Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten. (Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung.)

Von

Kurt Friedrichs in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die folgende Arbeit behandelt die mathematischen Probleme, die aus der Frage nach dem Gleichgewicht und den Schwingungen einer elastischen Platte entstehen. Es handelt sich also letzten Endes um den Existenzbeweis für die Lösung von Randwertaufgaben und Eigenfunktionsproblemen, die zu einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung gehören.

Das Gleichgewichtsproblem der eingespannten Platte ist schon auf verschiedene Weisen behandelt worden[1]). Der einfachste und durchsichtigste Weg ist der, den W. Ritz eingeschlagen hat. Doch ist er noch stark an die spezielle Natur des Problems der eingespannten Platte gebunden; überdies enthält sein Beweis Lücken (vgl. S. 217 Anm. [21]) und S. 221 Anm. [25])).

Im folgenden wird zur Lösung der angegebenen Probleme auch auf die zugehörigen Variationsaufgaben zurückgegriffen. Dabei werden vor allem die direkten Methoden herangezogen, wie sie in letzter Zeit von R. Courant entwickelt wurden; in seinen Veröffentlichungen[2]) sind diese Methoden im wesentlichen nur für den Fall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung auseinandergesetzt. Die vorliegende Arbeit, die auf seine Anregung und im Zusammenwirken mit ihm entstanden ist, soll eine Ausführung dieser Ideen für den Fall einer Differentialgleichung vierter Ordnung geben.

Zuerst wird der Gleichgewichtszustand der eingespannten Platte behandelt. Dabei wird der Existenzbeweis im Gegensatz zu Ritz in der Weise durchgeführt, daß er sich fast unmittelbar auf den Fall der freien Platte im Gleichgewicht, das Eigenwertproblem der schwingenden Platte und noch einige weitere sich anschließende Probleme übertragen läßt. Die spezifischen Schwierigkeiten, die sich bei dieser Übertragung und überhaupt bei der Übertragung vom Fall der zweiten auf den Fall der vierten Ordnung zeigen, betreffen weniger die eigentliche Methode selbst, als hauptsächlich die geeignete Aufstellung und Ableitung gewisser Integralungleichungen, mit deren Hilfe die Abschätzungen und Konvergenzbetrachtungen durchgeführt werden müssen.

---

[1]) So durch sukzessive Näherungen von Zaremba, Bull. de l'Ac. des Sc. de Cracovie 1907, A. Korn, Ann. de l'École norm. **25** (1908), durch Zurückführung auf Integralgleichungen von A. Haar, Gött. Nachr. 1907; Lauricella, Rend. della R. Acc. dei Lincei 1907, Acta mathem. 1909 und mit Hilfe eines gleichwertigen Variationsproblemes von W. Ritz, Ges. Werke, Paris 1911, XV—XVII.

[2]) A. Über die Eigenwerte, Math. Zeitschr. **7** (1920); B. Über die Lösungen, Math. Ann. **85** (1922); C. Über ein konvergenzerzeugendes Prinzip, Gött. Nachr. (22. II 1923); D. Courant-Hilbert, Methoden der math. Physik (1924); E. Über direkte Methoden, Jahresb. d. deutsch. Math.-Vereinigung **34** (1925) und Math. Annalen **97** (1927); F. Über die Anwendung der Variationsrechnung, Acta math. **43** (1926). *Im folgenden stets mit* A, B, ..., F *zitiert.*

Im wesentlichen enthalten die folgenden Gedankengänge alles Material, was zur Lösung solcher definiten Variationsprobleme nötig ist, die in der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen quadratisch sind.

I. Die eingespannte Platte im Gleichgewicht.

1. Problemstellung[3]).

Ein ebener flacher Körper, der imstande ist, kleine Abweichungen von der Ruhelage zu erleiden, wird eine Platte genannt, wenn die potentielle Energie der Spannungen von den Krümmungen der durch die Durchbiegung entstandenen Fläche abhängt. Wir nehmen an, daß die Platte in der Ruhelage ein Gebiet G[4]) der (x, y)-Ebene bedeckt und denken uns die Durchbiegung durch eine Funktion $\varphi(x, y)$ dargestellt. Dann wird die potentielle Energie — abgesehen von einem Faktor, den wir gleich Eins setzen — durch das Integral

$$\frac{1}{2} J_\mu[\varphi] = \frac{1}{2} \iint_G \{\Delta\varphi^2 - 2(1-\mu)(\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)\}\, dx\, dy$$

über das Gebiet G geliefert; μ ist dabei die Querdehnungszahl.

Die eingespannte Platte, die wir zunächst behandeln, ist dadurch gekennzeichnet, daß an ihrem Rande die Werte der Durchbiegung und der normalen Ableitung der Durchbiegung vorgeschrieben sind.

Bezeichnet s die Bogenlänge des Randes Γ und φ_n die Ableitung der Funktion φ in Richtung der äußeren Normalen, so drücken sich diese Vorgaben durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \varphi = \bar{u}$$

$$(2) \qquad \varphi_n = \bar{u}_n$$

aus, wo $\bar{u} = \bar{u}(s)$ und $\bar{u}_n = \bar{u}_n(s)$ vorgegebene Werte auf dem Rande bedeuten. Da durch die Bedingung $\varphi = \bar{u}$ auch die tangentiale Ableitung der Funktion φ am Rande festgelegt ist, so sind durch die Gleichungen (1) und (2) die Werte der beiden Ableitungen φ_x und φ_y auf dem Rande bestimmt.

Eine äußere Kraft — etwa von der Dichte $f(x, y)$ —, die auf das Innere der Platte wirkt, muß im Gleichgewicht der Spannkraft, die durch die Durchbiegung entsteht, die Wage halten. Die Dichte der Spannkraft wird durch den Differentialausdruck vierter Ordnung

$$-\Delta\Delta\varphi$$

---

[3]) Vgl. zur Aufstellung des Problems: G. Kirchhoff, Über das Gleichgewicht und die Bewegungen einer elastischen Scheibe. Crelles Journ. **40** (1850), S. 51.

[4]) Die genaue Formulierung der Voraussetzungen s. S. 209.

dargestellt. Die Gleichgewichtsbedingung lautet also

$$\Delta\Delta\varphi - f = 0. \tag{3}$$

Die „Randwertaufgabe", eine Lösung $\varphi = u$ dieser Differentialgleichung zu finden, die den Randbedingungen (1) und (2) genügt, ersetzen wir durch die Forderung, die gesamte potentielle Energie zum Minimum zu machen. Diese Energie setzt sich aus der oben [S. 207] angegebenen Spannungsenergie $\frac{1}{2} J_\mu[\varphi]$ und der Energie der äußeren Kraft $-\iint\limits_G f\varphi\, dx\, dy$ zusammen.

Wir suchen also eine Funktion $\varphi = u$, die unter allen den Randbedingungen $\varphi = \bar{u}$ und $\varphi_n = \bar{u}_n$ genügenden Funktionen $\varphi(x, y)$ den „Variationsausdruck"

$$J_\mu[\varphi] - 2\iint\limits_G f\varphi\, dx\, dy$$

zum Minimum macht.

Die Erwartung, daß die Lösung des Variationsproblems auch die Lösung der Randwertaufgabe ist, rechtfertigt sich in bekannter Weise durch die Umformung der ersten Variation, die wir aber hier nicht anzugeben brauchen. (Vgl. dagegen S. 225, 226.) Daß die beiden Probleme wirklich gleichwertig sind, zeigt schließlich unser Existenzbeweis.

Wir bemerken, daß der Koeffizient μ des Variationsausdruckes nicht mehr in der Randwertaufgabe auftritt. In der Tat hängt auch das Variationsproblem nicht mehr von μ ab. Man erkennt das sofort, wenn man den zweiten Anteil des Integrals $J_\mu[\varphi]$ folgendermaßen durch partielle Integration umformt:

$$\begin{aligned} 2\iint \{\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2\}\, dx\, dy &= \int\limits_\Gamma \{\Delta\varphi\,\varphi_n - \varphi_{xn}\varphi_x - \varphi_{yn}\varphi_y\}\, ds \\ &= \int\limits_\Gamma (\varphi_x\varphi_{ys} - \varphi_{xs}\varphi_y)\, ds\, [5]. \end{aligned}$$

Denn offenbar hängt das letzte Randintegral nur von den Randwerten von φ_x und φ_y ab; es beeinflußt das Variationsproblem also gar nicht, da diese Randwerte vorgegeben sind. Infolgedessen genügt es, das Variationsproblem nur für irgendeinen beliebigen Wert von μ zu behandeln. Anstatt wie üblich das Integral

$$J_1[\varphi] = \iint\limits_G \Delta\varphi^2\, dx\, dy$$

zugrunde zu legen, wählen wir $\mu = 0$; denn es ist, wie sich später (vgl. z. B. S. 211 $(4)_1$) herausstellen wird, besonders günstig, das Integral

$$J_0[\varphi] = \iint\limits_G \{\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2\}\, dx\, dy$$

in der Hand zu haben.

[5]) Hierbei ist die Bogenlänge s im Sinne positiver Drehung wachsend gedacht.

Wir wollen nun die *Bedingungen* des Problems und die Natur der Vorgaben im einzelnen formulieren.

Der Rand Γ des einfach zusammenhängenden Gebietes G soll aus endlich vielen Kurven bestehen, die mit Einschluß ihrer Enden stetige Tangenten und stetige Krümmung besitzen [6]; Spitzen sollen ausgeschlossen sein.

Die zum Wettbewerb beim Variationsproblem zugelassene Funktion $\varphi(x, y)$ soll mit Einschluß des Randes Γ stetig sein; von den ersten Ableitungen verlangen wir die Stetigkeit nur im Innern des Gebietes, während die Stetigkeit der zweiten Ableitungen außer am Rande noch in einem Punkte des Innern unterbrochen sein darf [7].

Daß wir über das Verhalten der Ableitungen der Funktion $\varphi(x, y)$ *am Rande* nichts vorausgesetzt haben, hat seinen Grund darin, daß unser Existenzbeweis die Differenzierbarkeit der Lösung nur im Innern des Gebietes G zu beweisen gestattet. Allerdings können wir die Existenz der ersten Ableitungen der Lösung am Rande i. a. doch noch beweisen; wir benötigen dazu aber eine auf den Fall der eingespannten Platte zugeschnittene Sonderbetrachtung, von der wir uns im Prinzip unabhängig machen wollen (vgl. S. 220). Es entsteht natürlich nun die Notwendigkeit, ausdrücklich festzusetzen, was unter dem Integral $J_\mu[\varphi]$ zu verstehen ist und in welcher Weise die Randbedingungen aufzufassen sind.

Der Ausdrück

$$J_0[\varphi] = \iint\limits_G (\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)\, dx\, dy$$

z. B. soll der Grenzwert dieses Integrals über Teilgebiete sein, wenn diese irgendwie in das ganze Gebiet G übergehen. Für unsere Funktion $\varphi(x, y)$ haben wir also noch die Existenz dieses uneigentlichen Integrals zu verlangen [8]. Außerdem verlangen wir noch die Existenz des uneigentlichen Integrals $D_G[\varphi] = \iint\limits_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$. [9]

Die vorgegebenen Randwerte $\bar{u}$, $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$ seien durch eine Funktion $\bar{u}(x, y)$ bestimmt, die den für die Funktion $\varphi(x, y)$ gestellten Bedingungen genügt. Um für die Randbedingungen $\varphi_x = \bar{u}_x$, $\varphi_y = \bar{u}_y$ eine

[6] Auch ohne die Existenz der Krümmung vorauszusetzen, läßt sich der folgende Existenzbeweis ohne große Änderungen durchführen.

[7] Dieser Punkt darf für jede Funktion ein anderer sein. Man käme übrigens auch noch mit schwächeren Stetigkeitsbedingungen für die zweiten Ableitungen aus.

[8] Übrigens läßt sich schon allein aus der Existenz von $J_{0_G}[\varphi]$ ableiten, daß die Funktion $\varphi(x, y)$ am Rande Γ endliche stetige Werte annimmt und zwar durch ähnliche Betrachtungen, wie sie auf S. 214 angestellt werden.

