O gehen.

4. Um jetzt den Satz allgemein zu beweisen, wählen wir O außerhalb der Ebenen ABC und $A'B'C'$ und projizieren $\triangle A'B'C'$ aus O auf ABC. Wie in Absatz **3** ersieht man, daß hierdurch ein Dreieck $A''B''C''$ entsteht.

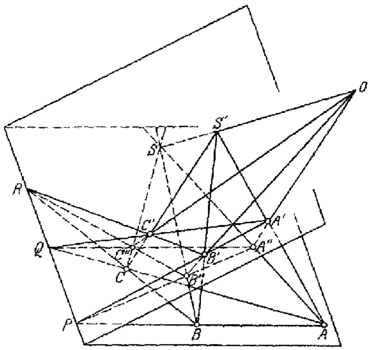

Fig. 10.

5. $A''B'' \omega AB$ oder $A''B'' \omega A'B'$ (§ 4, **8**); im letzten Fall ist P der Schnittpunkt von $A''B''$ und $A'B'$. Da entweder $B' \omega P$ oder $A' \omega P$, liegt B' oder A' außerhalb $A''B''$, also $A'' \omega A'$ oder $B'' \omega B'$, d. h. entweder A'' oder B'' liegt außerhalb $A'B'C'$. Für diesen Fall, nämlich, daß die Ebenen der Dreiecke voneinander entfernt sind, ist der Satz schon in Absatz **2** bewiesen.

6. Es bleibt also nur der Fall übrig, daß alle Seiten von $\triangle ABC$ von den entsprechenden Seiten von $\triangle A''B''C''$ entfernt sind; die homologen Seiten treffen sich in P, Q, R, also nach Abs. **3** gehen AA'', BB'', CC'' durch einen Punkt S.

7. $A \omega P$ oder $B \omega P$; nehmen wir das erste an, so liegt A außerhalb $OA''B''$, also O außerhalb $AA'B'$ (Axiom IX), und OS trifft diese Ebene in S' (§ 3, **12**). AA' und OS liegen in $OA''A$, also AA' trifft OS und geht durch S'. Ebenso ergibt sich, daß BB' durch S' geht. Schließlich muß OS, ebensogut wie $AA'B'$, auch $AA'C'$ schneiden; der Schnittpunkt liegt auf AA' und fällt also mit S' zusammen. Auch CC' geht durch S.

§ 7.

Der Involutionssatz.

1. Definition. Ein vollständiges Viereck wird gebildet von vier Punkten einer Ebene, von denen je drei in Dreieckslage liegen, und von deren Verbindungsgeraden.

2. Satz. *Sind zwei Vierecke so aufeinander bezogen, daß durch fünf Punkte einer Geraden je zwei homologe Seiten gehen, während jede zwei dieser Punkte, die nicht zu Gegenseiten der Vierecke gehören, voneinander entfernt sind, so gehen auch die Seiten des sechsten Paares durch einen Punkt dieser Geraden.*

Beweis. Wir bezeichnen die Vierecke mit $ABCD$ und $A'B'C'D'$. AB und $A'B'$ gehen durch P_1, CD und $C'D'$ durch P_2, AC und $A'C'$ durch Q_1, BD und $B'D'$ durch Q_2, AD und $A'D'$ durch R_1. Diese Schnittpunkte liegen auf der Geraden l; je zwei mit verschiedenen Buchstaben bezeichnete sind voneinander entfernt.

Wir setzen zuerst voraus, daß sowohl homologe Seiten wie homologe Ecken voneinander entfernt sind; dann trifft der übliche Beweis zu. Denn $\triangle ABD$ und $\triangle A'B'D'$ genügen den Voraussetzungen des zweiten Desarguesschen Satzes, also AA', BB', DD' laufen durch einen Punkt S. Daß diese Geraden sich voneinander entfernen, zeigt man z. B. für AA' und BB' so: $A \omega P_1$ oder $A' \omega P_1$; wenn $A \omega P_1$, so liegen A, A', B' in Dreieckslage (§ 2, 2). Ebenso ergibt sich, daß AA', CC', DD' voneinander entfernt sind und durch einen Punkt laufen, der also mit S zusammenfällt. Ist nun P ein Punkt von BC außerhalb $B'C'$, so führt die Annahme, B oder C liege außerhalb $PB'C'$, auf eine Ungereimtheit; folglich liegen BB' und CC' in dieser Ebene, also BC trifft $B'C'$; dann zeigt man wie oben für AA' und BB', daß $BB' \omega CC'$. Nach dem ersten Desarguesschen Satz, angewandt auf $\triangle BCD$ und $\triangle B'C'D'$, gehen BC und $B'C'$ durch einen Punkt von l.

Ist nicht bekannt, ob alle homologen Seiten und Ecken voneinander entfernt sind, so kann man durch l eine Ebene legen, die von denen der beiden Vierecke entfernt ist (§ 4, 4), und in dieser ein vollständiges Viereck $XYZU$ konstruieren, dessen Ecken so auf A, B, C, D bezogen werden können, daß fünf Paare homologe Seiten von $ABCD$ und $XYZU$ durch P_1, P_2, Q_1, Q_2 und R_1 gehen. Die sechste Seite von $XYZU$ muß dann sowohl BC als $B'C'$ in einem Punkt von l schneiden.

3. Definition. Wenn durch A und B je zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks gehen, und die Seiten des dritten Paares treffen AB in C und D, so heißt D der *vierte harmonische Punkt* zu A, B und C.

Satz. *Der vierte harmonische Punkt zu drei voneinander entfernten Punkten einer Geraden ist eindeutig bestimmt.*

Dieser Satz ist ein Sonderfall von 2.

§ 8.

Projektivitäten zweiter Stufe.

1. Definitionen. Eine *Projektivität erster Stufe* zwischen den Geraden l und m derselben Ebene entsteht durch Projektion der Punkte von l auf m aus einem Punkt S dieser Ebene, der außerhalb l und m liegt.

Eine *Projektivität n-ter Stufe* entsteht durch n aufeinanderfolgende Projektivitäten erster Stufe.

Eine Beziehung zwischen den Figuren f_1 und f_2 heißt *eineindeutig*, wenn 1. zu jedem Punkt von f_1 ein Punkt von f_2 und zu jedem Punkt von f_2 ein Punkt von f_1 gehört; 2. zu zusammenfallenden Punkten von f_1 zusammenfallende Punkte von f_2 gehören und umgekehrt, und 3. zu voneinander entfernten Punkten von f_1 voneinander entfernte Punkte von f_2 gehören und umgekehrt.

Aus § 2, 2 folgt, daß jede Projektivität eineindeutig ist.

2. Wir betrachten vorläufig Projektivitäten zweiter Stufe zwischen einer Geraden l und sich selbst. Eine solche entsteht durch Projektion der Punkte von l aus S auf l' und aus S' auf l zurück. l, l', S, S' müssen in einer Ebene, S und S' außerhalb l und l' liegen.

3. Die Projektivität *ist von der Identität entfernt*, wenn ein Punkt von seinem Bild entfernt ist. In diesem Fall ergibt sich aus § 2, 2, daß sowohl S von S' wie l von l' entfernt ist. l' und SS' treffen l in den Punkten O und U, die mit ihren Bildern zusammenfallen; O heißt der *erste*, U der *zweite Doppelpunkt* der Projektivität.

Folgende Sätze werden durch wiederholte Anwendung von § 2, 2 bewiesen[10]): Ein Punkt, der von O und U entfernt ist, liegt von seinem Bild entfernt, und sein Bildpunkt ist von O und U entfernt. Ein Punkt, der von seinem Bild entfernt ist, liegt entfernt von O und U.

Wenn O mit U zusammenfällt, heißt die Beziehung eine *Prospektivität*.

4. Bei einer Projektivität zweiter Stufe, von der nicht bekannt ist, ob sie von der Identität entfernt ist, braucht weder l von l' noch S von S' entfernt zu liegen; es brauchen also keine Doppelpunkte bekannt zu sein. Wir nennen die Projektivität *normal*, wenn entweder ein einziger oder ein erster und zweiter Doppelpunkt (die zusammenfallen dürfen) be-

[10]) Wir überlassen im folgenden dem Leser die Ausführung derartiger Beweise, obgleich sie nicht alle ganz einfach sind.

kannt sind und überdies feststeht, entweder daß ein Punkt, der von den bekannten Doppelpunkten entfernt ist, nicht mit seinem Bild zusammenfallen kann, oder daß aus dem Vorhandensein eines mit seinem Bild zusammenfallenden, aber von den gegebenen Doppelpunkten entfernten Punktes folgen würde, daß die Beziehung die Identität ist. Jede Projektivität, von der zwei voneinander entfernte Doppelpunkte bekannt sind, ist also normal. Die Definition der Prospektivität kann aber erweitert werden.

Definition. Eine *Prospektivität* ist eine normale Projektivität zweiter Stufe, von der ein einziger Doppelpunkt bekannt ist.

5. Satz. *Eine normale Projektivität zweiter Stufe ist durch ihre Doppelpunkte O und U und das Bild A' eines von den Doppelpunkten entfernten Punktes eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir betrachten erst den Fall $A' \omega A$. Man kann l' durch O (wenn nur $l' \omega l$) und S außerhalb l und l' beliebig wählen, und findet S' durch eine einfache Konstruktion (vgl. für die Bezeichnungen Abs. 2). Daß das Bild B' eines von O, U, A entfernten Punktes B von der Wahl von l' und S unabhängig ist, folgt unmittelbar aus dem Involutionssatz (§ 7, 1). Ist C ein Punkt, wofür nicht bekannt ist $C \omega A$, und sind C', C'' die Bilder von C durch zwei den Voraussetzungen genügende Projektivitäten, so würde aus $C' \omega C''$ folgen $C' \omega A'$ oder $C'' \omega A'$, also immer $C \omega A$ (Abs. 1); dann ist aber $C' \omega C''$ unmöglich, also $C' \sigma C''$. Ebenso beweist man den Satz, wenn nicht bekannt ist $C \omega O$ oder $C \omega U$.