[9] Die Existenz dieses Integrals ließe sich übrigens — bei unseren Voraussetzungen über den Rand — aus der Existenz des Integrals $J_0[\varphi]$ folgern. Vgl. die Anmerkung [15]) S. 213.

Formulierung zu finden, in der die Existenz der ersten Ableitungen am Rande Γ nicht vorausgesetzt wird, denken wir uns den Rand Γ von innen her durch die Schar der Näherungskurven Γ_h approximiert, die von Γ überall den Abstand h besitzen [10]).

Die Randbedingungen $\varphi_x = \bar{u}_x$, $\varphi_y = \bar{u}_y$ ersetzen wir dann durch die Forderungen:

(4a) $$\lim_{h=0} \int_{\Gamma_h} (\varphi_x - \bar{u}_x)^2 ds = 0, \quad \lim_{h=0} \int_{\Gamma_h} (\varphi_y - \bar{u}_y)^2 ds = 0.$$

Wir wollen derartige Grenzwerte von Integralen über die Näherungskurven Γ_h einfach als Integrale über den Rand schreiben, so daß sich die Bedingungen (4a) auch in der Form:

(4b) $$\int_{\Gamma} (\varphi_x - \bar{u}_x)^2 ds = 0, \quad \int_{\Gamma} (\varphi_y - \bar{u}_y)^2 ds = 0$$

darstellen [11]).

Übrigens wird eine schon oben angekündigte Sonderbetrachtung (S. 220) zeigen, daß die Lösung des Problems der eingespannten Platte zugleich mit der Funktion $\bar{u}(x, y)$ am Rande stetige erste Ableitungen besitzt und daß daher die Randbedingungen $\varphi_x = \bar{u}_x$ und $\varphi_y = \bar{u}_y$ doch in „strenger Form“ erfüllt sind.

Schließlich verlangen wir noch von der Funktion $f(x, y)$, daß sie im Innern des Gebietes G mit ersten Ableitungen stetig ist, während die (eventuell uneigentlichen) Integrale $\iint_G f^2\, dx\, dy$ und $\iint_G f\bar{u}\, dx\, dy$ existieren sollen.

2. Durchführung des Existenzbeweises.

1. Definitheit des Problems.

Wir wenden uns nun der Durchführung des Existenzbeweises zu. Es soll also der Ausdruck

$$\iint_G (\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)\, dx\, dy - 2 \iint_G f\varphi\, dx\, dy$$

bei den Randbedingungen

(1) $$\varphi = \bar{u}$$

(4) $$\int_{\Gamma} (\varphi_x - \bar{u}_x)^2 ds = 0, \quad \int_{\Gamma} (\varphi_y - \bar{u}_y)^2 ds = 0$$

---

[10]) Diese Erklärung setzt voraus, daß der Rand keine Ecken besitzt. Es ist naheliegend, wie man in der Nähe von Ecken die Näherungskurven bestimmen wird; wir verzichten darauf, es auseinanderzusetzen.

[11]) An Stelle dieser beiden Bedingungen würde es genügen, allein die Bedingung $\int_{\Gamma} (\varphi_n - \bar{u}_n)^2 ds = 0$ zu stellen, da sich die andere $\int_{\Gamma} (\varphi_t - \bar{u}_t)^2 ds = 0$ schon aus der Bedingung $\varphi = \bar{u}$ ableiten läßt — jedenfalls wenn der Rand keine Ecken besitzt.

zum Minimum gemacht werden. Dies Variationsproblem hat einen Sinn, weil es sicher eine zugelassene Funktion gibt, z. B. $\bar{u}(x, y)$ (s. S. 209), und ferner, weil der Variationsausdruck nach unten beschränkt ist. Das Integral $\iint\limits_G f\varphi\,dx\,dy$ kann nämlich nur von geringerer Größenordnung unendlich werden, als $J_0[\varphi]$. Um das einzusehen[12]), zerlegen wir

$$\iint\limits_G f\varphi\,dx\,dy = \iint\limits_G f\bar{u}\,dx\,dy + \iint\limits_G f(\varphi - \bar{u})\,dx\,dy$$

und schätzen das letzte Integral durch

$$\left|\iint\limits_G f(\varphi - \bar{u})\,dx\,dy\right|^2 \leqq \iint\limits_G f^2\,dx\,dy \iint\limits_G (\varphi - \bar{u})^2\,dx\,dy$$

ab. Das Integral $\iint\limits_G (\varphi - \bar{u})^2\,dx\,dy$, das wir auch durch $H_G[\varphi - \bar{u}]$ abkürzen wollen, können wir nun, wie wir sogleich beweisen werden, folgendermaßen abschätzen:

$$(4)_1 \qquad H[\varphi - \bar{u}] \leqq c\,D[\varphi - \bar{u}] \leqq c^2 J_0[\varphi - \bar{u}],$$

wo c eine nur vom Gebiet abhängige positive Konstante ist.

Beachten wir nun noch die Ungleichung

$$\sqrt{J_0[\varphi - \bar{u}]} \leqq \sqrt{J_0[\varphi]} + \sqrt{J_0[\bar{u}]}$$

und fassen wir unsere Schlüsse zusammen, so erhalten wir

$$\left|\iint\limits_G f\varphi\,dx\,dy\right| \leqq c\sqrt{J_0[\varphi]}\sqrt{H[f]} + c\sqrt{J_0[\bar{u}]}\sqrt{H[f]} + \left|\iint\limits_G f\bar{u}\,dx\,dy\right|,$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

2. Die Integralungleichungen.

Die Abschätzungen $(4)_1$ folgen aus den Integralungleichungen

$$(5) \qquad H_G[\varphi] \leqq c\,D_G[\varphi] + c\int\limits_\Gamma \varphi^2\,ds$$

$$(6) \qquad D_G[\varphi] \leqq c\,J_{0G}[\varphi] + c\int\limits_\Gamma (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\,ds,$$

wo c eine geeignete positive nur vom Gebiet abhängige Konstante ist. Die zweite Ungleichung (6) folgt offenbar aus der ersten Ungleichung (5) durch Einsetzen der ersten Ableitungen von φ. Wenden wir die Ungleichungen auf die Funktion $\varphi - \bar{u}$ an, so verschwinden die Randintegrale wegen der Randbedingungen (1), (4) und es ergeben sich die oben benutzten Beziehungen $(4)_1$.

Um die Ungleichung (5) zu beweisen, nehmen wir zuerst an, daß die Funktion $\varphi(x, y)$ bis auf den Rand stetig ist und die ersten Ableitungen

[12]) Vgl. auch das kürzere, aber speziell auf den Fall der eingespannten Platte zugeschnittene Verfahren von W. Ritz, Ges. W. XV, S. 200.

stückweise stetig. Nun setzen wir[13]) $\varphi = f v$, wo die Funktion f noch geeignet zu bestimmen ist. Dann wird

$$\begin{aligned}\varphi_x^2 + \varphi_y^2 &= f^2(v_x^2 + v_y^2) + 2 f f_x v v_x + 2 f f_y v v_y + (f_x^2 + f_y^2) v^2 \\ &= f^2(v_x^2 + v_y^2) - f \Delta f v^2 + (f f_x v^2)_x + (f f_y v^2)_y,\end{aligned}$$

und nach Integration

$$\iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy = \iint_G f^2 (v_x^2 + v_y^2)\, dx\, dy - \iint_G \frac{\Delta f}{f} \varphi^2\, dx\, dy + \int_\Gamma \frac{f_n}{f} \varphi^2\, ds.$$

Wählen wir jetzt z. B. für f die erste Eigenfunktion der Membran, die in ein das ganze Gebiet G umschließendes Rechteck eingespannt ist, so wird, da f stets positiv ist, $-\frac{\Delta f}{f} = \lambda > 0$, während sicher $\left|\frac{f_n}{f}\right|$ kleiner als eine endliche Konstante a ist; und wir erhalten

$$\lambda \iint_G \varphi^2\, dx\, dy \leqq \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy + a \int_\Gamma \varphi^2\, ds.$$

Wir wollen noch einen anderen, weniger eleganten Beweis darstellen, weil er sich weiter verallgemeinern läßt[13a]) und weil wir eine ähnliche Betrachtung später noch einmal brauchen. Wir betrachten zunächst ein Gebiet T, das von je einem Stück etwa der Geraden $x = 0$ und $x = b$ und von zwei stetig gekrümmten Kurven T_1 und T_2 begrenzt wird, die sich für $0 \leqq x \leqq b$ durch Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ darstellen lassen und die voneinander höchstens den Abstand h haben. Wir stellen dann den Wert von φ in einem Punkte (x, y) durch

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, y_1) - \int_y^{y_1} \varphi_y\, dy$$

dar und erhalten nun nach Anwendung der Schwarzschen Ungleichung und nach zweimaliger Integration[14])

$$\iint_T \varphi^2\, dx\, dy \leqq 2h \int_{T_1} \varphi^2\, ds + 2h^2 \iint_T (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy. \tag{7}$$

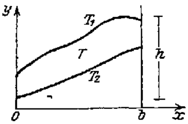

Fig. 1.

Das Gebiet G können wir nun nach unseren Voraussetzungen über den Rand in eine endliche Anzahl solcher Teilgebiete G zerlegen, so daß die Kurven T_0 stets Stücke des Randes Γ sind. Addieren wir sämtliche zugehörigen Ungleichungen (7), so erhalten wir, wenn d der größte Abstand zweier

[13]) Der folgende Beweis fällt im wesentlichen mit einer von Picard, Journ. de math. (4) 6 (1890), S. 151–153 zu einem ähnlichen Zwecke angestellten Betrachtung zusammen.

[13a]) Aus dem Gang des Beweises folgt, daß die Ungleichung (5) auch gilt, wenn das Randintegral nur über einen Teil von Γ erstreckt wird.

[14]) Vgl. zu diesen Betrachtungen A. S. 14.

Randpunkte von Γ ist, in

$$\iint_G \varphi^2\, dx\, dy \leqq 2d \int_\Gamma \varphi^2\, ds + 2d^2 \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$$

die gesuchte Ungleichung (5).

Von der Forderung der Existenz der Funktion φ und ihrer Ableitungen auf dem Rande befreien wir uns sofort, wenn wir die bewiesene Ungleichung auf die Teilgebiete von G anwenden, die von den Näherungskurven Γ_h begrenzt werden, und den Grenzübergang[15]) vollziehen. Wir sind dann sicher, daß die Ungleichungen (5) und (6) für die Funktionen φ mit den von uns geforderten Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen gelten; wir müssen nur noch die Existenz der beiden auftretenden Randintegrale fordern.

3. Die Konvergenz der Minimalfolge.

Nach dieser Einschaltung über die Integralungleichungen wenden wir uns wieder der Durchführung unseres Existenzbeweises zu.

Der Variationsausdruck hat also eine untere Grenze d; da es wenigstens eine zugelassene Funktion φ gibt, so gibt es auch eine Folge von zugelassenen Funktionen u_i, für die der Variationsausdruck gegen die untere Grenze d geht:

$$J_0[u_i] - 2\iint_G f u_i\, dx\, dy \to d.$$

Aus einer solchen „Minimalfolge" u_i werden wir durch Grenzübergang die Lösung erzeugen.

Ist $\zeta(x, y)$ eine Funktion, die sich als Differenz zweier zugelassener Funktionen auffassen läßt (die also insbesondere auf dem Rande Γ mit ersten Ableitungen verschwindet), und ist ζ_i eine Folge solcher Funktionen, für die $J_0[\zeta_i]$ und $\iint_G f\zeta_i\, dx\, dy$ beschränkt bleiben, so gilt, wie man in bekannter Weise[16]) schließt, für die Minimalfolge u_i die Grenzgleichung:

$$(8) \qquad J_0[u_i, \zeta_i] - \iint_G f\zeta_i\, dx\, dy \to 0 \text{ [16a])} \qquad (i \to \infty),$$

die zum Ausdruck bringt, daß für die Funktionen der Minimalfolge die erste Variation in der Grenze verschwindet; sie bildet die Grundlage für alle weiteren Schlüsse.

---

[15]) Durch diesen Grenzübergang läßt sich auch vermittels (6) die Existenz von $D[\varphi - \bar{u}]$ und damit die von $D[\varphi]$ aus der von $J_0[\varphi - \bar{u}]$, d. h. aus der Existenz von $J_0[\varphi]$ folgern.

[16]) Vgl. C. S. 145.

[16a]) $J_0[\varphi, \psi]$ ist der Polarausdruck des in φ quadratischen Ausdruckes $J_\mu[\varphi]$.

Für die „willkürliche Funktion“ ζ_i machen wir nun verschiedene Einsetzungen.

Einmal setzen wir $\zeta_i = u_i - u_k$, wo k unabhängig von i gegen Unendlich geht. Vertauschen wir i und k und subtrahieren die beiden so entstehenden Grenzgleichungen, so erhalten wir:

$$J_0[u_i - u_k] \to 0 \qquad (i, k \to \infty). \tag{9}$$

Da offenbar die Funktion $u_i - u_k$ am Rande verschwindet und ebenso wegen (4) die Randintegrale

$$\int_\Gamma (u_{i_x} - u_{k_x})^2 ds, \qquad \int_\Gamma (u_{i_y} - u_{k_y})^2 ds,$$

so liefern die Integralungleichungen (5), (6) aus der Relation (9) sofort

$$D[u_i - u_k] \to 0, \qquad H[u_i - u_k] \to 0. \tag{10}$$ [17])

Die hier gewonnenen Grenzgleichungen gestatten es, in ein paar Schritten auf die Konvergenz der Minimalfolge zu schließen.

Zu dem Zweck [18]) stellen wir den Wert der Funktion $u_i - u_k = \zeta$, etwa im Punkte $x = 0$, $y = 0$, durch die Beziehung

$$\zeta(0,0) = \zeta(\bar{x}, 0) - \int_0^{\bar{x}} \zeta_x(x, 0)\, dx$$

dar, bestimmen nach dem Mittelwertsatz zu jeder Funktion ζ den Wert $\bar{x}$ als eine solche etwa zwischen 0 und a gelegene Zahl, daß

$$\zeta(\bar{x}, 0) = \frac{1}{a}\int_0^a \zeta(x, 0)\, dx$$

wird, so daß wir die Darstellung

$$\zeta(0,0) = \frac{1}{a}\int_0^a \zeta(x, 0)\, dx - \int_0^{\bar{x}} \zeta_x(x, 0)\, dx$$

erhalten, und wenden auf diesen Ausdruck dasselbe Verfahren in der y-Richtung an. Dann erhalten wir bei geeigneter Wahl der zwischen 0 und a gelegenen Zahl $\bar{y}$ die Darstellung

$$\zeta(0,0) = \frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^a \zeta\, dx\, dy - \frac{1}{a}\int_0^a\int_0^{\bar{x}} \zeta_x\, dx\, dy - \frac{1}{a}\int_0^{\bar{y}}\int_0^a \zeta_y\, dx\, dy + \int_0^{\bar{y}}\int_0^{\bar{x}} \zeta_{xy}\, dx\, dy.$$

[17]) Diese Grenzgleichungen besagen, daß die Minimalfolge mit ersten und zweiten Ableitungen asymptotisch eindimensional ist. Vgl. B. S. 290.

[18]) Das hier angewandte Verfahren gestattet die Erfassung der Randwerte, ohne zu benutzen, daß sie vorgegeben sind; infolgedessen läßt es sich ohne weiteres z. B. auf den Fall der freien Platte übertragen.

Eine solche Darstellung des Wertes von ζ in der Ecke eines Quadrates durch Integrale von ζ und seinen ersten und zweiten Ableitungen, die über dies Quadrat erstreckt sind, gilt offenbar für jeden Punkt des Gebietes G, auch für Randpunkte[19]); und wir erhalten somit, bei einmal hinreichend klein gewähltem a, die für alle Punkte von G und Γ gültige Abschätzung

$$|\zeta| \leqq \frac{1}{a}\sqrt{H_G[\zeta]} + \sqrt{D_G[\zeta]} + a\sqrt{J_0[\zeta]}.$$

Da nun die hier auftretenden Integrale in der Grenze $(i, k \to \infty)$ verschwinden (vgl. (9), (10)), so folgt, daß $\zeta = u_i - u_k$ in G gleichmäßig gegen Null geht, wenn i und k unbeschränkt wachsen. Das aber besagt, daß die Minimalfolge u_i in G gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion u konvergiert, die in G einschließlich des Randes Γ stetig ist.

Es kommt nun darauf an, nachzuweisen, daß die Grenzfunktion u die gesuchte Lösung des Variationsproblems ist. Zuerst zeigen wir, daß die Funktion u Ableitungen besitzt und der Differentialgleichung genügt; und dann weisen wir nach, daß der Variationsausdruck existiert und der unteren Grenze d gleich ist, und endlich, daß die Randbedingungen erfüllt sind.

4. Die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion[20]).

Um die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion u zu zeigen, ziehen wir wieder die Grenzgleichung

$$(8) \qquad J_0[u_i, \zeta_i] - \iint_G f\zeta_i \, dx\, dy \to 0 \qquad (i \to \infty)$$

heran; für ζ_i setzen wir eine Funktion ζ, die innerhalb eines Kreises K mit ersten und zweiten Ableitungen stetig ist, stetiges $\Delta\zeta_x\, \Delta\zeta_y\, \Delta\Delta\zeta$ besitzt und die ferner außerhalb des Kreises K im Innern von G verschwindet. Formen wir nun das Integral $J_0[u_i, \zeta]$ durch Teilintegration um, so bleibt, da die Randglieder wegfallen und da das Äußere des Kreises auch keinen Beitrag liefert:

$$\iint_K u_i \Delta\Delta\zeta \, dx\, dy - \iint_K f\zeta \, dx\, dy \to 0 \qquad (i \to \infty).$$

Nun kann man, weil u_i im Kreise gleichmäßig konvergiert, den Grenzübergang vollziehen, und man erhält die Gleichung:

$$\iint_K u \Delta\Delta\zeta \, dx\, dy - \iint_K f\zeta \, dx\, dy = 0.$$

---

[19]) Man lege das Quadrat so, daß nur eine Ecke auf dem Rande liegt, und ersetze es nötigenfalls durch ein Parallelogramm.

[20]) Vgl. zu der Schlußweise E. S. 106.

Für ζ soll aber eine Funktion eingesetzt werden, die im Mittelpunkt (x_0, y_0) des Kreises K die zum Differentialausdruck $\Delta\Delta\varphi$ gehörige Singularität besitzt, also dieselbe Singularität wie

$$-\frac{1}{8\pi}r^2\lg r, \qquad \text{wo} \quad r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \quad \text{bedeutet.}$$

Das ist erlaubt; denn ζ bleibt dabei mit ersten Ableitungen stetig, während die zweiten Ableitungen nur an einer Stelle unstetig werden und doch quadratisch integrierbar sind.

Man erhält eine solche Funktion ζ, wenn man

$$\zeta = \Phi(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{8\pi}r^2\lg r \frac{\int\limits_r^R \varrho^8(R-\varrho)^8 d\varrho}{\int\limits_0^R \varrho^8(R-\varrho)^8 d\varrho}$$

setzt. Der Faktor von $r^2\lg r$ bewirkt, daß $\Phi(x, y; x_0, y_0)$ mit seinen Ableitungen bis zur vierten Ordnung am Kreisrande $r = R$ zu Null wird und doch bei $r = 0$ die vorgeschriebene Singularität behält, und daß der Ausdruck $\Delta\Delta\Phi$ bei $r = 0$ und $r = R$ stetig ist, und zwar mit allen Ableitungen bis zur vierten Ordnung.

Setzt man nun die Funktion Φ für ζ ein, so wird nach der partiellen Integration wegen der Singularität noch ein Glied $u_i(x_0, y_0)$ auftreten, so daß man nach dem Grenzübergang

$$\iint\limits_K u\,\Delta\Delta\,\Phi\,dx\,dy - \iint\limits_K f\,\Phi\,dx\,dy + u(x_0, y_0) = 0$$

erhält. Das ist eine Integraldarstellung der Grenzfunktion u. Aus ihr erkennen wir, daß u zweimal stetig differenzierbar ist und stetiges Δu_x, Δu_y und $\Delta\Delta u$ besitzt. Denn der erste Anteil $\iint\limits_K u\Delta\Delta\,\Phi\,dx\,dy$ ist sicher viermal nach x_0, y_0 differenzierbar, und $\iint\limits_K f\,\Phi\,dx\,dy$ sicher zweimal. Der singuläre Bestandteil von $\Delta\iint\limits_K f\,\Phi\,dx\,dy$: $-\frac{1}{\pi}\iint\limits_K f\lg r\,dx\,dy$ läßt aber einmalige Differentiation und die Δ-Operation zu, wie man aus der Potentialtheorie weiß.

Aus der Formel

$$\iint\limits_K u\,\Delta\Delta\,\zeta\,dx\,dy - \iint\limits_K f\zeta\,dx\,dy = 0,$$

wo ζ wieder stetige zweite Ableitungen und stetiges $\Delta\zeta_x$, $\Delta\zeta_y$, $\Delta\Delta\zeta$ besitzt, schaffen wir durch partielle Integration die Ableitungen von ζ heraus und erhalten

$$\iint\limits_K (\Delta\Delta\,u - f)\,\zeta\,dx\,dy = 0,$$

woraus wir wegen der Willkürlichkeit von ζ schließen, daß die Funktion u im Innern von G überall der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u - f = 0 \tag{2}$$

genügt.

5. Die Existenz und Konvergenz der Integrale und die Randbedingungen.

Aus der Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Minimalfolge u_i ergibt sich unmittelbar, daß die Grenzfunktion die erste Randbedingung $u = \bar{u}$ erfüllt, und daß das Integral $\iint_G f u_i \, dx \, dy$ gegen das Integral $\iint_G f u \, dx \, dy$ konvergiert.

Um die Erfüllung der zweiten Randbedingung und die Existenz des Integrals $J_{0_G}[u]$ nachzuweisen[21]), bemerken wir, daß für die ersten Ableitungen der Minimalfolge, die im allgemeinen nicht konvergieren werden, doch die Grenzgleichung

$$D_{G^*}[u_i - u] \to 0 \tag{11}$$

besteht, die für alle im Innern von G gelegene Teilgebiete G^* eine mittlere Konvergenz ausdrückt. Um sie zu beweisen, ziehen wir die Umformung

$$D_{G^*}[u_i - u] = -\iint_{G^*} (\Delta u_i - \Delta u)(u_i - u) \, dx \, dy - \int_{\Gamma^*} (u_{i_n} - u_n)(u_i - u) \, ds \tag{12}$$

heran, wo Γ^* der Rand von G^* sein soll. Da die Folge u_i gleichmäßig gen u konvergiert, wird auch $D_{G^*}[u_i - u]$ gegen Null gehen, sobald die Integrale $\iint_{G^*} \Delta u_i^2 \, dy$ und $\int_{\Gamma^*} u_{i_n}^2 \, ds$ beschränkt bleiben. Die Beschränktheit von $\iint_{G^*} \Delta u_i^2 \, dx \, dy$ folgt sofort aus der von $J_0[u_i]$. Um die Beschränktheit des zweiten Integrals $\int_{\Gamma^*} u_{i_n}^2 \, ds$ nachzuweisen, ist es notwendig, eine — auch später immer wieder zu benutzende — Integralungleichung heranzuziehen, die es erlaubt, das Verhalten von Integralen über eine Kurve aus dem Verhalten von Integralen über benachbarte Gebiete zu erschließen.