Wir nehmen jetzt an, daß nicht bekannt ist $A \omega A'$. Es seien Γ_1 und Γ_2 normale Projektivitäten zweiter Stufe mit denselben Doppelpunkten, die A in A' überführen; B ein Punkt der Geraden, B', B'' seine Bilder durch Γ_1 und Γ_2. Aus $B' \omega B''$ würde folgen $B' \omega B$ oder $B'' \omega B$, z. B. $B' \omega B$. Dann ist Γ_1 von der Identität entfernt, also $A' \omega A$. Für diesen Fall ist schon gezeigt worden $B' \sigma B''$; die Annahme $B' \omega B''$ ist daher ungereimt, also $B' \sigma B''$.

Definition. Die normale Projektivität zweiter Stufe mit den Doppelpunkten O und U, welche den von O und U entfernten Punkt A in den ebenfalls von O und U entfernten Punkt A' überführt, werde mit $(A A' O^2 U^2)$ bezeichnet.

Die Prospektivität $(A A' O^2 O^2)$ werde kurz mit $(A A' O^2)$ bezeichnet.

Ein Sonderfall des vorigen ist der

Satz. *Eine Prospektivität ist durch ihren Doppelpunkt und das Bild eines von dem Doppelpunkt entfernten Punktes eindeutig bestimmt.*

6. Wir wollen bisweilen auch solche Projektivitäten zweiter Stufe $(A A' O^2 U^2)$ betrachten, für welche $A \omega O, U$, aber nicht notwendig $A' \omega O$. Eine solche wird mittels der in 2 beschriebenen Konstruktion hergestellt;

man muß fordern $l' \omega l$; $S \omega l, l'$, aber nicht $S' \omega l'$. Die Transformation ist durch die Wahl von O, U, A, A' eindeutig bestimmt. Denn sind B', B'' Bilder von B ($B \omega U$) bei verschiedener Wahl von l' und S, so würde aus $B' \omega B''$ folgen $B' \omega O$ oder $B'' \omega O$, und daraus leicht $A' \omega O$; dann ist $B' \omega B''$ aber ungereimt (5). Es sind nur die Bilder der von U entfernten Punkte bestimmt.

Der hier betrachtete Fall wird im folgenden ausgeschlossen, ausgenommen an den Stellen, wo von einer *vielleicht ausartenden* Projektivität die Rede ist.

7. Satz. *Wenn bei zwei normalen Projektivitäten zweiter Stufe die Bilder eines Punktes voneinander entfernt sind, so liegen die Bilder eines beliebigen Punktes, der von den Doppelpunkten entfernt ist, voneinander entfernt.*

Beweis. Man kann zur Konstruktion der Projektivitäten Γ_1 und Γ_2 dieselbe Gerade l' und denselben Punkt S benutzen. Ist S' das zweite Projektionszentrum für Γ_1, S'' für Γ_2, so gibt wiederholte Anwendung von § 2, 2 $S' \omega S''$; daraus folgt die Behauptung.

Man kann also die Beziehungen ω und σ zwischen normalen Projektivitäten zweiter Stufe mit denselben Doppelpunkten so festsetzen, daß sie übereinstimmen mit denjenigen zwischen den Bildern eines von den Doppelpunkten entfernten Punktes. Die Spezies dieser Projektivitäten ist dann das eineindeutige Bild von der Spezies der von den Doppelpunkten entfernten Punkte der Geraden.

8. Satz. *Die (vielleicht ausartenden) normalen Projektivitäten zweiter Stufe mit gegebenen Doppelpunkten bilden eine Gruppe.*

Beweis. Die Beziehung (EAO^2U^2) führe B in C über (E, $B \omega O$, U; $A \omega U$). (EBO^2U^2) entstehe, indem man die Punkte von l aus S auf die Gerade l' durch O und aus S' auf l zurückprojiziert. Zur Konstruktion von (EAO^2U^2) kann man zuerst aus S' auf l' projizieren und das zweite Projektionszentrum S'' durch Konstruktion bestimmen. Die aus (EAO^2U^2) und (EBO^2U^2) zusammengesetzte Transformation entsteht durch Projektion aus S auf l' und aus S'' zurück auf l; sie fällt also mit (ECO^2U^2) zusammen.

Es sei jetzt nicht bekannt $B \omega O$. Für einen von U entfernten Punkt P sei Q der Bildpunkt durch (EBO^2U^2), ebenso P' der Bildpunkt von Q durch (EAO^2U^2) und P'' von P durch (ECO^2U^2). Aus $P' \omega P''$ würde folgen entweder $P' \omega O$ oder $P'' \omega O$, und daraus einfach $B \omega O$, was ungereimt ist. Also $P' \sigma P''$.

Definition. Die aus (EAO^2U^2) und (EBO^2U^2) zusammengesetzte Projektivität werde mit $(EAO^2U^2) \cdot (EBO^2U^2)$ bezeichnet.

9. Satz. *Die Zusammensetzung der Projektivitäten zweiter Stufe* (8) *ist assoziativ.*

Beweis. Es seien (EAO^2U^2), (EBO^2U^2), (ECO^2U^2) (vielleicht ausartende) normale Projektivitäten zweiter Stufe. Wir setzen

$$\begin{aligned}(EAO^2U^2)\cdot(EBO^2U^2)&=(EDO^2U^2),\\ (EDO^2U^2)\cdot(ECO^2U^2)&=(EFO^2U^2),\\ (EBO^2U^2)\cdot(ECO^2U^2)&=(EGO^2U^2),\\ (EAO^2U^2)\cdot(EGO^2U^2)&=(EF'O^2U^2);\end{aligned}$$

(EBO^2U^2) führt C in G über; (EAO^2U^2) G in F', also (EDO^2U^2) C in F'; (EDO^2U^2) führt aber auch C in F über, also $F\sigma F'$.

10. Satz. *Aus* $A\omega B$ *und* $C\omega O$ *folgt*

$$(EAO^2U^2)\cdot(ECO^2U^2)\,\omega\,(EBO^2U^2)\cdot(ECO^2U^2)$$

und $$(ECO^2U^2)\cdot(EAO^2U^2)\,\omega\,(ECO^2U^2)\cdot(EBO^2U^2).$$

Beweis. Ersteres folgt aus **7**; das andere aus der Eindeutigkeit von (ECO^2U^2) (**1**).

§ 9.

Die zentrale Kollineation.

1. Die *ebene zentrale Kollineation* $(AA'O^2l^2)$ wird bestimmt durch das *Zentrum* O, die *Achse* l und das Bild A' von A; A und A' müssen von O und l entfernt sein und auf einer Geraden durch O liegen. Ein Punkt B außerhalb OA wird aus A auf l und aus A' wieder auf OB projiziert; so ergibt sich das Bild B'.

2. Satz. *Liegt* B *außerhalb* l *und* OA *und ist* B' *das Bild von* B *für* $(AA'O^2l^2)$, *so fallen die Bilder eines Punktes* P *außerhalb* OA *und* OB *für* $(AA'O^2l^2)$ *und* $(BB'O^2l^2)$ *zusammen.*

Beweis. Wir setzen erst voraus $A\omega A'$. Es ist klar, daß $(BB'O^2l^2)$ A in A' überführt. Liegt nun der Punkt P außerhalb OA, OB, AB und l, und ist P' sein Bild durch $(AA'O^2l^2)$, so ergibt der erste Satz von Desargues, daß BP und $B'P'$ sich auf l schneiden.

Ist nicht bekannt, daß $P\omega AB$, und ist P'' das Bild von P durch $(BB'O^2l^2)$, so würde die Annahme $P'\omega P''$ ergeben, daß entweder P' oder P'' außerhalb $A'B'$ läge (denn $O\omega A'B'$), und daraus, daß P außerhalb AB läge, was ungereimt ist, also $P'\sigma P''$.

Ist nicht bekannt $P\omega l$, haben P' und P'' dieselbe Bedeutung wie oben und ist S der Schnittpunkt von AP mit l, T von BP mit l, so würde aus $P'\omega P''$ folgen $P'\omega S$ oder $P''\omega T$ oder $S\omega T$; aus jeder Alternative folgt leicht $P\omega l$, also die Absurdität von $P'\omega P''$.

Ist $A \omega A'$ nicht bekannt und haben P, P', P'' dieselbe Bedeutung wie oben, so würde aus $P' \omega P''$ folgen $P \omega P'$ oder $P \omega P''$. Aus ersterem folgt $A \omega A'$ und aus dem zweiten $B \omega B'$, also wieder $A \omega A'$, was aber ungereimt ist.

Der Satz ist nun allgemein bewiesen.

Definition. Das Bild für $(A A' O^2 l^2)$ eines Punktes, von dem nicht bekannt ist, daß er außerhalb OA liegt, fällt zusammen mit dem Bild durch $(B B' O^2 l^2)$, wo B ein Punkt außerhalb OA und B' sein Bild durch $(A A' O^2 l^2)$ ist.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß das so definierte Bild von der Wahl von B nicht abhängt. Die Kollineation $(A A' O^2 l^2)$ ist nun bestimmt für alle Punkte, die von O entfernt sind. Nach § 8, **1** ist sie eine eineindeutige Beziehung der Ebene auf sich selbst.

3. Satz. *Die Bilder der Punkte einer Geraden durch* $(A A' O^2 l^2)$ *liegen, soweit sie definiert sind, wieder auf einer Geraden.*

Beweis. Wenn O und l von der Geraden p entfernt sind, kann man nach **2** die Rolle von A von einem Punkt von p übernehmen lassen; der Satz ist dann ohne weiteres klar; auch daß O außerhalb der Bildgeraden liegt. Für eine Gerade, von der nicht bekannt ist, ob O von ihr entfernt ist, beweisen wir ihn wie folgt. Wir wählen auf p die von O entfernten Punkte L, M, N, so daß $L \omega M$; bildeten die Bilder L', M', N' ein Dreieck, so läge O außerhalb einer Seite (§ 2, 5), z. B. $L'M'$; $L'M'$ entspricht dann in $(A' A O^2 l^2)$ der Geraden $LM \equiv p$, so daß O außerhalb p liegen würde, was zu einer Ungereimtheit führt.