Diese Ungleichung lautet:

$$\int_\Gamma \varphi^2 \, ds \leqq c \sqrt{D_G[\varphi]} \sqrt{H_G[\varphi]} + c \sqrt{H_G[\varphi]}, \tag{13}$$

wo φ eine stetige mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion ist, und wo c eine geeignete nur vom Gebiet abhängige Kon-

[21]) Dieser Nachweis fehlt bei W. Ritz. Aus der Existenz der zweiten Ableitungen im Innern von G folgt die Existenz des Integrals $J_0[u]$ unmittelbar nur, wenn das Integrationsgebiet ganz im Innern von G liegt.

stante ist. Die Ungleichung gilt auch mit ein und derselben — nur vom Gebiet abhängigen — Konstanten c, wenn das Integral $\int \varphi^2 ds$ über alle Näherungskurven Γ_h einer Umgebung des Randes Γ erstreckt wird[22]).

Durch Anwendung dieser Ungleichung auf die ersten Ableitungen der Funktion $u_i - \bar{u}$ für ein Teilgebiet G^* und seinen Rand Γ^*, der von derselben Natur ist wie Γ, erhält man

$$\int_{\Gamma^*} (u_{i_n} - \bar{u}_n)^2 ds \leqq c \sqrt{J_{0_{G^*}}[u_i - \bar{u}]}\sqrt{D_{G^*}[u_i - \bar{u}]} + c\, D_{G^*}[u_i - \bar{u}].$$

Da die hier auftretenden Integrale über G^* nach dem oben ((4)$_1$ S. 211) Bewiesenen beschränkt bleiben, gilt dasselbe von $\int_{\Gamma^*} (u_{i_n} - \bar{u}_n)^2 ds$ und daraus ergibt sich dann die Beschränktheit des Integrals $\int_{\Gamma^*} u_{i_n}^2 ds$, die gebraucht wurde, um die Konvergenz

$$(11) \qquad D_{G^*}[u_i - u] \to 0 \qquad (i \to \infty)$$

nachzuweisen.

Aus dieser Grenzgleichung können wir sofort auf die Existenz des über das *ganze* Gebiet G erstreckten Integrals $D_G[u]$ schließen. Es ist offenbar

$$\sqrt{D_{G^*}[u - \bar{u}]} \leqq \sqrt{D_G[u_i - \bar{u}]} + \sqrt{D_{G^*}[u - u_i]}.$$

Der Limes superior der Integrale $D_G[u_i - \bar{u}]$, der offenbar existiert — man schätze nach (6) ab —, ist also eine obere Schranke für die Integrale $D_{G^*}[u - \bar{u}]$ über alle Teilgebiete G^*. Es existiert also das Integral $D_G[u - \bar{u}]$ und damit wegen $\sqrt{D_{G^*}[u]} \leqq \sqrt{D_G[\bar{u}]} + \sqrt{D_G[u - \bar{u}]}$ auch das Integral $D_G[u]$.

Aus der Konvergenz (11) des Gebietsintegrals können wir sofort auf die entsprechende Konvergenz des Kurvenintegrals

$$(14) \qquad \int_{\Gamma^*} \{(u_x - u_{i_x})^2 + (u_y - u_{i_y})^2\} ds \to 0$$

schließen, indem wir dies Integral nach der soeben angegebenen Ungleichung (13) durch

$$c \sqrt{J_{G^*}[u - u_i]}\sqrt{D_{G^*}[u - u_i]} + c\, D_{G^*}[u - u_i]$$

abschätzen und die Beschränktheit des Integrals $J_{G^*}[u - u_i]$ beachten.

Auf Grund der in den Grenzgleichungen (11) und (14) ausgedrückten mittleren Konvergenz der ersten Ableitungen der Minimalfolge können wir nun zeigen, daß das Integral $J_{0_G}[u]$ für die Grenzfunktion existiert und nicht größer ist, als die untere Grenze der Integrale $J_{0_G}[u_i]$ der

[22]) Vgl. zum Beweise A. S. 13—16.

Minimalfolge[23]). „Entwickeln" wir nämlich das Integral $J_0[u_i]$ in der Umgebung der Grenzfunktion u durch die Gleichung

$$J_0[u_i] = J_0[u] + 2J_0[u_i, u_i - u] + J_0[u_i - u],$$

so erkennen wir, daß wir nur noch zeigen müssen, daß das gemischte Glied gegen Null geht, um

$$\underline{\lim}\, J_0[u_i] \geqq J_0[u]$$

schließen zu können. Wir wollen zunächts die J-Integrale nur über ein Teilgebiet G^* mit dem Rand Γ^* erstrecken. Das gemischte Glied formen wir durch einmalige Teilintegration um:

$$J_{0_{G^*}}[u, u_i - u]$$
$$= -D_{G^*}[\varDelta u, u_i - u] + \int_{\Gamma^*} \{u_{xn}(u_i - u)_x + u_{yn}(u_i - u)_y\}\, ds.$$

Wenden wir auf diesen Ausdruck die Schwarzsche Ungleichung an, und beachten die oben bewiesenen Grenzgleichungen (11) und (14), so erkennen wir, daß in der Tat die Konvergenz

$$J_{0_{G^*}}[u, u_i - u] \to 0$$

besteht, so daß also die Ungleichung

$$\underline{\lim}\, J_{0_{G^*}}[u_i] \geqq J_{0_{G^*}}[u],$$

aus der wir erkennen, daß $\underline{\lim}\, J_{0_G}[u_i]$ eine obere Schranke der über alle Teilgebiete G^* erstreckten Integrale $J_{0_{G^*}}[u]$ ist; es existiert also das über das ganze Gebiet G erstreckte Integral $J_{0_G}[u]$ und es ist

$$\underline{\lim}\, J_{0_G}[u_i] \geqq J_{0_G}[u]. \tag{15}$$

Nun müssen wir noch nachweisen, daß auch die zweite Randbedingung $\int_\Gamma \{(u_x - \bar{u}_x)^2 + (u_y - \bar{u}_y)^2\}\, ds = 0$ erfüllt ist. Zu dem Zweck zeigen wir, daß die oben bewiesene Konvergenz $D_{G^*}[u - u_i] \to 0$ hinsichtlich etwa aller Teilgebiete $G^* = G_h$, die von Näherungskurven $\Gamma^* = \Gamma_h$ mit dem Abstand h vom Rande Γ umschlossen werden, gleichmäßig ist, so daß also die Grenzgleichung

$$D_G[u - u_i] \to 0$$

auch für das ganze Gebiet G besteht[24]).

[23]) Der folgende Beweis dieser Tatsache ist im Grunde ein Beweis für die Halbstetigkeit des Integrals $J_0[\varphi]$ in der Umgebung jeder mit ersten und zweiten Ableitungen stetigen Funktion φ, für die noch stückweise stetige $\varDelta\varphi_x$, $\varDelta\varphi_y$ existieren. Vgl. auch zu der Schlußweise L. Tonelli, Fondamenti di calcolo delle variazioni, Kap. XI, S. 383.

[24]) Diese Grenzgleichung hätten wir auch unmittelbar aus (11) schließen können. Vgl. B. S. 316, 317.

Wir entnehmen diese Gleichmäßigkeit aus der Umformung (12), wobei wir nur noch zu bemerken haben, daß auf Grund der Existenz des Integrals $J_{0_G}[u]$ das Integral $\iint\limits_{G_h} (\Delta u - \Delta u_i)^2\, dx\, dy$ gleichmäßig für alle Teilgebiete beschränkt ist und ebenso $\int\limits_{\Gamma_h} (u_n - u_{i_n})^2\, ds$, wie wir unter Beachtung des Zusatzes zur Ungleichung (13) erkennen.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Gebietsintegrale $D_{G_h}[u - u_i]$ gegen Null ergibt sich, wiederum aus der Ungleichung (13) und ihrem Zusatze, die Gleichmäßigkeit der Konvergenz des Kurvenintegrals

$$\int\limits_{\Gamma_h} \left\{ (u_x - u_{i_x})^2 + (u_y - u_{i_y})^2 \right\} ds \to 0 \qquad (i \to \infty)$$

für alle Näherungskurven Γ_h einer Umgebung von Γ. Diese Tatsache läßt uns aber fast unmittelbar erkennen, daß das Integral

$$\int\limits_{\Gamma_h} \left\{ (u_{i_x} - \bar{u}_x)^2 + (u_{i_y} - \bar{u}_y)^2 \right\} ds$$

gleichmäßig hinsichtlich h gegen das Integral

$$\int\limits_{\Gamma_h} \left\{ (u_x - \bar{u}_x)^2 + (u_y - \bar{u}_y)^2 \right\} ds$$

konvergiert, woraus wir wegen $\int\limits_{\Gamma} \left\{ (u_{i_x} - \bar{u}_x)^2 + (u_{i_y} - \bar{u}_y)^2 \right\} ds = 0$ sofort die Gleichung

$$(16) \qquad \int\limits_{\Gamma} \left\{ (u_x - \bar{u}_x)^2 + (u_y - \bar{u}_y)^2 \right\} ds = 0,$$

d. h. die Erfüllung der zweiten Randbedingung, entnehmen.

Die bisherigen Entwicklungen lehren, daß die Grenzfunktion u alle Zulassungsbedingungen erfüllt; ferner folgt aus ihnen (vgl. S. 217 und (15)), daß

$$\lim_{i \to \infty} \left(J_0[u_i] - 2 \iint\limits_G f u_i\, dx\, dy \right) = d \geqq J_0[u] - 2 \iint\limits_G f u\, dx\, dy$$

ist; d. h. die Funktion u macht den Variationsausdruck nicht größer als die untere Grenze; als zugelassene Funktion kann sie ihn aber auch nicht kleiner machen. Kurz, die Grenzfunktion u macht den Variationsausdruck gerade zum Minimum und ist somit die — offenbar einzige — Lösung des gestellten Variationsproblems. Daß sie auch die Lösung der entsprechenden Randwertaufgabe ist, ist schon dadurch gezeigt, daß sie die Differentialgleichung $\Delta\Delta u - f = 0$ und die Randbedingungen erfüllt.

3. Die strenge Erfüllung der Randbedingungen.

Der Existenzbeweis für die Lösung des Variationsproblems ist hiermit abgeschlossen. Wir zeigen nun noch, daß die zweite Randbedingung

$$\int\limits_{\Gamma} \left\{ (u_x - \bar{u}_x)^2 + (u_y - \bar{u}_y)^2 \right\} ds = 0$$

auch in der strengen Form

$$u_x - \overline{u}_x = 0, \quad u_y - \overline{u}_y = 0$$

erfüllt ist[25]). Genauer: Bei der Annäherung an einen Randpunkt P_0 gilt $u_x - \overline{u}_x \to 0$; $u_y - \overline{u}_y \to 0$, entweder, wenn $\Delta \overline{u}_x$, $\Delta \overline{u}_y$, $\Delta\Delta \overline{u}$ im Innern von G und $\int\limits_G \Delta\Delta \overline{u}^2 dy$ existieren, oder wenn die Funktionen $\overline{u}_x$, $\overline{u}_y$ in der Umgebung von P_0 stetige Randwerte besitzen.

Zum Beweise[26]) betrachten wir einen Punkt P_h, der zwischen den beiden Näherungskurven Γ_h und Γ_{2h} liegt, und schlagen um ihn die Kreise $K_{\frac{1}{2}h}$ und K_h mit den Radien $\frac{h}{2}$ und h. Die beiden den Kreis K_h berührenden Normalen[27]) auf Γ schneiden aus der Randkurve Γ ein Stück heraus, das wir mit (Γ) bezeichnen. Der Randstreifen, der von Γ und der Näherungskurve Γ_{3h} begrenzt wird, heiße S_{3h}, und das Stück, das die beiden Normalen aus ihm ausschneiden, (S_{3h}).

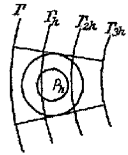

Fig. 2.

Nun kommt es darauf an, z. B. den Wert der Funktionen $\zeta_x = u_x - \overline{u}_x$ im Punkte P_h abzuschätzen. Offenbar besteht die Darstellung

$$\zeta_x = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K_R} \Delta \zeta_x \lg \frac{R}{r}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\mathsf{K}_R} \zeta_x\, ds,$$

wo K_R ein Kreis mit dem Radius R um den Punkt P_h ist und K_R seine Peripherie bedeutet. Multipliziert man mit R, integriert nach R von 0 bis $\frac{h}{2}$ und wendet die Schwarzsche Ungleichung an, so gewinnt man die Abschätzung

$$\zeta_x^2 \leqq c h^2 \iint\limits_{K_{\frac{h}{2}}} \Delta \zeta_x^2\, dx\, dy + \frac{c}{h^2} \iint\limits_{K_{\frac{h}{2}}} \zeta_x^2\, dx\, dy$$

oder

$$\zeta_x^2 + \zeta_y^2 \leqq c h^2 D_{K_{\frac{h}{2}}}[\Delta \zeta] + \frac{c}{h^2} D_{K_{\frac{h}{2}}}[\zeta]. \tag{17}$$

für die Werte von ζ_x und ζ_y im Punkte P_h.

Nehmen wir erst einmal an, daß das Integral $D[\Delta \zeta]$ über das ganze

---

[25]) Die kurze Betrachtung von Ritz zu diesem Zweck ist nicht stichhaltig. Ges. W. XV, S. 214.

[26]) Der Grundgedanke des Beweises findet sich in C. S. 149—150.

[27]) Die leichten Modifikationen dieser Betrachtungen, die an den Ecken notwendig sind, bedürfen keiner besonderen Erörterung.

Gebiet G genommen existiert, so brauchen wir nur noch das Integral $D_{K_{\frac{h}{2}}}[\zeta]$ folgendermaßen abzuschätzen:

$$D_{K_{\frac{h}{2}}}[\zeta] \leqq D_{(S_{3h})}[\zeta] \leqq c h^2 J_{0_{(S_{3h})}}[\zeta] + c h \int_{(\Gamma)} (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)\, ds.$$

Die Gültigkeit dieser Abschätzung ergibt sich fast unmittelbar aus dem für die erste Ungleichung (5) gegebenen Beweis. (Vgl. z. B. (7), S. 212 und Anm. [13a]).)

Da aber $\int_{(\Gamma)} (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)\, ds = 0$ ist wegen (16), erhalten wir in

$$(18) \qquad \zeta_x^2 + \zeta_y^2 \leqq c h^2 D_{S_{3h}}[\Delta \zeta] + c J_{0 S_{3h}}[\zeta]$$

eine Abschätzung, die uns lehrt, daß der Wert von $\zeta_x^2 + \zeta_y^2 = (u_x - \bar{u}_x)^2 + (u_y - \bar{u}_y)^2$ in irgend einem Punkte P_h zwischen Γ_h und Γ_{2h} mit h gegen Null geht, unabhängig von der Annäherung.

Können wir nicht die Existenz von $D[\Delta \zeta]$ voraussetzen, wohl aber die Existenz des Integrals $\iint_G (\Delta \Delta \bar{u})^2\, dx\, dy$ und damit die des Integrals $\iint_G (\Delta \Delta \zeta)^2\, dx\, dy$, so kommen wir zum Ziel, wenn wir die Ungleichung

$$(19) \quad \iint_{K_{\frac{h}{2}}} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy \leqq c h^2 \iint_{K_h} (\Delta \varphi)^2\, dx\, dy + \frac{c}{h^2} \iint_{K_h} \varphi^2\, dx\, dy$$

heranziehen und für $\varphi = \Delta \zeta$ auf das erste Integral von (17) anwenden; offenbar gelangen wir dann zu der Ungleichung

$$(20) \quad \zeta_x^2 + \zeta_y^2 \leqq c h^4 \iint_{S_{3h}} (\Delta \Delta \zeta)^2\, dx\, dy + c J_{0 S_{3h}}[\zeta] + c \iint_{S_3 h} (\Delta \zeta)^2\, dx\, dy,$$

aus der wir wieder schließen, daß ζ_x und ζ_y wie oben bei Annäherung an den Rand verschwinden.

Um die soeben angeführte Ungleichung (19) zu beweisen, beginnen wir mit der Greenschen Formel

$$(21) \qquad \iint_{K_r} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy = - \iint_{K_r} \varphi \Delta \varphi\, dx\, dy + \int_{\mathsf{K}_r} \varphi \varphi_n\, ds$$

für einen Kreis K_r mit dem Radius r um den Punkt P_h und der Peripherie K_r. Nun beachten wir, daß $\varphi \varphi_n = \frac{1}{2}(\varphi^2)_r$ und das Integral

$$\int_{\mathsf{K}_r} \varphi \varphi_n\, ds = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \int_{\mathsf{K}_r} \varphi^2\, ds - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \int_{\mathsf{K}_r} \varphi^2\, ds$$

ist. Integrieren wir jetzt die Greensche Formel (21) nach r von $\frac{1}{2} h$ bis $\bar{r}$, so ergibt sich

$$\int_{\frac{1}{2}h}^{\bar r}\iint_{K_r}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dx\,dy\,dr$$

$$=-\int_{\frac{1}{2}h}^{\bar r}\iint_{K_r}\varphi\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dr+\frac{1}{2}\int_{K_{\bar r}}\varphi^2\,ds-\frac{1}{2}\int_{K_{\frac{1}{2}h}}\varphi^2\,ds-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}h}^{\bar r}\frac{1}{r}\int_{K_r}\varphi^2\,ds\,dr.$$

Wählen wir jetzt für $\bar r$ einen Wert, der so zwischen $\frac{3}{4}h$ und h liegt, daß $\int_{K_{\bar r}}\varphi^2\,ds=\frac{4}{h}\iint_{K_h-K_{\frac{3}{4}h}}\varphi^2\,dx\,dy$ ist, so finden wir leicht

$$\frac{h}{4}\iint_{K_{\frac{h}{2}}}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dx\,dy\leqq h\sqrt{\iint_{K_h}\varphi^2\,dx\,dy}\sqrt{\iint_{K_h}(\Delta\varphi)^2\,dx\,dy}+\frac{2}{h}\iint_{K_h}\varphi^2\,dx\,dy,$$

woraus man sofort die gesuchte Ungleichung (19) entnimmt.

Die Existenz des Integrals $\iint_G(\Delta\Delta\bar u)^2\,dx\,dy$, auf die wir uns oben berufen haben, werden wir aber nicht immer voraussetzen dürfen. Wollen wir sie nicht benutzen, so ersetzen wir in den vorangehenden Entwicklungen $\zeta_x=u_x-\bar u_x$ durch u_x-a, wo a der Randwert von $\bar u_x$ im Punkte P_0 ist. Wir erhalten dann

$$(u_x-a)^2\leqq c\,h^4\iint_{S_{3h}}(\Delta\Delta u)^2\,dx\,dy+c\,J_{0_{S_{3h}}}[u]+\frac{c}{h}\int_{(\Gamma)}(u_x-a)^2\,ds.$$

Diese Abschätzung unterscheidet sich von der früheren (20) wesentlich nur durch das Auftreten des Gliedes $\frac{c}{h}\int_{(\Gamma)}(u_x-a)^2\,ds$, das jetzt nicht verschwindet; es nimmt aber wegen (16) $\int_{\Gamma}(u_x-\bar u_x)^2\,ds=0$ den Wert $\frac{c}{h}\int_{(\Gamma)}(\bar u_x-a)^2\,ds$ an; und dieser Ausdruck geht mit h gegen Null, wenn nur $\bar u_x$ in der Umgebung des Punktes P_0 stetige Randwerte annimmt; denn die Länge des Stückes (Γ), das sich mit abnehmendem h auf den Punkt P_0 zusammenzieht, hat die Größenordnung von h. Also geht auch der Wert von u_x im Punkte P_h gegen den Wert a, wenn sich der Punkt P_h dem Randpunkt P_0 nähert. Entsprechend finden wir unter der Annahme, daß auch $\bar u_y$ in der Umgebung des Punktes P_0 stetige Randwerte besitzt, daß der Wert von u_y im Punkte P_h gegen den Wert von $\bar u_y$ im Punkte P_0 geht, wenn der Punkt P_h dem Randpunkt P_0 beliebig nahe kommt.

II. Das Gleichgewichtsproblem der freien Platte.

1. Aufstellung des Problems.

Wir gehen jetzt zur Behandlung des Problems der freien Platte im Gleichgewicht über. Der Existenzbeweis kann fast wörtlich ebenso wie bei der eingespannten Platte geführt werden. Es sind nur noch einige Vorbereitungen nötig, um das Variationsproblem sinngemäß aufzustellen und seine Definitheit nachzuweisen.

Die Platte soll „frei“ heißen, wenn sie nur fest vorgegebenen Kräften und Drucken unterliegt, die nicht von der Verbiegung der Platte abhängen; dazu soll angenommen werden, daß diese Kräfte und Drucke potentielle Energien besitzen.

Durch die Durchbiegung $\varphi(x, y)$ aus der ebenen Ruhelage entsteht im Innern eine Spannkraft, deren Dichte durch den Differentialausdruck vierter Ordnung $-\Delta\Delta\varphi$ gegeben ist. Jetzt sind aber zwei Drucke am Rande wirksam, die durch die Differentialausdrücke dritter und zweiter Ordnung

$$-\mu\,\Delta\varphi-(1-\mu)\,\varphi_{n,n}$$

und

$$-\Delta\varphi_n-(1-\mu)(\varphi_{n,s})_s$$

dargestellt werden, während in den Ecken „Einzelkräfte“

$$-(1-\mu)\ (\varphi^{(2)}_{n,s}-\varphi^{(1)}_{n,s})$$

entstehen.

Der Sinn dieser Ausdrücke ergibt sich aus den folgenden Bezeichnungen: Es bedeuten (x_n, y_n) und (x_s, y_s) die Einheitsvektoren der äußeren Normalen und der „positiv gerichteten“ Tangente des Randes Γ; φ_n und φ_s stellen die normale und tangentielle Ableitung einer Funktion $\varphi(x, y)$ am Rande dar. Ferner ist gesetzt:

$$\varphi_{n,s}=\varphi_{xn}\,x_s+\varphi_{yn}\,y_s=\varphi_{xx}\,x_n\,x_s+\varphi_{xy}(y_n\,x_s+x_n\,y_s)+\varphi_{yy}\,y_n\,y_s$$

$$\varphi_{n,n}=\varphi_{xn}\,x_n+\varphi_{yn}\,y_n=\varphi_{xx}\,x_n^2+2\varphi_{xy}\,x_n\,y_n+\varphi_{yy}\,y_n^2.$$

Schließlich bedeutet $\varphi^{(1)}$ bzw. $\varphi^{(2)}$ den Wert, den die Funktion $\varphi(x, y)$ annimmt, wenn der Punkt (x, y) sich auf dem Rande in positivem bzw. negativem Sinne einer Ecke nähert.

Der Ausdruck $-\mu\Delta\varphi-(1-\mu)\varphi_{n,n}$ stellt[28]) das zum Rande normale „Biegungsmoment“ dar; der zweite ist der Normalanteil der „Stützkraft“, der Summe von „Scherkraft“ $-\Delta\varphi_n$ und „Ersatzscherkraft“, die der tangentialen Ableitung des „Scherungsmomentes“ $-(1-\mu)\varphi_{n,s}$ gleich

[28]) Vgl. zu den Bezeichnungen z. B. A. Nadai, Elastische Platten 1923, S. 33.

ist. Die Differenz der in den Eckpunkten an verschiedenen Seiten genommenen Scherungsmomente ist die dort wirksame Einzelkraft.

Wirkt nun auf das Innere der Platte eine Kraft von der Dichte $f(x, y)$, am Rande eine äußere Stützkraft $p(s)$ und ein äußeres Biegungsmoment $q(s)$, ferner in den Ecken Einzelkräfte k, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\Delta\Delta\varphi - f = 0 \tag{3}$$

im Innern,

$$\Delta\varphi_n + (1-\mu)(\varphi_{n,s})_s + p = 0 \tag{22}$$

$$\mu\Delta\varphi + (1-\mu)\varphi_{n,n} - q = 0 \tag{23}$$

am Rande und

$$(1-\mu)(\varphi_{n,s}^{(2)} - \varphi_{n,s}^{(1)}) + k = 0 \tag{24}$$

in den Ecken.