Ist schließlich $p \omega l$ nicht bekannt, so würde (mit denselben Bezeichnungen wie oben), wenn L', M', N' ein Dreieck bildeten, eine der Ecken, z. B. L', außerhalb l fallen, also $L \omega l$, also $p \omega l$, was ungereimt ist.

4. Für den Punkt X sei $X \omega O$ nicht bekannt. Wir legen durch X eine Gerade p, die von l und OA entfernt ist (das ist leicht zu machen mit Hilfe von § 2, **3**), projizieren X aus A auf l und aus A' zurück auf das Bild p' von p; so entsteht das Bild X' von X. Zwei Bilder von X, mit verschiedener Wahl von p konstruiert, können nicht voneinander entfernt sein, da dann eines von beiden, also auch X, von O entfernt sein müßte.

Der Satz **3** bleibt auch bei dieser neuen Definition gültig.

5. Aus dem Satz **3** folgt, daß die zentrale Kollineation eine Projektivität zweiter Stufe zwischen den Punkten einer Geraden wieder in eine derartige Beziehung zwischen den Bildpunkten auf der Bildgeraden transformiert. Ebenso wird eine zentrale Kollineation in eine zentrale Kollineation transformiert. Das gibt weiter den

Satz. *Projiziert man die Punkte einer Geraden l auf eine Gerade l', die durch den Punkt O von l geht und mit l in der Ebene α liegt, aus dem Punkt P, der in α außerhalb l und l' liegt, so werden die Projektivitäten zweiter Stufe auf l in derartige Beziehungen auf l' transformiert.*

Denn die durch die Projektion vermittelte Beziehung zwischen l und l' ist enthalten in einer zentralen Kollineation mit P als Zentrum und PO als Achse.

6. *Räumliche zentrale Kollineation.*

Eine *räumliche zentrale Kollineation* $(AA'O^2\alpha^2)$ wird bestimmt durch die *invariante Ebene* α, das *Zentrum* O und das Bild A' von A; A und A' müssen von O und α entfernt und auf einer Geraden durch O liegen. Ist B ein Punkt außerhalb OA und α, so fällt in der Ebene OAB die Beziehung $(AA'O^2\alpha^2)$ zusammen mit $(AA'O^2t^2)$, wo t die Schnittgerade dieser Ebene mit α ist. Ist B' das Bild von B, so beweist man völlig wie bei der ebenen zentralen Kollineation, daß die Bilder von jedem Punkt außerhalb OA und OB durch $(AA'O^2\alpha^2)$ und $(BB'O^2\alpha^2)$ zusammenfallen. Dies gibt uns wieder das Mittel, $(AA'O^2\alpha^2)$ auszudehnen auf Punkte, von denen nicht bekannt ist, daß sie außerhalb OA liegen.

7. Nach **3** liegen die Bilder der Punkte einer Geraden, die in einer Ebene durch O liegt, wieder auf einer Geraden; aus der Definition der Ebene geht also hervor, daß die Bilder der Punkte einer Ebene, von der O entfernt ist, in einer Ebene liegen. Für eine Ebene, von der nicht bekannt ist, ob O von ihr entfernt ist, wird dieser Satz bewiesen wie in **3** der analoge Satz.

8. Um das Bild eines Punktes X zu definieren, von dem $X\omega O$ nicht bekannt ist, legen wir durch X die Ebene β, außerhalb welcher A liegt (§ 4, **5**). Wir projizieren X aus A auf α und aus A' zurück auf das Bild β' von β, wodurch das Bild X' entsteht. Daß X' eindeutig bestimmt ist, beweist man wie in **4**.

9. Man kann die zentrale Kollineation auch definieren, wenn $A'\omega O$ oder $A'\omega\alpha$ nicht bekannt ist; wir verfolgen nur den ersten Fall. Die Definition bleibt dieselbe wie in **6**; das Bild von P ist aber nur dann bestimmt, wenn $P\omega\alpha$. Der Satz aus **7** bleibt richtig, denn (mit einer analogen Bezeichnung wie in **2**) $P'\omega P''$ ergäbe $P'\omega O$ oder $P''\omega O$, also $A'\omega O$. Das Bild P' von P wird, wenn $P\omega O$ nicht bekannt ist, folgendermaßen konstruiert. Man ziehe durch P die Gerade m, die von OA entfernt ist und α in S trifft; Q sei ein Punkt von m, der von O und S entfernt sei und Q' sein Bild. SQ' ist das Bild m' von m.

Nun projiziere man P aus A auf α und aus A' zurück auf m'; dann ergibt sich P'.

Zeigt sich später, daß $P \omega O$, so bleibt diese Konstruktion richtig.

Wenn nicht anders gesagt, setzen wir bei der zentralen Kollineation $(A A' O^2 \alpha^2)$ voraus $A' \omega O$, $A' \omega \alpha$.

10. Satz. *Die auch vielleicht ausartenden zentralen Kollineationen mit gegebenen Zentrum und Doppelebene bilden eine Gruppe.*

Beweis. Die Transformation, die durch Zusammensetzung aus zwei nicht ausartenden zentralen Kollineationen mit dem Zentrum O und der Doppelebene α entsteht, führt jede Gerade l, die von O und α entfernt ist, über in eine Gerade l', die durch den Schnittpunkt von l mit α geht und in der Ebene $O l$ liegt, und jede andere Gerade wenigstens wieder in eine Gerade. Daraus ergibt sich leicht, daß der Bildpunkt eines beliebigen Punktes nach den Vorschriften von **6** gefunden wird; die Transformation ist also eine zentrale Kollineation.

Wenn die Kollineationen auch ausarten können, wird der Beweis in analoger Weise ergänzt wie in § 8, 8.

§ 10.

Koordinaten auf der Geraden.

1. Auf der Geraden l setzen wir die voneinander entfernten Punkte O und U ein für allemal fest und definieren die Addition der Punkte durch die Festsetzung: Wenn $(O A U^2) \cdot (O B U^2) = (O C U^2)$ (§ 8, **11**, **8**), ist $A + B = C$.

Ist noch der Punkt E, der von O und U entfernt ist, festgelegt, so wird die Multiplikation definiert durch:

Wenn $(E A O^2 U^2) \cdot (E B O^2 U^2) = (E C O^2 U^2)$, ist $A \times B = C$.

2. Es ist zu zeigen, daß die Punkte der Geraden bei diesen Festsetzungen den Postulaten für einen nichtkommutativen Körper genügen.

Diese Postulate gab ich in „Lineare Gleichungen" § 1 in folgender Form:

S_1. $a = b$ und $a \mp b$ sind umkehrbare Beziehungen zwischen den Elementen a und b der Spezies Σ.

S_2. Für jedes Element a von Σ gilt $a = a$.

S_3. Die Beziehungen $a = a$ und $a \mp a$ schließen sich gegenseitig aus.

S_4. Wenn $a \mp b$ ungereimt ist, gilt $a = b$.

S_5. Wenn zwischen den Elementen a und b von Σ die Beziehung $a \mp b$ besteht, so gilt für jedes Element c von Σ entweder $a \mp c$ oder $b \mp c$.

A_1. Wenn a und b Elemente von Σ sind, ist $a+b$ ein Element von Σ.

A_2. Aus $a=c$, $b=d$ folgt $a+b=c+d$.

A_3. $(a+b)+c=a+(b+c)$.

A_4. Aus $x \neq y$ folgt für jedes Element a von Σ $a+x \neq a+y$ und $x+a \neq y+a$.

A_5. Σ enthält ein Element 0, wofür $0+0=0$.

A_6. Zu jedem Element a von Σ kann ein Element $(-a)$ bestimmt werden derart, daß $a+(-a)=0$.

M_1. Wenn a und b Elemente von Σ sind, ist $a\,b$ ein Element von Σ.

M_2. Aus $a=c$, $b=d$ folgt $a\,b=c\,d$.

MA_1. $a(b+c)=a\,b+a\,c$.

MA_2. $(b+c)a=b\,a+c\,a$.

M_3. $(a\,b)c=a(b\,c)$.

M_4. Aus $x \neq y$ und $a \neq 0$ folgt $a\,x \neq a\,y$ und $x\,a \neq y\,a$.

M_5. Σ enthält ein Element 1, wofür $1 \neq 0$ und $1\,1=1$.

M_6. Zu jedem Element a von Σ, wofür $a \neq 0$, kann ein Element $\frac{1}{a}$ bestimmt werden, derart daß $a\frac{1}{a}=1$.

Für S_1 bis S_5 ergibt sich der Beweis unmittelbar aus Axiom II. A_1 und M_1 sind Folgen von § 8, **8**; A_2 und M_2 von § 8, **5** und **6**; A_3 und M_3 von § 8, **9**; A_4 und M_4 von § 8, **10**.

Der Punkt O hat die Eigenschaft $O+O=O$ und für den Punkt E gilt $E \times E=E$. Wenn durch $(A\,O\,U^2)$ O in A' übergeht, ist $A+A'=O$; und wenn $A\,\omega\,O$ und $(A\,E\,O^2\,U^2)$ führt E in A' über, so ist $A \times A'=E$. Es sind also A_5, M_5, A_6, M_6 erfüllt.

3. Es bleiben noch $MA_{1,2}$ zu beweisen übrig.

Satz. (MA_1.)

$$A \times (B+C)=A \times B+A \times C.$$

Beweis: Es sei

$$B+C=D; \quad A \times D=F; \quad A \times B=G; \quad A \times C=H; \quad G+H=F'.$$

$(E\,A\,O^2\,U^2)$ führt D in F, B in G, C in H über. Ist nun $A\,\omega\,O$, so kann man diese Beziehung so erweitern, daß man eine zentrale Kollineation erhält, die nach § 9, **5** $(O\,B\,U^2)$ in $(O\,G\,U^2)$ überführt. Durch $(O\,B\,U^2)$ geht C in D über, also durch $(O\,G\,U^2)$ H in F, d. h.

$$F=G+H=F'.$$

Ist $A\,\omega\,O$ nicht bekannt, so würde aus $F\,\omega\,F'$ entweder $F\,\omega\,O$ oder $F'\,\omega\,O$ folgen. $F\,\omega\,O$ gibt $A\,\omega\,O$ (§ 8, **1**); $F'\,\omega\,O$ nach „Lin. Gleich.“

§ 1, Satz η[11]) $G\,\omega\,O$ oder $H\omega O$ und beide wieder nach § 8, **1** $A\,\omega\,O$. $A\,\omega\,O$ ist aber ungereimt, da dann $F\,\sigma\,F'$ schon bewiesen ist.

Satz. $(MA_2.)$

$$(B+C)\times A = B\times A + C\times A.$$

Beweis. Wir nehmen erst an $A\,\omega\,O$. Es sei

$$B+C=D;\quad D\times A=F;\quad B\times A=G;\quad C\times A=H;\quad G+H=F'.$$

Wir wählen die Gerade l' durch O, so daß $l'\,\omega\,l$; weiter S außerhalb l und l'. SE und SA treffen l' in P und Q. PC, PB, PD treffen SU in S_1, S_2, S_3 (s. die Figur). Durch die zentrale Kollineation $(PQO^2\overline{SU}^2)$ gehen E, B, C, D bzw. über in A, G, H, F. Nach § 9, 5 führt sie (OBU^2) über in (OGU^2); durch (OBU^2) geht C in D, also durch (OGU^2) H in F über, d. h. $F = G + H = F'$.

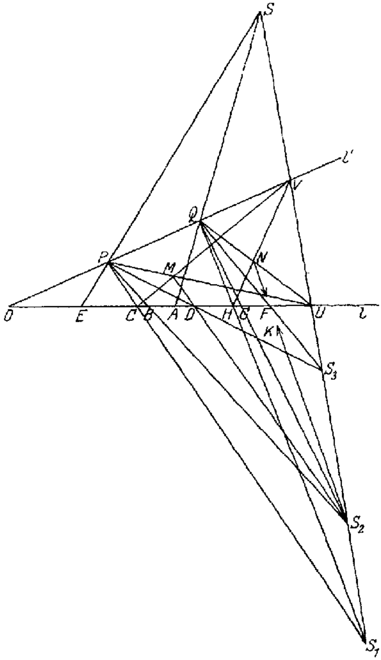

Fig. 11.

Ist $A\,\omega\,O$ nicht bekannt, und nehmen wir einen Augenblick $F\,\omega\,F'$ an, so folgt $F\omega O$ oder $F'\omega O$. $F\omega O$ ergibt unmittelbar $A\,\omega\,O$; $F'\omega O$ gibt $G\omega O$ oder $H\omega O$ („Lin. Gleich." § 1, η) und beide geben wieder $A\,\omega\,O$, was zu einer Ungereimtheit führt.

4. Die von U entfernten Punkte der Geraden bilden jetzt einen nichtkommutativen Körper. Will man auch die Fundamentalpunkte O, U, E angeben, so nennt man das mit dem Punkt A korrespondierende Element dieses Körpers die *Koordinate* von A in bezug auf das System EOU und bezeichnet es mit $(AEOU)$. E heißt

[11]) Dieser Satz ist ohne Benutzung von MA_1 oder MA_2 bewiesen.

Einheitspunkt, O *Nullpunkt*, U *Unendlichkeitspunkt* des Systems. Die Koordinate ist also nichts anderes als der Punkt A selbst, in bestimmter Weise auf die Fundamentalpunkte bezogen.

O und U halten wir vorläufig fest. E kann durch einen beliebigen, von O und U entfernten Punkt F der Geraden ersetzt werden mittels der

Definition. Geht F durch (EAO^2U^2) über in B, so ist $(AEOU) = (BFOU)$. Folglich ist $(BFOU) \times (FEOU) = (BEOU)$.

5. Es sind jetzt die Koordinatensysteme auf verschiedenen Geraden durch O aufeinander zu beziehen. Zu dem Zweck legen wir durch U die Ebene α, von welcher O entfernt ist. Auf jeder Geraden m durch O wählen wir O als Nullpunkt, den Schnittpunkt von m mit α als Unendlichkeitspunkt des Koordinatensystems. Vom Einheitspunkt wird selbstverständlich immer vorausgesetzt, daß er von O und α entfernt ist.

Definition. Wenn die (auch vielleicht ausartende) zentrale Kollineation $(EAO^2\alpha^2)$ F in B überführt, ist $(AEOU) = (BFOV)$. Liegt das Bild von F durch $(EAO^2\alpha^2)$ von B entfernt, so ist $(AEOU) \mathrel{+\!\!\!\!\!=} (BFOV)$.

In dieser Definition ist die vorige (4) enthalten.

Zu jedem Punkt C auf OV kann man D auf OU bestimmen, so daß $(CFOV) = (DEOU)$. Wir definieren weiter:

$$(AEOU) + (CFOV) = (AEOU) + (DEOU).$$

Es ist zu zeigen, daß bei diesen Definitionen die Postulate für einen nichtkommutativen Körper gültig bleiben. Der Beweis bietet nur einige Schwierigkeit für S_5, A_2 und M_2.

Satz. (S_5.) *Liegt A auf OU, B auf OV, C auf OW, alle außerhalb α, so folgt aus $(AEOU) \mathrel{+\!\!\!\!\!=} (BFOV)$ entweder $(AEOU) \mathrel{+\!\!\!\!\!=} (CGOW)$ oder $(BFOV) \mathrel{+\!\!\!\!\!=} (CGOW)$.*

Beweis. Wir bestimmen B' und C' auf OU so, daß $(B'EOU) = (BFOV)$ und $(C'EOU) = (CGOW)$; nun ist $B' \omega A$, also $C' \omega B'$ oder $C' \omega A$, woraus man mittels der letzten Definition leicht den Satz folgert.

Satz. (A_2.) *Aus $(AEOU) = (CFOV)$ und $(BEOU) = (DFOV)$ folgt*

$$(AEOU) + (BEOU) = (CFOV) + (DFOV).$$

(Wenn dieser Satz bewiesen ist, ist die allgemeine Gültigkeit des Postulats leicht einzusehen.)

Beweis. Wir setzen zuerst voraus $U \omega V$. Es sei $A + B = P$; $C + D = Q$, also (OAU^2) führt B in P und (OCV^2) führt D in Q

über. Durch $(EAO^2\alpha^2)$ geht F in C über, also wenn S der Schnittpunkt von EF mit α ist, liegt C auf SA; ebenso liegt D auf SB. Durch Projizieren aus S auf OV geht (OAU^2) über in (OCV^2) (§ 9, 5), also P in Q. Folglich liegt Q auf SP, d. h. durch $(EPO^2\alpha^2)$ geht F in Q über, also $(PEOU)=(QFOV)$.

Ist $U\,\omega\,V$ nicht bekannt, so ziehen wir die Gerade OW, von OU und OV entfernt, usw.

Satz. (M_2.) *Aus* $(AEOU)=(CFOV)$ *und* $(BEOU)=(DFOV)$ *folgt*

$$(AEOU)\times(BEOU)=(CFOV)\times(DFOV).$$

Beweis. Es sei $A\times B=P$; $C\times D=Q$. Dann entsteht die (auch vielleicht ausartende) zentrale Kollineation $(EPO^2\alpha^2)$ durch Komposition aus $(EAO^2\alpha^2)$ und $(EBO^2\alpha^2)$; $(FQO^2\alpha^2)$ ebenso aus $(FCO^2\alpha^2)$ und $(FDO^2\alpha^2)$; da beide Komponenten gleich sind, ist auch $(EPO^2\alpha^2)$ $=(FQO^2\alpha^2)$.

§ 11.

Koordinaten in der Ebene.

1. Wir wählen ein *Fundamentaldreieck* OUV und einen *Einheitspunkt* E außerhalb dessen Seiten. Es sei P ein Punkt außerhalb UV; E_1, P_1 die Projektionen von E, P aus V auf OU; E_2, P_2 diejenigen aus U auf OV. Wir bestimmen die *Koordinaten* von P im System $EUVO$ als ein l. Verhältnis[12]) durch

$$x_1 : x_2 : x_3 = (P_1E_1OU) : (P_2E_2OV) : 1.$$

$x_3 \neq 0$ kann beliebig gewählt werden; dann lassen x_1, x_2 sich berechnen.

Wenn $Q(y_i)$ von $P(x_i)$ entfernt ist, liegt Q außerhalb UP oder VP (§ 2, 5), also $P_1\,\omega\,Q_1$ oder $P_2\,\omega\,Q_2$, d. h. $\frac{1}{x_3}x_1 \neq \frac{1}{y_3}y_1$ oder $\frac{1}{x_3}x_2 \neq \frac{1}{y_3}y_2$, also immer $(x_i)\neq(y_i)$. Umgekehrt: Aus $(x_i)\neq(y_i)$ folgt nach „Lineare Gleich." § 2, 2, daß $y_i - y_3\frac{1}{x_3}x_i \neq 0$ ($i=1$ oder 2), also $\frac{1}{x_3}x_i \neq \frac{1}{y_3}y_i$, also $P_i\,\omega\,Q_i$ und, da $P\,\omega\,UV$, $P\,\omega\,Q$.

Wir haben also eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf die analytische Ebene hergestellt, soweit es Punkte außerhalb UV betrifft. Der Bildpunkt von P werde immer mit P' bezeichnet.