Wir erhalten sie aus der Forderung, die gesamte potentielle Energie $\frac{1}{2}V[\varphi]$ zum Minimum zu machen. Dabei lautet der „Variationsausdruck":

$$V[\varphi] = J_\mu[\varphi] - 2\iint_G f\varphi\, dx\, dy - 2\int_\Gamma p\varphi\, ds - 2\int_\Gamma q\varphi_n\, ds - 2\sum_E k\varphi.$$

(Die Summe $\sum_E$ ist über alle Ecken E des Randes Γ zu erstrecken.)

Die Rand- und Eckenbedingungen werden beim Variationsproblem nicht gestellt, da sie „natürliche" Bedingungen sind; d. h. die Lösung wird ihnen — ebenso wie die Differentialgleichung — von selbst genügen [29]).

Dies folgt nach dem bekannten Schluß der Variationsrechnung aus der folgenden Umformung der ersten Variation des Ausdruckes $V[\varphi]$ mit einer „willkürlichen" zulässigen Funktion $\zeta(x, y)$ [30]):

---

[29]) Allerdings gelingt es nicht nachzuweisen, daß sie in „strenger Form" erfüllt sind. Vgl. S. 229. In der folgenden nur orientierenden Betrachtung ist die Existenz der ersten, zweiten und dritten Ableitungen von φ auf Γ vorläufig angenommen.

[30]) Diese Umformung bestätigen wir, indem wir $-\int_\Gamma \zeta(\varphi_{n,s})_s\, ds - \sum_E \zeta(\varphi_{n,s}^{(2)} - \varphi_{n,s}^{(1)})$ durch Teilintegration in $\int_\Gamma \zeta_s\varphi_{n,s}\, ds$ überführen, den Ausdruck $\int_\Gamma \zeta_s\varphi_{n,s}\, ds + \int_\Gamma \zeta_n\varphi_{n,n}\, ds$ in $\int_\Gamma \{\zeta_x\varphi_{xn} - \zeta_y\varphi_{yn}\}\, ds$ umformen und schließlich diesen Ausdruck ebenso wie das Integral $\int_\Gamma \zeta\Delta\varphi_n\, ds$ nach der Greenschen Formel in Gebietsintegrale überführen. Vgl. S. 208.

$$(25)\qquad \begin{aligned} V[\varphi,\zeta] &= J_\mu[\varphi,\zeta] - \int_G f\zeta - \int_\Gamma p\zeta\,ds - \int_\Gamma q\zeta_n\,ds - \sum_E k\zeta \\ &= \int_G \zeta(\Delta\Delta\varphi - f)\,dy \\ &\quad - \int_\Gamma \zeta(\Delta\varphi_n + (1-\mu)(\varphi_{n,s})_s + p)\,ds \\ &\quad + \int_\Gamma \zeta_n(\mu\Delta\varphi + (1-\mu)\varphi_{n,n} - q)\,ds \\ &\quad - \sum_E \zeta((1-\mu)(\varphi^{(2)}_{n,s} - \varphi^{(1)}_{n,s}) + k) \end{aligned}$$

unter Beachtung der unabhängigen „Willkürlichkeit" von $\zeta(x,y)$ in G, von $\zeta(s), \zeta_n(s)$ auf Γ und von ζ in den Ecken E und der Tatsache, daß die Lösung des Variationsproblems die erste Variation zum Verschwinden bringt.

Über die Natur der beim Variationsproblem zugelassenen Funktionen, über Gebiet G und Rand Γ und über die Auffassung der Gebiets- und Randintegrale im uneigentlichen Sinne machen wir dieselben Voraussetzungen, wie bei der eingespannten Platte (vgl. S. 209). Der Parameter μ muß, wie sich später (vgl. S. 230) als notwendig herausstellt, absolut kleiner als Eins sein. Die vorgegebenen Funktionen $p(s)$ und $q(s)$ sollen auf dem Rande stückweise stetig sein. Die Funktionen $f(x,y)$, $p(s)$, $q(s)$ und die Größen k dürfen aber nicht willkürlich gewählt werden; es müssen vielmehr Bedingungsgleichungen

$$(26)\qquad K = \iint_G f\,dx\,dy + \int_\Gamma p\,ds + \sum_E k = 0$$

$$(27)\qquad \begin{aligned} M &= \iint_G fx\,dx\,dy + \int_\Gamma px\,ds + \int_\Gamma qx_n\,ds + \sum_E kx = 0 \\ N &= \iint_G fy\,dx\,dy + \int_\Gamma py\,ds + \int_\Gamma qy_n\,ds + \sum_E ky = 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein.

(Die erste Gleichung verlangt, daß die Gesamtkraft der äußeren Einwirkungen verschwindet, während die beiden anderen das Verschwinden ihres Gesamtbiegungsmomentes besagen.)

Gibt es nämlich eine Lösung der Randwertaufgabe, d. h. eine Funktion $\varphi = u$, die den Gleichungen (3), (22), (23), (24) genügt, so brauchen wir nur in die Gleichung (25) u für φ und die Funktionen $1, x, y$ [31]) für ζ einzusetzen, um die Bedingungen (26) und (27) zu erhalten. Andererseits erweisen sich diese drei Bedingungen als notwendig dafür, daß der Variationsausdruck überhaupt nach unten beschränkt ist. Setzt man nämlich $\varphi = \varphi_0 + \alpha + \beta x + \gamma y$, so nimmt der Variationsausdruck den Wert

$$V[\varphi] = V[\varphi_0] - 2\alpha K - 2\beta M - 2\gamma N$$

[31]) Die Rolle, die hier die linearen Funktionen spielen, erklärt sich daraus, daß sie die Lösungen des zugehörigen homogenen Problems sind.

an und kann durch Wahl von α, β, γ beliebig klein werden, wenn nicht K, M und N verschwinden.

Sind diese drei Bedingungen jedoch erfüllt, so ist in der Tat der Variationsausdruck nach unten beschränkt. Um das einzusehen, beachte man, daß nunmehr die Addition einer linearen Funktion zu φ den Wert des Variationsausdruckes nicht ändert und daß man infolgedessen, ohne das Problem zu ändern, der Funktion φ noch die Bedingungen

$$\iint_G \varphi\, dx\, dy = 0, \qquad \iint_G \varphi x\, dx\, dy = 0, \qquad \iint_G \varphi y\, dx\, dy = 0 \text{ [32]}$$

der Orthogonalität auf den linearen Funktionen auferlegen kann; denn diese Bedingungen können stets durch Addition einer linearen Funktion zu φ befriedigt werden.

Unter diesen Nebenbedingnngen gelten nun zwei Integralungleichungen, die dasselbe leisten, wie die Ungleichungen (5) und (6) S. 211; sie gestatten eine untere Schranke des Variationsausdruckes nachzuweisen und dienen auch als Hilfsmittel zur Durchführung des Existenzbeweises. Es handelt sich um die Ungleichungen [32a]:

(28) $H[\varphi] \leqq c D[\varphi]$ bei der Nebenbedingung $\iint_G \varphi\, dx\, dy = 0$ [33])

(für geeignete nur vom Gebiet abhängige positive Konstante c)

(29) $D[\varphi] \leqq c J_0[\varphi]$ bei $\iint_G \varphi dx dy = \iint_G \varphi x dx dy = \iint_G \varphi y dx dy = 0.$

Dazu tritt noch die Ungleichung:

$$J_0[\varphi] \leqq \frac{1}{1-|\mu|} J_\mu[\varphi] \text{ für } |\mu| < 1 \tag{30}$$

und die schon früher benutzten (vgl. S. 217)

$$\int_\Gamma \varphi^2\, ds \leqq c \sqrt{D[\varphi]}\sqrt{H[\varphi]} + c H[\varphi] \tag{13}$$

$$\int_\Gamma (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \leqq c \sqrt{J_0[\varphi]}\sqrt{D[\varphi]} + c D[\varphi], \tag{13_1}$$

wobei die Integration anstatt über Γ auch über alle Näherungskurven Γ_h einer gewissen Umgebung von Γ erstreckt werden darf.

Schließlich sei noch die Ungleichung

$$\varphi^2 \leqq c \sqrt{\int_\Gamma \varphi_s^2\, ds}\sqrt{\int_\Gamma \varphi^2\, ds} + c\int_\Gamma \varphi^2\, ds \tag{31}$$

für den Wert von φ in irgendeinem Randpunkt angemerkt.

[32]) Die erste Bedingung bedeutet, daß der Schwerpunkt in seiner Ruhelage bleibt, während die beiden anderen, an deren Stelle auch $\int_G \varphi_x\, dy = 0$, $\int_G \varphi_y\, dy = 0$ gewählt werden könnte, noch Drehungen ausschließen.

[32a]) Zu den Bezeichnungen vgl. S. 209, 211.

[33]) Vgl. H. Poincaré, Acta math. 20, S. 98 ff.

Man überzeugt sich durch die entsprechende Schlußweise wie bei der eingespannten Platte (vgl. S. 211) davon, daß es auf Grund dieser Integralungleichungen möglich ist, die Integrale $\int\limits_G f\varphi\, dg$, $\int\limits_\Gamma p\varphi\, ds$, $\int\limits_\Gamma q\varphi_n\, ds$, und die Summe $\sum\limits_E k\varphi$ des Variationsausdruckes $V[\varphi]$ durch $\sqrt{J_\mu[\varphi]}$ abzuschätzen und daß man infolgedessen für $V[\varphi]$ eine untere Schranke von der Form

$$-c\{\iint\limits_G f^2\, dx\, dy + \int\limits_\Gamma p^2\, ds + \int\limits_\Gamma q^2\, ds + \Sigma k^2\}$$

erhält.

2. Durchführung des Existenzbeweises.

Bevor wir die Integralungleichungen beweisen, wollen wir den Existenzbeweis in allen wesentlichen Punkten ebenso wie bei der eingespannten Platte durchführen.

Da der Variationsausdruck eine untere Grenze besitzt, existiert sicher eine Minimalfolge u_i. Aus dem Verschwinden der ersten Variation in der Grenze für die Minimalfolge folgern wir die Grenzgleichung

$$J_\mu[u_i - u_k] \to 0 \qquad (i, k \to \infty),$$

aus der wie auf Grund der Integralungleichungen (30), (29) und (28) die weiteren Grenzgleichungen

$$J_0[u_i - u_k] \to 0, \quad D[u_i - u_k] \to 0, \quad H[u_i - u_k] \to 0$$

entnehmen. Nun können wir wieder auf die gleichmäßige Konvergenz der Minimalfolge gegen eine stetige Grenzfunktion u schließen, die im Innern stetige erste und zweite Ableitungen besitzt und der Differentialgleichung $\Delta\Delta u - f = 0$ genügt. Ferner ergibt sich, daß das Integral $D_G[u]$ existiert und ebenso das Integral $J_{\mu_G}[u]$, das nicht größer ist als der untere Grenzwert der Integrale $J_G[u_i]$, während die Integrale $H_G[u_i]$, $\iint\limits_G f u_i\, dx\, dy$, $\int\limits_\Gamma p u_i\, ds$ und die Summe $\Sigma k u_i$ gegen die entsprechenden Ausdrücke für die Grenzfunktion konvergieren und die Nebenbedingungen

$$\iint\limits_G u\, dx\, dy = \iint\limits_G u x\, dx\, dy = \iint\limits_G u y\, dx\, dy = 0$$

erfüllt sind. Endlich schließen wir aus der hinsichtlich h gleichmäßigen Konvergenz der über alle Näherungskurven erstreckten Integrale $\int\limits_{\Gamma_h}\{(u_x - u_{i_x})^2 + (u_y - u_{i_y})^2\}\, ds$ gegen Null auf die Existenz des Integrals $\int\limits_\Gamma q u_n\, ds$ als Grenzwert der Integrale $\int\limits_\Gamma q u_{i_n}\, ds$.

Zusammenfassend erkennen wir, daß für die Grenzfunktion der Variationsausdruck existiert und nicht größer als die untere Grenze aller

Werte ist, die er für eine zulässige Funktion annehmen kann; und infolgedessen macht die Grenzfunktion, da sie offenbar selbst zugelassen ist, den Variationsausdruck zum Minimum.