2. Gleichung der Geraden. (Nach Vahlen, loc. cit. § 132.) Es sei l eine Gerade, außerhalb welcher O, U und V liegen, und die UV in T, OU in G_1, OV in G_2 trifft; ferner sei P ein von O und UV entfernter Punkt. Wir bestimmen P_1 und P_2 wie unter 1 und bezeichnen die Pro-

[12]) „Lin. Gleich." § 2, 1.

jektionen von P_2 und P aus T auf OU bzw. mit Q und R. OP treffe l in G' und UV in L. Nun entsteht die Beziehung (OQU^2), indem man aus V auf UP und aus T zurückprojiziert; sie führt also P_1 in R über. Dann ist

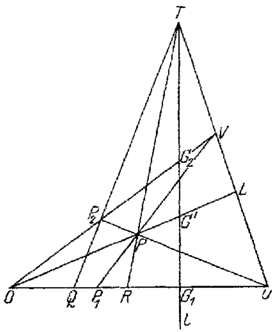

Fig. 12.

$$(P_2 G_2 O V) + (P_1 G_1 O U)$$
$$= (Q G_1 O U) + (P_1 G_1 O U) \quad (\S\, 10, 5)$$
$$= (R G_1 O U) \quad (\S\, 10, 1)$$
$$= (P G' O L) \quad (\S\, 10, 5).$$

Nach § 10, 4 ist noch

$$(P_1 G_1 O U) = (P_1 E_1 O U) \times (E_1 G_1 O U)$$
$$= \frac{1}{x_3} x_1 \times - \xi_1 \frac{1}{\xi_3},$$

wenn $(E_1 G_1 O U) = - \xi_1 \frac{1}{\xi_3}$ gesetzt wird.

Setzt man ebenso $(E_2 G_2 O V) = - \xi_2 \frac{1}{\xi_3}$, so ist

$$(P_2 G_2 O V) = \frac{1}{x_3} x_2 \times - \xi_2 \frac{1}{\xi_3},$$

also

$$(P G' O L) = - \frac{1}{x_3} (x_2 \xi_2 + x_1 \xi_1) \frac{1}{\xi_3}.$$

Liegt P auf l, so ist $(PG'OL) = 1$, also

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = 0,$$

und umgekehrt.

Liegt P außerhalb l, so ist $(PG'OL) \neq 1$, also

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 \neq 0,$$

und umgekehrt. Letzteres gilt auch dann, wenn $P \omega O$ nicht bekannt ist.

Die Gleichung einer Geraden durch U oder V läßt sich mühelos aufschreiben; z. B. gilt für jeden von V entfernten Punkt einer Geraden durch V, außerhalb welcher U liegt,

$$\frac{1}{x_3} x_1 = \text{konst.} = - \xi_3 \frac{1}{\xi_1} \qquad \text{oder} \qquad \xi_1 x_1 + \xi_3 x_3 = 0.$$

Solche Geraden, von denen nicht bekannt ist, ob sie einen der Punkte O, U, V enthalten, betrachten wir später.

3. Die Koordinaten der vorläufig ausgeschlossenen Punkte. Es sei P ein Punkt, der von U und V entfernt ist, aber nicht außerhalb UV zu liegen braucht. Wir ziehen durch P die voneinander entfernten Geraden p und q so, daß O, U und V außerhalb dieser Geraden liegen (dazu verbinde man P mit zwei Punkten, die bzw. auf OU und OV so liegen, daß sie von O und UV entfernt sind). Ihre Bildgeraden p' und q', die nach 2 zu bestimmen sind, treffen sich in einem Punkte P' der numeralen Ebene, dessen Koordinatenverhältnis wir auch P zuordnen. Die Bildgerade l' einer Geraden l durch P geht durch P'. Denn wenn P' außerhalb l' läge, würde l' p' und q' treffen in A' und B'; A' oder P' liegt außerhalb $U'V'$. Wenn P', so liegt auch P außerhalb UV, was zu einer Ungereimtheit führt. Wenn A' und B' außerhalb $U'V'$ liegen, sind sie die Bilder der Punkte A und B außerhalb UV, so daß l p und q treffen müßte in A und B außerhalb UV, was ungereimt ist. Das Koordinatenverhältnis von P ist also eindeutig bestimmt, und zugleich ersieht man, daß die Gleichung von l auch in P gilt.

Satz. *Auch nach Einführung dieser neuen Koordinaten ist die Beziehung der Ebene auf die numerale Ebene umkehrbar eindeutig.*

Beweis. Es ist schon gezeigt worden, daß aus $P(x_i)\,\sigma\,Q(y_i)$ folgt $(x_i)=(y_i)$ und umgekehrt. Es sei nun gegeben $P(x_i)\,\omega\,Q(y_i)$, während P und Q von O, U, V entfernt sind und folglich je außerhalb zweier der Seiten des Dreiecks UVW liegen (§ 2, 5), so daß es immer eine Seite gibt, außerhalb welcher P und Q liegen. Für den Fall, daß diese UV ist, ist der Satz in 1 bewiesen. Ist sie OU, so wählen wir A auf OU, von O und U entfernt. O, U, V liegen außerhalb AP und AQ,[13]) und $AP\,\omega\,AQ$, also auch die Bildgeraden $A'P'$ und $A'Q'$ sind voneinander entfernt, so daß $P'\,\omega\,Q'$.

Liegt $P(p_i)$ außerhalb der Geraden l, deren Gleichung nach 2 ist $\sum x_i\xi_i=0$, so ist $\sum p_i\xi_i \neq 0$. Denn P liegt von jedem Punkt von l entfernt, also P' von jedem Punkt von l', also nach „Lin. Gleich." § 6, 7 $\sum p_i\xi_i \neq 0$. Auch die Resultate von 2 bleiben also richtig.

Die beiden Beweisführungen sind fast ungeändert umkehrbar.

4. Es sei l eine Gerade, außerhalb welcher U und V liegen, aber O vielleicht nicht; T der Schnittpunkt von l mit UV; A ein Punkt von l, der von O und T entfernt ist; C ein beliebiger Punkt von l. Wir nehmen einen Augenblick an, daß die Bildpunkte A', T', C' ein Dreieck bilden; dann folgt aus $C'\,\omega\,T'$, daß $C\,\omega\,T$, also C liegt außerhalb UV, also C' außerhalb $U'V'$. U' und V' liegen außerhalb $A'T'$ und $C'T'$, und O' außerhalb einer dieser Geraden, z. B. $A'T'$. Dann ist $A'T'$ nach 2 Bild der Geraden AT, also nach 2 oder 3 liegt C' auf $A'T'$. $C'\,\omega\,A'T'$ ist also ungereimt, d. h. C' liegt auf $A'T'$; l wird also durch eine homogene rechtslineare Gleichung dargestellt.

[13]) Wäre nicht bekannt $V\,\omega\,AP$ und $V\,\omega\,AQ$, so lägen (da $V\,\omega\,P, Q$) P und Q außerhalb UV.

5. Es sei weiter m eine Gerade, außerhalb welcher V liegt, aber U vielleicht nicht; A der Schnittpunkt mit OV, B ein Punkt von m, der und U und A entfernt liegt, C ein Punkt von m, der von U entfernt liegt. Nehmen wir an, daß $A'B'C'$ ein Dreieck ist, so liegt U außerhalb $A'B'$ oder $A'C'$ und V außerhalb beider; wir können also eine Ungereimtheit herleiten wie in 4.

6. Der Satz, daß das Bild einer Geraden, außerhalb welcher V nicht zu liegen braucht, eine Gerade der numeralen Ebene ist, wird ebenso leicht bewiesen.

7. Die Koordinaten eines Punktes, der nicht von U und V entfernt zu liegen braucht, können jetzt nach der Methode von **3** bestimmt werden. Ebenso wie dort sieht man ein, daß die Resultate von **1** und **2** gültig bleiben.

8. Die Beweise von **1** bis **6** können vereinfacht werden, wenn man voraussetzt, daß es mehr als drei voneinander entfernte Punkte auf einer Geraden gibt. Wir haben diese Voraussetzung nicht gemacht, weil zwar der Fall, daß jede Gerade genau drei Punkte enthält, trivial ist, nicht aber der Fall, daß auf einer Geraden drei voneinander entfernte Punkte bekannt sind, während es nicht ausgeschlossen ist, daß es deren mehrere gibt.

§ 12.

Koordinaten im Raum.

1. Wir nehmen ein *Fundamentaltetraeder* $OUVW$ und den *Einheitspunkt* E außerhalb seiner Ebenen. Es sei P ein Punkt außerhalb UVW; E_{12}, P_{12} die Projektionen von E, P aus W auf OUV; E_1, P_1 diejenigen aus VW auf OU; E_2, P_2 aus UW auf OV; E_3, P_3 aus UV auf OW. Die Koordinaten von P im System $EUVWO$ werden gegeben durch das l. Verhältnis

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (P_1 E_1 O U) : (P_2 E_2 O V) : (P_3 E_3 O W) : 1.$$

$x_1 : x_2 : x_4$ sind also die Koordinaten von P_{12} im System $EUVO$.

Daß diese Abbildung zwischen dem Raum und dem numeralen Raum eineindeutig ist, zeigt sich wie in § 11, **1**.

2. *Die Gleichung der Ebene.* Es sei δ eine Ebene, außerhalb welcher O, U, V, W liegen; P ein Punkt, der von OW und UVW entfernt liegt. Neben denen aus **1** führen wir noch die folgenden Bezeichnungen ein: δ trifft OP, OP_{12}, OU, OV, OW bzw. in D, D_{12}, D_1, D_2, D_3; OP_{12} trifft UV in L; OP trifft UVW in M. Nach § 11, **2** ist

$$(P_1 D_1 O U) + (P_2 D_2 O V) = (P_{12} D_{12} O L);$$
$$(P_{12} D_{12} O L) + (P_3 D_3 O W) = (P D O M);$$

also
$$(P_1 D_1 O U) + (P_2 D_2 O V) + (P_3 D_3 O W) = (P D O M).$$
Ziehen wir noch die Formel
$$(P_1 D_1 O U) \times (D_1 E_1 O U) = (P_1 E_1 O U) \qquad (§ 10, 4)$$
heran und setzen wir $(E_1 D_1 O U) = -\xi_1 \frac{1}{\xi_4}$ usw., so folgt
$$\frac{1}{x_4} x_1 \xi_1 \frac{1}{\xi_4} + \frac{1}{x_4} x_2 \xi_2 \frac{1}{\xi_4} + \frac{1}{x_4} x_3 \xi_3 \frac{1}{\xi_4} + (P D O M) = 0.$$

Somit ist $\sum x_i \xi_i = 0$ notwendig und hinreichend, damit P in δ liegt, und $\sum x_i \xi_i \neq 0$, damit P außerhalb δ liegt.

Ist nicht bekannt, daß P außerhalb OW liegt, aber ist P von O entfernt, so liegt P außerhalb OV, und der obige Beweis gilt nach Vertauschung von V mit W. Ist $P \omega O$ nicht bekannt, so liegt P außerhalb δ (§ 4, **3**) und $x_4 \xi_4 \neq 0$, also $\sum x_i \xi_i \neq 0$, oder $P \omega O$.

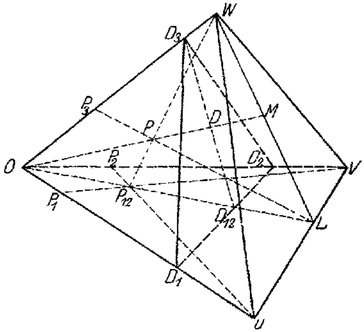

Fig. 13.

3. Da die Ausdehnung auf die vorläufig ausgeschlossenen Punkte und Ebenen analog verläuft wie in § 11, wollen wir diese nicht in Einzelheiten ausführen.

§ 13.

Koordinatentransformationen.

1. Dieser Paragraph knüpft an die Abhandlung „Lineare Gleichungen" an. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 4$. Vier Punkte $A(a_i)$, $B(b_i)$, $C(c_i)$, $D(d_i)$ in Tetraederlage bestimmen zu je dreien die Ebenen BCD ($\sum x_i \xi_i = 0$), ACD ($\sum x_i \eta_i = 0$), ABD ($\sum x_i \zeta_i = 0$), ABC ($\sum x_i \varphi_i = 0$). Zum beliebigen Punkt (x_i) kann man $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ so bestimmen, daß $x_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i + \varrho d_i$ („Lin. Gleich." § 6, **5**), also $\sum x_i \xi_i = \lambda \sum a_i \xi_i$. Da $\sum a_i \xi_i \neq 0$ („Lin. Gleich." § 6, **7**), folgt aus $\lambda \neq 0$, daß $\sum x_i \xi_i \neq 0$. Folglich ist für jedes l. Verhältnis der x_i eines der ersten Glieder von den Gleichungen der Ebenen von 0 entfernt; dann kann man aber nach „Lin. Gleich." § 5, Satz III A, B, C, D so permutieren, daß
$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_4 \\ . & . & . \\ \varphi_1 & \dots & \varphi_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wir führen nun neue Koordinaten ein durch

$$(1) \qquad x_1' = \sum x_i \xi_i; \quad x_2' = \sum x_i \eta_i; \quad x_3' = \sum x_i \zeta_i; \quad x_4' = \sum x_i \varphi_i.$$

Satz. *Die Beziehungen des Zusammenfallens und der Entfernung zwischen Punkten sind dieselben für die neuen Koordinaten wie für die ursprünglichen.*

Der Beweis beruht auf den Identitäten

$$(2) \qquad \sum (x_i - \varrho y_i) \xi_i = x_1' - \varrho y_1', \text{ usw.}$$

Wenn $x_i = \varrho y_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$, ist $x_i' = \varrho y_i'$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Wenn $x_i' = \varrho y_i'$ $(i = 1, \ldots, 4)$, so folgt, wegen $\varDelta \neq 0$, aus „Lin. Gleich." § 5, Satz IV, daß für keinen Index i, $x_i - \varrho y_i \neq 0$ sein kann. — Wenn für jedes ϱ für einen Index i, $x_i - \varrho y_i \neq 0$, so ist nach „Lin. Gleich." § 5, Satz IV für einen Index k, $x_k' - \varrho y_k' \neq 0$. Wenn schließlich für jedes ϱ für ein gewisses k, $x_k' - \varrho y_k' \neq 0$, so ist das erste Glied der betreffenden Identität, also wenigstens ein Term daraus, von 0 entfernt.

2. Aus (1) folgt das äquivalente System

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 + x_4 \xi_4 - x_1' = 0.$$

$$x_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1' \\ \eta_1 & x_2' \end{vmatrix} = 0.$$

$$x_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & x_1' \\ \eta_1 & \eta_2 & x_2' \\ \zeta_1 & \zeta_2 & x_3' \end{vmatrix} = 0.$$

$$x_4 \varDelta - \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & x_1' \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & x_2' \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & x_3' \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & x_4' \end{vmatrix} = 0,$$

aus welchem sich nacheinander $x_4, \ldots, x_1$, und zwar nach „Lin. Gleich." § 4, 8 als homogene rechts lineare Funktionen von $x_1', \ldots, x_4'$, berechnen lassen.

Man sieht jetzt leicht ein, daß, wenn $P(x_i)$, $Q(y_i)$, $R(z_i)$ Punkte in Dreieckslage sind, die Ebene PQR identisch ist mit der Spezies der Punkte S, deren neue Koordinaten u_i' in der Form $u_i' = \lambda x_i' + \mu y_i' + \nu z_i'$ darstellbar sind. Wählt man für P, Q, R die Punkte A, B, C (1), so ist die Gleichung der Ebene in den neuen Koordinaten $x_4' = 0$; die Geometrie in einer Ebene α des R_3 ist also eine zweidimensionale Geometrie, in der die Geraden die Schnitte von α mit den von α entfernten Ebenen sind.

3. Nachdem die Punkte A, B, C, D (**1**) festgelegt sind, kann man durch die Substitution

$$x_i'' = x_i' \frac{1}{e_i'}$$

sorgen, daß die Koordinaten eines Punktes $E(e_i)$ außerhalb der Tetraederflächen (1, 1, 1, 1) werden.

4. Analoge Sätze für die Ebene ließen sich jetzt leicht aussprechen und beweisen. Bezüglich **3** muß bemerkt werden, daß man für E z. B. den Schnittpunkt von BQ und CP (P auf AB, Q auf AC) wählen kann; dann wird P (1, 1, 0), Q (1, 0, 1).

§ 14.

Der Satz von Pascal.

1. Wir geben diesen Satz zuerst in der *engen Fassung*:

Liegen die Eckpunkte eines Sechsecks abwechselnd auf zwei sich schneidenden Geraden und liegen diese Eckpunkte voneinander und vom Schnittpunkt der beiden Geraden entfernt, so liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden. (Aus der Voraussetzung folgert man leicht, daß diese Schnittpunkte bestehen und voneinander entfernt sind.)

Eine *weitere Fassung* ist:

Sind A, A' sowie B, B' und C, C' Gegenecken eines ebenen Sechsecks, von denen A, B, C und A', B', C' je auf einer von zwei voneinander entfernten Geraden durch O liegen, während $B, C, A', B', C' \,\omega\, O$; $A \,\omega\, B, C$ und $C' \,\omega\, A', B'$, so bestehen die Schnittpunkte der Gegenseiten des Sechsecks und sie liegen auf einer Geraden.

Satz. *Die weitere Fassung des Satzes folgt aus der engeren.*

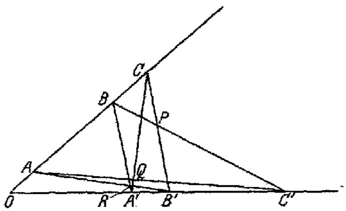

Fig. 14.

Beweis. Daß die Schnittpunkte der Gegenseiten bestehen, folgt aus $A \,\omega\, A'B$ und $A \,\omega\, A'C$ und $C' \,\omega\, B'C$. Es sei P der Schnittpunkt von BC' und $B'C$; Q von AC', $A'C$; R von AB', $A'B$. Aus $C' \,\omega\, B'C$ folgt $C' \,\omega\, P$, also $P \,\omega\, C'A$, also $P \,\omega\, Q$. Wir wollen nun einen Augenblick annehmen, es liege R außerhalb PQ. Dann ergibt sich aus $Q \,\omega\, R$ entweder $Q \,\omega\, A'$ oder $R \,\omega\, A'$; aus beiden folgt $A \,\omega\, O$. Ferner ergibt sich aus $QP \,\omega\, QR$

entweder $QP\omega A'C$	oder $QR\omega A'C$ (§ 2, 5).
$P\omega A'C$, also $B'\omega A'$	$R\omega A'C$, also $B\omega C$
und $P\omega C$, also $P\omega OC$,	und $R\omega A'$, also $B'\omega A'$.
also $P\omega B$, also $B\omega C$.	

In beiden Fällen sind alle Voraussetzungen des engeren Satzes erfüllt; es ist also ungereimt, daß R außerhalb PQ liegt; R liegt also auf PQ (§ 4, **6**).

2. *Der Satz von Pascal in der analytischen Geometrie.*

Vahlen hat allgemein bewiesen, daß in einer Koordinatengeometrie der Satz von Pascal äquivalent ist mit der kommutativen Eigenschaft der Multiplikation („Abstrakte Geometrie" II, Art. **83**, **101**). Der folgende Beweis verläuft etwas einfacher und ist eine Anwendung unserer Designantentheorie.

Es seien zwei voneinander entfernte Gerade durch O gegeben und auf jeder von diesen drei voneinander und von O entfernte Punkte A, B, C bzw. A_1, B_1, C_1. Nach § 13, 4 gibt es ein Koordinatensystem, wofür die Koordinaten dieser Punkte die folgenden sind:

$$O\,(1, 0, 0);\quad A\,(1, 0, 1);\quad B\,(1, 0, p);\quad C\,(0, 0, 1);$$
$$A_1\,(0, 1, 0);\quad B_1\,(1, 1, 0);\quad C_1\,(1, q, 0).\qquad (p, q \neq 0, 1).$$

Man findet dann für die Koordinaten der Schnittpunkte:

$$\begin{array}{llll} \text{von} & AB_1 & \text{mit } A_1B: & (1,\ 1-p,\ p), \\ \text{„} & AC_1 & \text{„ } A_1C: & (0,\ -q,\ 1), \\ \text{„} & BC_1 & \text{„ } B_1C: & (q,\ q,\ qp-p). \end{array}$$

Die Bedingung dafür, daß diese Punkte auf einer Geraden liegen, ist nach „Lin. Gleich." § 6, 2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1-p & p \\ 0 & -q & 1 \\ q & q & qp-p \end{vmatrix} = 0.$$

Wir multiplizieren die erste Reihe links mit q und die erste Kolonne rechts mit $\frac{1}{q}$ („Lin. Gleich." § 4, **1**, **2**).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & q-qp & qp \\ 0 & -q & 1 \\ 1 & q & qp-p \end{vmatrix}.$$

Wir subtrahieren die erste Reihe von der letzten („Lin. Gleich." § 4, 7).