Aus dieser Minimumeigenschaft folgt, daß für die Grenzfunktion u die erste Variation mit einer willkürlichen zugelassenen Funktion ζ verschwindet:

$$J_\mu[u, \zeta] - \iint_G f\zeta\, dx\, dy - \int_\Gamma p\zeta\, ds - \int_\Gamma q\zeta_n\, ds - \Sigma k\zeta = 0.$$

Formt man diesen Ausdruck durch Teilintegration um, und beachtet, daß die Funktion u der Differentialgleichung $\Delta\Delta u - f = 0$ genügt, so erhält man die Gleichung:

$$\text{(41)}\qquad \left.\begin{aligned} &\int_\Gamma \zeta(\Delta u_n + (1-\mu)(u_{n,s})_s + p)\, ds \\ &-\int_\Gamma \zeta_n(\mu\Delta u + (1-\mu)u_{n,n} - q)\, ds \\ &+\Sigma\zeta((1-\mu)(u_{n,s}^{(2)} - u_{n,s}^{(1)}) + k) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Wären die hier auftretenden Ableitungen der Funktion u bis auf den Rand endlich und stetig, so könnte man, da die Werte von ζ, ζ_n auf Γ und die von ζ in den Ecken unabhängig voneinander willkürlich sind, aus Gleichung (41) darauf schließen, daß die natürlichen Rand- und Eckenbedingungen in der strengen Form (22), (23), (24) erfüllt sind; diese Stetigkeit wird aber im allgemeinen nicht eintreten und infolgedessen wird man sich mit der hier gegebenen Form der Randbedingungen zufrieden geben müssen.

3. Beweis der Integralungleichungen.

Wir haben nun noch den Beweis der Ungleichungen (28), (29), (30), (31) nachzuholen. Die Ungleichung (31) folgt in bekannter Schlußweise[34]), die wir durch die folgenden Formeln kurz andeuten. Es ist

$$\varphi_0 = \varphi_a - \int_0^a \varphi_s\, ds,$$

$$\varphi_0^2 \leqq 2\varphi_a^2 + 2a\int_0^a \varphi_s^2\, ds \qquad (0 < a < h),$$

$$\leqq \frac{2}{h}\int_0^h \varphi^2\, ds + 2h\int_0^h \varphi_s^2\, ds$$

und durch Wahl von h ergibt sich

$$\varphi_0^2 \leqq c\int \varphi^2\, ds + c\sqrt{\int \varphi_s^2\, ds}\sqrt{\int \varphi^2\, ds}.$$

[34]) Vgl. A. S. 16.

Das Bestehen der Ungleichung (30) erkennt man unmittelbar durch Vergleich der Identitäten

$$J_\mu[\varphi] = \iint_G \left\{(1+\mu)\frac{1}{2}\Delta\varphi^2 + (1-\mu)\left(\frac{1}{2}(\varphi_{xx}-\varphi_{yy})^2 + 2\varphi_{xy}^2\right)\right\} dx\,dy,$$

$$J_0[\varphi] = \iint_G \left\{ \qquad \frac{1}{2}\Delta\varphi^2 + \qquad \left(\frac{1}{2}(\varphi_{xx}-\varphi_{yy})^2 + 2\varphi_{xy}^2\right)\right\} dx\,dy.$$

Zugleich ergibt sich die Notwendigkeit der früher (vgl. S. 224) gestellten Bedingung $|\mu| < 1$; denn für $|\mu| > 1$ ist $J_\mu[\varphi]$ nicht definit und für $|\mu| = 1$ läßt sich durch die Funktionen $\varphi = x^2 + y^2$ bzw. $\varphi = xy$ das Integral $J_\mu[\varphi]$ zu Null machen, ohne daß das Integral $J_0[\varphi]$ verschwindet, so daß jedenfalls eine Ungleichung von der Form $J_{\pm 1}[\varphi] \leqq c\, J_0[\varphi]$ nicht bestehen kann.

Die Ungleichung (28) folgt[34a]) sicher aus der Ungleichung

$$\iint_G dx\,dy \cdot \iint_G \varphi^2\, dx\,dy - \left(\iint_G \varphi\, dx\,dy\right)^2 \leqq c\, D_G[\varphi] \text{ }^{35)}$$

(ohne Nebenbedingung), die sich, wie man leicht bestätigt, auf die Form

$$(32) \qquad \iint_G \iint_G (\varphi_1 - \varphi_2)^2\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2 \leqq 2c\, D_G[\varphi]$$

bringen läßt, wobei in dem Integral auf der linken Seite unter φ_1 und φ_2 die Werte der Funktion φ in zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ zu verstehen sind, die beide unabhängig das Gebiet G durchlaufen. Die Gestalt dieses Integrals legt es nahe, die Punkte P_1 und P_2 durch eine im Innern von G verlaufende Kurve L_{12} mit der Bogenlänge s zu verbinden und die Abschätzung

$$(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \leqq L \int_{P_1}^{P_2} \varphi_s^2\, ds \leqq L \int_{P_1}^{P_2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, ds$$

vorzunehmen, wobei L eine feste Schranke für die Länge aller Kurven L_{12} sein soll. Setzt man die so gefundene Schranke für $(\varphi_1 - \varphi_2)^2$ ein, so ergibt sich, daß man nur noch die Ungleichung

$$\iint_G \iint_G \int_{P_1}^{P_2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, ds\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2 \leqq c\, D_G[\varphi]$$

[34a]) Sie ist übrigens mit ihr gleichwertig.

[35]) Eine ähnliche Betrachtung findet sich zu anderem Zweck bei H. Poincaré, vgl. J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, S. 28—31. Die Ungleichung (28) ist übrigens gleichwertig damit, daß der zweite Eigenwert der „frei schwingenden“ Membran positiv ist. Diese Tatsache folgt zwar sofort aus der Existenz der zugehörigen zweiten Eigenfunktion; aber bei deren Nachweis wird man sich gerade wieder der Ungleichung (28) bedienen.

zu beweisen hat. Es ist dazu nur nötig, aus den drei Integralen auf der linken Seite eine Integration über G herzustellen. Das wollen wir zuerst für ein einfaches Gebiet durchführen, und zwar für ein Gebiet T, das begrenzt wird von einer geraden Grundlinie, etwa dem Stück von 0 bis a der x-Achse, ferner von zwei auf ihr senkrechten geraden Seitenlinien und einer Kurve T mit der Gleichung $y = \bar{y}(x)$, die stetige Tangente besitzt und die von der Grundlinie höchstens den Abstand h, wenigstens aber den Abstand k hat. Um zu einem bequem zu handhabenden Integrationsweg L_{12} zu gelangen, beachten wir, daß es in dem Rechteck R, das von der Parallelen im Abstand k zur x-Achse aus dem Gebiet T ausgeschnitten wird, zu jeder Funktion φ eine weitere zur x-Achse parallele Strecke M gibt, so daß

$$(33)\qquad \int\limits_M (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx = \frac{1}{k} \iint\limits_R (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$$

ist. Nun verbinden wir zwei Punkte P_1 und P_2 innerhalb von T folgendermaßen: Wir gehen von ihnen auf Parallelen zur y-Achse fort, bis wir die Gerade M treffen, und verbinden dann die beiden Treffpunkte durch das zwischenliegende Stück dieser Geraden. Das Integral $\int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, ds$ über diesen Verbindungsweg wird aber nur vergrößert, wenn wir es über die ganzen Stücke der Parallelen durch P_1 und P_2 innerhalb von T und über die ganze Gerade M erstrecken. So ergibt sich folgende Abschätzung

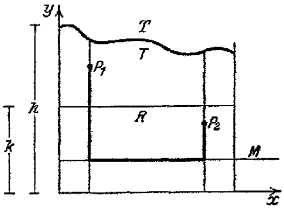

Fig. 3.

$$\begin{aligned} &\iint\limits_T \iint\limits_T (\varphi_1 - \varphi_2)^2\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2 \\ &\leqq \iint\limits_T dx\, dy \cdot \iint\limits_T \Big\{ \int\limits_0^{\bar{y}(x_1)} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dy \Big\}\, dx\, dy \\ &+ \iint\limits_T dx_1\, dy_1 \cdot \iint\limits_T \Big\{ \int\limits_0^{\bar{y}(x_2)} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dy \Big\}\, dx_2\, dy_2 \\ &+ \Big(\iint\limits_T dx\, dy \Big)^2 \cdot \int\limits_M (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx. \end{aligned}$$

Das Integral

$$\iint\limits_T \Big\{ \int\limits_0^{\bar{y}(x_1)} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dy \Big\}\, dx_1\, dy_1,$$

z. B. können wir nun durch

$$h \int\limits_0^a \Big\{ \int\limits_0^{\bar{y}(x_1)} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dy \Big\}\, dx_1 = h \iint\limits_T (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$$

nach oben abschätzen und somit erhalten wir, wenn wir noch den oben angegebenen Wert (33) für $\int\limits_M (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\,dx$ verwenden, die gesuchte Ungleichung

$$\iint\limits_T \iint\limits_T (\varphi_1 - \varphi_2)^2\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2 \leqq \left(2a + \frac{a^2}{k}\right) h^2 \iint\limits_T (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy.$$

Für das allgemeinste hier zugrunde gelegte Gebiet können wir die Ungleichung (32) dadurch beweisen, daß wir das Gebiet G durch endlich viele, etwa N, Teilgebiete T_i[35a]) von der oben angegebenen Art so überdecken, daß jeder Punkt in einem dieser T-Gebiete liegt. Dann ist sicher

$$\iint\limits_G \iint\limits_G (\varphi_1 - \varphi_2)^2\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2 \leqq \sum_{i_1, i_2 = 1}^{N} \iint\limits_{T_{i_1}} \iint\limits_{T_{i_2}} (\varphi_1 - \varphi_2)^2\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2.$$

Auf die Integrale der Summe können wir dieselbe Schlußweise wie oben anwenden; liegen die beiden Punkte P_1 und P_2 in zwei verschiedenen Gebieten T_{i_1} und T_{i_2}, so haben wir allerdings noch für jede Funktion φ zwei in den beiden zugehörigen Rechtecken R liegende Strecken M durch eine derartige Linie $M_{i_1 i_2}$ zu verbinden, daß das über sie erstreckte Integral

$$\int\limits_{M_{i_1 i_2}} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, ds \leqq c \iint\limits_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$$

ist, wo c eine nur vom Gebiet G abhängige Konstante ist. Man überzeugt sich leicht davon, daß das möglich ist.

Wenden wir die somit bewiesene Ungleichung (28) auf die ersten Ableitungen einer Funktion φ an, so erhalten wir die Ungleichung

$$D[\varphi] \leqq c\, J_0[\varphi] \tag{34}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\iint\limits_G \varphi_x\, dx\, dy = 0, \qquad \iint\limits_G \varphi_y\, dx\, dy = 0, \tag{35}$$

die, wenn man noch die Bedingung

$$\iint\limits_G \varphi\, dx\, dy = 0 \tag{36}$$

hinzunimmt, ebenso den Ausschluß linearer Funktionen bedeuten, wie die drei Bedingungen

$$\iint\limits_G \varphi\, dx\, dy = \iint\limits_G \varphi x\, dx\, dy = \iint\limits_G \varphi y\, dx\, dy = 0. \tag{37}$$

Es ist in der Tat möglich, das Bestehen der obigen Ungleichung (34) unter diesen drei Nebenbedingungen (37) aus ihrer Gültigkeit bei den drei erstgenannten Nebenbedingungen (35), (36) abzuleiten. Zu dem Zweck

[35a]) Die sich auch gegenseitig überlagern können.

addieren wir zu einer Funktion φ, die den Nebenbedingungen (37) genügt, eine lineare Funktion $l(x, y)$, so daß die Funktion $\bar{\varphi} = \varphi + l$ den drei Nebenbedingungen (35), (36) gehorcht. Wir erhalten dann die Beziehungen

$$H[\bar{\varphi}] = H[\varphi] + H[l], \tag{38}$$

$$D[\varphi] = D[\bar{\varphi}] + D[l]. \tag{39}$$

Nun gibt es eine nur vom Gebiet abhängige Konstante a, so daß

$$D[l] \leqq a H[l] \tag{40}$$

ist. Bilden wir nämlich zwei normierte, zueinander und zu der Konstanten orthogonale lineare Funktionen l_1 und l_2, so ist die Funktion l offenbar von der Form

$$l = \alpha l_1 + \beta l_2 + \gamma$$

und es ist weiter

$$H[l] = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$
$$D[l] = \alpha^2 D[l_1] + \beta^2 D[l_2] + 2\alpha\beta D[l_1, l_2].$$

Wir brauchen also für a nur den größeren der beiden Werte $2D[l_2]$ und $2D[l_1]$ zu wählen.