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & q - qp & qp \\ 0 & -q & 1 \\ 0 & qp & -p \end{vmatrix}.$$

Hier subtrahieren wir die erste Kolonne, nach Multiplikation mit bzw. $(q - qp)$ und qp (links) von der zweiten und dritten Kolonne („Lin. Gleich." § 4, 7).

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 1 \\ 0 & qp & -p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -q & 1 \\ qp & -p \end{vmatrix} \quad (\text{„Lin. Gleich." § 3, (5)}).$$

$$= -p - qp\frac{1}{-q} = -(pq - qp)\frac{1}{q}.$$

Der Satz von Pascal ist also äquivalent mit $pq = qp$, wenn $p, q \neq 0, 1$. Für alle Werte von p, q folgt aber aus $pq - qp \neq 0$ sowohl $p \neq 0$ als $q \neq 0$, und, da $p(q-1) - (q-1)p \neq 0$, auch $q - 1 \neq 0$; ebenso $p - 1 \neq 0$. Wenn der Satz von Pascal gilt, ist also für alle Werte von p, q unmöglich, daß $pq \neq qp$, also $pq = qp$.

§ 15.

Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.

Wir wollen noch den Beweis von Schur (Grundlagen der Geometrie § 4, Nr. 17) einer Revision unterziehen. Zur Vereinfachung nehmen wir hier und da mehr als drei, aber höchstens fünf, voneinander entfernte Punkte auf einer Geraden an.

Hilfssatz 1. Eine Projektivität zweiter Stufe, zwischen zwei voneinander entfernten Geraden l_1 und l_3, welche entsteht, indem man die Punkte von l_1 aus S_1 auf l_2 und dann aus S_2 auf l_3 projiziert, ist eine Perspektivität (Projektivität erster Stufe), wenn l_2 durch den Schnittpunkt A von l_1 und l_3 geht.

Beweis. Nach Definition der Projektivität muß vorausgesetzt werden $l_1 \omega l_3$; $S_1 \omega l_1, l_2$; $S_2 \omega l_2, l_3$. Außerdem setzen wir vorläufig voraus $l_2 \omega l_1, l_3$; $S_1 \omega S_2$. Den Schnittpunkt von l_1 mit $S_1 S_2$ bezeichnen wir mit P. Sind B_1, C_1 Punkte von l_1, die voneinander und von A und P entfernt liegen, B_3, C_3 ihre Bilder auf l_3, so folgt unmittelbar aus dem ersten Satz von Desargues, daß $B_1 B_3$ und $C_1 C_3$ sich schneiden in S auf $S_1 S_2$; S liegt außerhalb l_1 und l_3. Nun gilt für jeden Punkt D_1 von l_1, der von A und P entfernt liegt, $D_1 \omega B_1$ oder $D_1 \omega C_1$, z. B. $D_1 \omega B_1$;

ist dann D_3 das Bild von D_1, so schneiden auch $B_1 B_3$ und $D_1 D_3$ sich auf $S_1 S_2$, also $D_1 D_3$ geht durch S. Es sei weiter E_1 ein Punkt von l_1, der nicht von P entfernt zu liegen braucht; E_3 sei sein Bild und E_4 seine Projektion aus S auf l_3. Aus $E_4 \omega E_3$ würde folgen $S_2 E_3 \omega S E_4$, also entweder $S_2 E_3 \omega S_1 S_2$ oder $S E_4 \omega S_1 S_2$; aus beiden folgt $E_1 \omega P$, also ein Widerspruch. Ist schließlich F_1 ein Punkt von l_1, der nicht von A entfernt zu liegen braucht, und bestimmen wir F_3 und F_4 wie oben E_3 und E_4, so würde aus $F_3 \omega F_4$ folgen $F_3 \omega A$ oder $F_4 \omega A$ und aus beiden einfach $F_1 \omega A$.

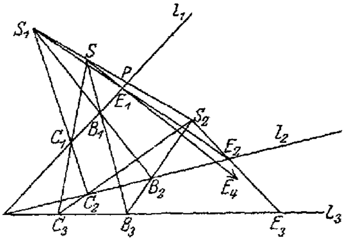

Fig. 15.

Wir lassen jetzt die Voraussetzungen $S_1 \omega S_2$ und $l_2 \omega l_1$ fallen. Wenn wir B_1 und C_1 auf l_1 so bestimmen, daß sie voneinander und von A entfernt liegen, und B_3, C_3 haben die obige Bedeutung, so treffen sich $B_1 B_3$ und $C_1 C_3$ in S außerhalb l_1 und l_3. D_1 sei ein Punkt von l_1, entfernt von A; D_3 und D_4 werden bestimmt wie oben. Nun ist entweder $l_2 \omega l_1$ oder $S_2 \omega l_1$ und entweder $S_2 \omega S_1$ oder $S_2 \omega l_1$; wir brauchen nur den Fall $S_2 \omega l_1$ noch zu betrachten. Aus $D_3 \omega D_4$ würde nun folgen $D_1 D_3 \omega D_1 D_4$, also $S_2 \omega D_1 D_3$ oder $S_2 \omega D_1 D_4$. Aus dem ersten folgt $D_2 \omega D_1$, also $l_2 \omega l_1$; aus dem zweiten $S_2 \omega S_1$, also $C_2 \omega C_1$, also wieder $l_2 \omega l_1$; auch liegt S_1 außerhalb $S_2 C_2$ oder $S_2 D_2$, also $S_2 \omega S_1$. Für den Fall $l_2 \omega l_1$, $S_2 \omega S_1$ ist aber schon $D_3 \sigma D_4$ bewiesen, so daß $D_3 \omega D_4$ zu einem Widerspruch führt.

Ein Punkt F_1, welcher nicht von A entfernt zu liegen braucht, wird behandelt wie oben.

Statt $l_2 \omega l_1$ kann man auch die Forderung $l_2 \omega l_3$ fallen lassen; das gibt einen analogen Beweis.

Hilfssatz 2. Für die Konstruktion einer Projektivität zweiter Stufe, wie im Hilfssatz 1 umschrieben, kann l_2 ersetzt werden durch jede Gerade l_2', von welcher der Schnittpunkt O von l_1 und l_3 entfernt ist und deren Schnittpunkt mit l_3 von dem Bild des Schnittpunktes mit l_1 entfernt liegt.

Beweis. l_2' treffe l_1 in E_1, l_3 in F_3. Außer den notwendigen Annahmen $l_1 \omega l_3$; $S_1 \omega l_1, l_2$; $S_2 \omega l_2, l_3$; $l_2' \omega O$; $F_3 \omega E_3$ setzen wir vorläufig noch voraus $l_2 \omega l_3$; $E_1 \omega D_1$, wo D_1 derjenige Punkt von l_1 ist, dessen Bild mit dem Schnittpunkt D_3 von l_2 mit l_3 zusammenfällt. Nun liegt E_1

außerhalb $S_1 D_1$, also $E_1 D_3 \omega S_1 D_1$ und $S_1 \omega D_3$, also S_1 liegt außerhalb $E_1 D_3$; die letztgenannte Gerade nennen wir l_4. Die Projektivität zwischen l_1 und l_3 entsteht nun auch so: man projiziere die Punkte von l_1 aus S_1 auf l_4; dann aus S_1 auf l_2; dann aus S_2 auf l_3. l_4, l_2, l_3 gehen durch einen Punkt und $l_4 \omega l_3$, also die Beziehung zwischen l_4 und l_3

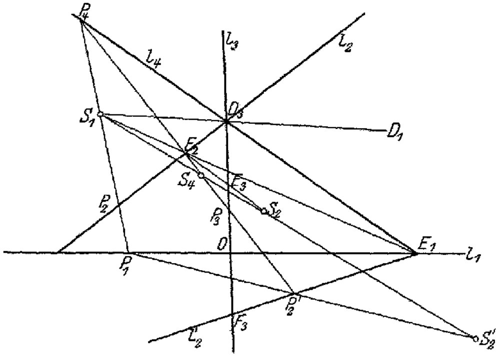

Fig. 16.

ist eine Perspektivität, deren Zentrum S_4 außerhalb l_4 und l_3 liegt (Hilfssatz 1). Da $E_1 E_3$ durch S_4 geht, folgt aus $E_3 \omega F_3$, daß $S_4 \omega l_2'$. Die Projektivität zwischen l_1 und l_3 entsteht nun auch so: man projiziere die Punkte von l_1 aus S_1 auf l_4, dann aus S_4 auf l_2', dann aus S_4 auf l_3. Dabei ist, wieder nach Hilfssatz 1, die Beziehung zwischen l_1 und l_2' eine Perspektivität, w. z. b. w.

Wir lassen nun die Annahme $E_1 \omega D_1$ fallen; dann wählen wir H_1 auf l_1 so, daß $H_1 \omega O, D_1, E_1$ und G_3 auf l_3 so, daß $G_3 \omega O, E_3, H_3$; dann können wir erst l_2 durch $H_1 G_3$ ersetzen und nachher (da $E_1 \omega H_1, G_1$) $H_1 G_3$ durch l_2'.

Wir müssen uns nur noch von der Voraussetzung $l_2 \omega l_3$ frei machen. Ist diese nicht erfüllt, so ist doch bekannt $l_2 \omega l_1$ und man kann, von F_3 statt von E_1 ausgehend, den Beweis in analoger Weise wie oben zu Ende führen.

Hilfssatz 3. Jede Projektivität dritter Stufe zwischen zwei voneinander entfernten Geraden derselben Ebene fällt mit einer Projektivität zweiter Stufe zusammen.

Beweis. Die Projektivität dritter Stufe entsteht, indem man die Punkte von l_1 nacheinander aus S_1 auf l_2, aus S_2 auf l_3, aus S_3 auf l_4

projiziert. $S_1 \omega l_1, l_2$; $S_2 \omega l_2, l_3$; $S_3 \omega l_3, l_4$; $l_1 \omega l_4$. Wir ziehen die Gerade l_5, von welcher S_1, l_3, l_4 entfernt sind, und projizieren die Punkte von l_1 erst aus S_1 auf l_5, dann aus S_1 auf l_2. Nach Hilfssatz 2 kann man für die Konstruktion der Beziehung zwischen l_5 und l_3, l_2 ersetzen durch eine Gerade l_6, von welcher l_5 und die Schnittpunkte von l_5 mit l_3 und l_4 entfernt sind. Die Punkte von l_1 werden also nacheinander auf l_5, l_6, l_3, l_4 projiziert. Nun ersetzen wir l_3 durch eine Gerade l_7, die durch den Schnittpunkt von l_5 und l_6 geht, aber von welcher die Schnittpunkte von l_1, l_5, l_6 mit l_4 entfernt liegen. Da nun l_5, l_6, l_7 durch einen Punkt gehen, ist die Beziehung zwischen l_5 und l_7 eine Perspektivität. Endlich ersetzen wir l_5 durch eine Gerade l_5', durch den Schnittpunkt von l_7 mit l_4; dann ist die Beziehung zwischen l_5' und l_4 eine Perspektivität; die Projektivität zwischen l_1 und l_4 also zweiter Stufe.

Hilfssatz 4. Jede Projektivität zwischen zwei voneinander entfernten Geraden derselben Ebene fällt mit einer Projektivität zweiter Stufe zusammen.

Beweis. Die Projektivität sei gegeben durch

$$l_1 \pi(S_1) l_2 \pi(S_2) l_3 \pi \ldots \pi(S_n) l_{n+1} \qquad (n > 3);\ l_{n+1} \omega l_1$$

(d. h. die Punkte von l_1 werden projiziert aus S_1 auf l_2 usw.). $l_3 \omega l_1$ oder $l_2 \omega l_{n+1}$; im letzten Fall ist $l_3 \omega l_2$ oder $l_3 \omega l_{n+1}$; so weitergehend erhält man immer $l_p \omega l_{p+1}$ $(p \leqq n)$. Nun besteht entweder l_{p-2} oder l_{p-3}; wir nehmen das erste an. $l_{p-2} \omega l_p$ oder $l_{p-2} \omega l_{p+1}$; nach Hilfssatz 3 kann im letzten Fall die Stufe der Projektivität um 1 herabgesetzt werden. Im ersten Fall muß untersucht werden, ob l_{p-3} oder l_{p+2} besteht. Besteht l_{p+2}, so ersetzen wir l_{p-1} nach Hilfssatz 2 durch eine von l_{p+2} entfernte Gerade. Besteht l_{p-3}, so unterscheiden wir, ob $l_{p-1} \omega l_{p+1}$ oder $l_{p-1} \omega l_p$. Im ersten Fall ersetzen wir l_p durch eine von l_{p-3} entfernte Gerade; im zweiten ist $l_{p-3} \omega l_{p-1}$ oder $l_{p-3} \omega l_p$. Im ersten dieser Fälle ersetzen wir l_{p-2} durch eine von l_{p+1} entfernte Gerade. Wir erhalten also jedenfalls eine Projektivität dritter Stufe zwischen zwei voneinander entfernten Geraden, die nach Hilfssatz 3 mit einer Projektivität zweiter Stufe zusammenfällt.

Hilfssatz 5. Eine Projektivität zwischen zwei voneinander entfernten Geraden ist eine Perspektivität, wenn der Schnittpunkt der Geraden mit seinem Bild zusammenfällt.

Beweis.[3] Nach Hilfssatz 4 fällt die Projektivität zusammen mit einer Projektivität zweiter Stufe, welche wir mit $l_1 \pi(S_1) l_2 \pi(S_2) l_3$ bezeichnen. Schur gibt zwei verschiedene Beweise, die gelten, der eine, wenn l_2 durch den Schnittpunkt von l_1 und l_3 geht, der andere, wenn dieser Punkt von l_3

entfernt ist. Nur im zweiten Fall wird der Pascalsche Satz gebraucht. Das alles bleibt auch für uns richtig; wegen der Zerlegung in zwei Fälle, von denen nicht immer einer erfüllt zu sein braucht, ist der Satz aber nicht allgemein bewiesen. Man kann aber immer den zweiten Fall erhalten, indem man nach Hilfssatz 2 l_2 ersetzt durch eine Gerade l_2', von welcher der Schnittpunkt A_1 von l_1 und l_3 entfernt ist und welche diese Geraden bzw. in P_2 und Q_2 trifft. Wir ändern die Bezeichnung so, daß die neue Entstehungsweise der Projektivität jetzt $l_1 \pi(S_1)\, l_2\, \pi(S_2)\, l_3$ heißt; insbesondere $A_1\, \pi(S_1)\, A_2\, \pi(S_2)\, A_3$. Läge nun S_2 außerhalb $S_1 A_1$, so folgte daraus einfach $A_1 \omega A_3$ gegen die Voraussetzung; S_2 liegt also auf $S_1 A_1$ (§ 4, 6). Aus $S_2 \omega l_3$ folgt nun $S_2 A_1 \omega l_3$, also $S_1 \omega l_3$; ebenso $S_2 \omega l_1$. Wir wählen nun B_1 auf l_1 so daß $B_1 \omega A_1$; $B_1\, \pi(S_1)\, B_2\, \pi(S_2)\, B_3$. Das Sechseck $A_1 P_2 S_2 B_2 S_1 Q_2$ erfüllt alle Voraussetzungen für den Satz von Pascal in seiner weiten Fassung (denn $A_1, S_1, S_2, B_2, P_2, Q_2 \omega A_2$; $A_1 \omega S_1, S_2$; $Q_2 \omega B_2, P_2$ oder $P_2 \omega B_2, Q_2$), also B_1 und B_3 liegen mit dem Schnittpunkt S von $S_1 Q_2$ und $S_2 P_2$ in einer Geraden. Da S nicht von der Wahl von B_1 abhängt, ist die Beziehung zwischen B_1 und B_3 eine Perspektivität.

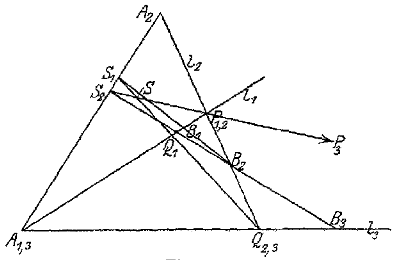

Fig. 17.

Ist C_1 ein Punkt von l_1, der nicht von A_1 entfernt zu liegen braucht, C_3 sein Bild wie B_3 von B_1, C_4 die Projektion von C_1 aus S auf l_3, so ist $C_3 \omega C_4$ ungereimt, da sowohl aus $C_3 \omega A_1$ als aus $C_4 \omega A_1$ folgen würde $C_1 \omega A_1$.

Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. Eine Projektivität zwischen zwei voneinander entfernten Geraden derselben Ebene ist eindeutig bestimmt durch die Bilder von drei voneinander entfernten Punkten.

Beweis. Die Bilder der voneinander entfernten Punkte A_1, B_1, C_1 auf l_1 seien A_3, B_3, C_3. Wenn A_1, C_1, B_3, C_3 vom Schnittpunkt O von l_1 und l_3 entfernt sind, gilt der Beweis von Schur. Es sei nämlich $l_2 = A_1 B_3$; S_1 der Schnittpunkt von $B_1 B_3$ und $C_1 C_3$; S_2 derjenige von $A_1 A_3$ und $C_1 C_3$; dann liegt O außerhalb l_2; $S_1 \omega l_1, l_2$; $S_2 \omega l_2, l_3$.

Die Beziehung $l_1\, \pi(S_1)\, l_2\, \pi(S_2)\, l_3$ ergibt für den Punkt P_1 von l_1: $P_1\, \pi(S_1)\, P_2\, \pi(S_2)\, P_3'$; die gegebene Projektivität führe P_1 in P_3 über.

Durch Projektion von A_3, B_3, C_3, P_3' aus S_2 auf l_2 erhält man A_2, B_2, C_2, P_2'. Die so entstandene Projektivität zwischen l_1 und l_2 fällt, da A_1 mit seinem Bild zusammenfällt, mit einer Perspektivität zusammen, d. h. P_2' liegt auf $S_1 P_1$ und fällt mit P_2 zusammen; dann aber auch P_3' mit P_3.

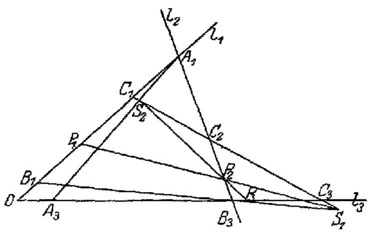

Fig. 18.

Durch Buchstabenwechsel kann man immer entweder obige Voraussetzung erfüllen oder $B_1, C_1, B_3, C_3 \,\omega\, O$. In diesem Fall wählen wir X auf l_1, so daß $X \omega A_1, B_1, C_1, O$ und Y auf l_3 unter den analogen Bedingungen; weiter F außerhalb l_1, l_3 und XY. Es seien nun zwei Projektivitäten gegeben, welche A_1, B_1, C_1, P_1 in A_3, B_3, C_3, P_3 bzw. A_3, B_3, C_3, P_3' überführen. Durch Projektion der Punkte von l_3 aus F auf XY ergänzt man diese zu Projektivitäten, welche A_1, B_1, C_1, P_1 in $A', B', C' P'$ bzw. A', B', C', P'' überführen. Da nun $B_1, C_1, A', C' \omega X$, sind die Voraussetzungen des vorigen Absatzes erfüllt, also $P' \sigma P''$, also $P_3 \sigma P_3'$.

Der entsprechende Satz für zwei Gerade, die nicht voneinander entfernt zu liegen brauchen, ist leicht zu folgern.

(Eingegangen am 15. 12. 1926.)