Nunmehr gehen wir von der Gleichung (39) $D[\varphi] = D[\bar{\varphi}] + D[l]$ aus und schätzen das Integral $D[l]$ nach der eben bewiesenen Relation (40) nach oben durch den Ausdruck $aH[l]$ ab, der seinerseits wegen (38) kleiner als $aH[\bar{\varphi}]$ ist; das Integral $H[\bar{\varphi}]$ ist wegen (36) nach (28) kleiner als $cD[\bar{\varphi}]$, so daß wir eine Ungleichung

$$D[\varphi] \leqq c D[\bar{\varphi}]$$

erhalten. Für die Funktion $\bar{\varphi}$ ist wegen (35), (36) nach (34) das Bestehen der Ungleichung $D[\bar{\varphi}] \leqq c J_0[\bar{\varphi}]$ bekannt; und da $J_0[\bar{\varphi}] = J_0[\varphi]$ ist, so ergibt sich die gewünschte Ungleichung

$$D[\varphi] \leqq c J_0[\varphi].$$

unter den Nebenbedingungen (37).

III. Das Eigenwertproblem der eingespannten und freischwingenden Platte.

1. Aufstellung des Problems.

Die Methoden, die zur Lösung des Gleichgewichtsproblems führten, wollen wir nunmehr dazu benutzen, die Existenz der Eigenfunktionen der schwingenden Platte nachzuweisen. Dabei können wir die freie und die eingespannte Platte gleichzeitig behandeln.

Der Schwingungszustand einer Platte, auf die keine äußeren Kräfte wirken, wird durch die Bewegungsgleichungen

$$\Delta\Delta\varphi + \varphi_{tt} = 0$$

bestimmt, wobei $\varphi = \varphi(x, y; t)$ die Verschiebung aus der ebenen Ruhelage bedeutet. Durch Vorgabe der Werte von φ und φ_t zu irgendeiner Anfangszeit und durch die für alle späteren Zeiten gestellten Randbedingungen:

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_n = 0$$

für die *eingespannte* bzw.

$$(42) \qquad \begin{aligned} \Delta\varphi_n + (1-\mu)(\varphi_{n,s})_s &= 0, \\ \mu\Delta\varphi + (1-\mu)\,\varphi_{n,n} &= 0 \end{aligned}$$

und die Eckenbedingungen

$$(43) \qquad \varphi^{(2)}_{n,s} - \varphi^{(1)}_{n,s} = 0$$

für die *freie Platte*, ist die Funktion φ eindeutig festgelegt. Um dies gemischte Randwertproblem zu lösen, denkt man sich die Lösung $\varphi = v$ nach Grund- und Oberschwingungen entwickelt:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} u^n(x, y)\cdot g^n(t),$$

woraus man für die Funktionen $g = g^n$ die Darstellung

$$g(t) = a\cos\sqrt{\lambda}\,t + b\sin\sqrt{\lambda}\,t \qquad \begin{bmatrix} a = a_n & \lambda = \lambda^n \\ b = b_n & \end{bmatrix}$$

erhält, während sich zur Bestimmung der Funktionen $u = u^n$ die Differentialgleichung

$$(44) \qquad \Delta\Delta u - \lambda u = 0$$

ergibt.

Es entsteht somit das Problem, ein vollständiges System von Funktionen u, „Eigenfunktionen“, mit zugehörigen „Eigenwerten“ λ aufzusuchen, die außer den Randbedingungen der obigen Differentialgleichung (44) genügen. Die Koeffizienten a und b bestimmen sich dann in bekannter Weise aus den Vorgaben von $u(x, y; t_0)$ und $u_t(x, y; t_0)$.

Wir wollen nun die Folge der Eigenwerte λ^n und Eigenfunktionen u^n durch die Forderung bestimmen, das Integral

$$J_\mu[\varphi] \text{ [36])}$$

unter allen Funktionen $\varphi(x, y)$ zum Minimum zu machen, die durch die Gleichung

$$H[\varphi] = 1$$

[36]) Für die eingespannte Platte kann $\mu = 0$ gewählt werden.

normiert und vermöge der Gleichungen

$$H[\varphi u^\nu] = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{45}$$

zu den ersten $n-1$ Eigenfunktionen $u^1, \ldots, u^{n-1}$ orthogonal sind. Im Falle der eingespannten Platte sollen dazu noch die Randbedingungen

$$\varphi = 0, \quad \int_\Gamma \varphi_x^2\, ds = 0, \quad \int_\Gamma \varphi_y^2\, ds = 0 \tag{46}$$

erfüllt sein, während sich im Fall der freien Platte die Randbedingungen von selbst einstellen sollen.

Für die Lösung $u = u^n$ und $\lambda = \lambda^n$ des n-ten Variationsproblems verschwindet die erste Variation

$$J_\mu[u, \eta] - \lambda H[u, \eta] = 0, \tag{47}$$

wobei die variierende willkürliche Funktion $\eta(x, y)$ zugelassen ist und noch den $n-1$ Orthogonalitätsnebenbedingungen (45) genügt. Setzen wir speziell $\eta = u^k\,[k > n]$ so entnehmen wir aus (47) und

$$H[u^n, u^k] = 0 \tag{48}$$

noch die weitere Gleichung

$$J_\mu[u^n, u^k] = 0. \tag{49}$$

Nunmehr erkennen wir, daß die erste Variation für jede zugelassene Funktion $\zeta(x, y)$ verschwindet, auch wenn sie nicht den $n-1$ Bedingungen (45) genügt; wir brauchen dazu nur die Funktion ζ nach den ersten $n-1$ Eigenfunktionen in der Form $\zeta = \alpha_1 u^1 + \ldots + \alpha_n u^n + \eta$ so zu entwickeln, daß der Rest η zu $n-1$ Eigenfunktionen $u^1, \ldots, u^{n-1}$ orthogonal ist, dann die so bestimmte Funktion η in die Formel (47) einzusetzen und die Gleichungen (48) und (49) zu beachten.

Durch Umformung der ersten Variation erhalten wir im Fall der eingespannten Platte, in dem am Rande $\zeta = \int_\Gamma \zeta_x^2\, ds = \int_\Gamma \zeta_y^2\, ds = 0$ ist, die Gleichung

$$J_0[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] = \iint_G \zeta(\Delta\Delta u - \lambda u)\, dx\, dy$$

und im Falle der freien Platte

$$\begin{aligned} &J_\mu[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] \\ &= \iint_G \zeta(\Delta\Delta u - \lambda u)\, dx\, dy - \int_\Gamma \zeta(\Delta u_n + (1-\mu)(u_{n,s})_s)\, ds \\ &\quad + \int_\Gamma \zeta_n(\mu\Delta u + (1-\mu) u_{n,n})\, ds \\ &\quad - \sum_E \zeta((1-\mu)(u_{n,s}^{(2)} - u_{n,s}^{(1)})). \end{aligned}$$

Aus der Willkürlichkeit von ζ begründet man die Erwartung, daß die Funktion u der Differentialgleichung $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$ und im Falle der freien Platte noch den Bedingungen (42) und (43) genügt.

2. Konstruktion einer geeigneten Minimalfolge.

Das Integral $J_\mu[\varphi]$, das (unter den auf S. 234, 235 genannten Bedingungen) zum Minimum gemacht werden soll, ist positiv definit; es besitzt also eine untere Grenze, die schon Eigenwert genannt und mit λ bezeichnet werden soll. Für eine Folge u_i zugelassener Funktionen, für die $J_\mu[u_i]$ gegen λ geht, eine „Minimalfolge", erhalten wir in bekannter Weise[37]) die Grenzgleichung:

$$J_\mu[u_i, \zeta_i] - \lambda H[u_i, \zeta_i] \to 0,$$

wenn ζ_i eine Folge zugelassener Funktionen ist, für die $J_0[\zeta_i]$ beschränkt bleibt. Die $n-1$ Orthogonalitätsnebenbedingungen (45) brauchen die Funktion ζ nicht zu erfüllen, wie sich entsprechend den obigen Bemerkungen ergibt (vgl. S. 235).

Setzen wir $\zeta_i = u_k$, so entsteht die Grenzgleichung

$$J_\mu[u_i, u_k] - \lambda H[u_i, u_k] \to 0 \qquad (i, k \to \infty), \tag{50}$$

aus der wir die weitere Grenzgleichung

$$J_\mu[u_i - u_k] - \lambda H[u_i - u_k] \to 0 \tag{51}$$

erhalten. Es ist nun zweckmäßig, eine Minimalfolge aufzusuchen, für die $H[u_i - u_k]$ gegen Null geht. Man erhält eine solche durch sinngemäße Übertragung der Entwicklungen, die Courant für das Schwingungsproblem der Membran[38]) gegeben hat und zwar folgendermaßen:

Zuerst folgern wir aus der Beziehung (50) $J_\mu[u_i, u_k] - \lambda H[u_i, u_k] \to 0$ für eine beliebige Minimalfolge u_i bzw. u_k, daß jede lineare normierte Kombination $U_k = c_k u_{i_{k_1}} + \dots + c_{k\nu} u_{i_{k\nu}}$ von ν Funktionen der u_i wieder eine Minimalfolge ist, wenn die Koeffizienten c_{kl} absolut beschränkt bleiben und wenn i_{kl} mit k gegen Unendlich geht. Sodann bemerken wir, daß die Minimalfolge von endlicher asymptotischer Dimensionszahl ist, was mit der Unmöglichkeit gleichbedeutend ist, aus den Funktionen u_i und ihren normierten linearen Kombinationen beliebig viel zueinander orthogonale Minimalfolgen zu bilden. Dabei soll eine Anzahl von Folgen $u_{i1}, u_{i2}, \dots$ zueinander orthogonal heißen, wenn die zum selben Index i gehörigen Funktionen aufeinander orthogonal sind. Könnte man nämlich beliebig viel, etwa p solcher Minimalfolgen bilden, so könnte man aus

---

[37]) Vgl. z. B. B. S. 286.

[38]) Vgl. B. S. 287, 290, 292.

ihnen eine Folge von linearen Kombinationen $U_i = c_{i1} u_{i1} + \ldots + c_{ip} u_{ip}$ bilden, die zu $p-1$ beliebigen Funktionen orthogonal sind. Die Folge U_i ist nun selber Minimalfolge; denn wegen der Orthogonalität und Normierung der Funktionen $u_{i1}, \ldots, u_{ip}$ besteht die Beziehung $1 = H[U_i] = c_{i1}^2 + \ldots + c_{ip}^2$ und es bleiben somit die Koeffizienten beschränkt. Da demgemäß das Integral $J_\mu[U_i]$ gegen den Eigenwert $\lambda = \lambda^n$ geht, ist das Minimum des Integrals $J_\mu[\varphi]$ für normierte Funktionen φ, die außer auf den $n-1$ ersten Eigenfunktionen noch auf $p-1$ weiteren Funktionen, etwa den $p-1$ nächsten Eigenfunktionen, orthogonal ist, nicht größer als $\lambda = \lambda^n$. Das hieße aber, daß der $n+p-1$-te Eigenwert und, da p beliebig groß ist, jeder weitere Eigenwert gleich λ^n ist; kurz, daß der Eigenwert $\lambda = \lambda^n$ unendliche Vielfachheit hat. Das ist aber nicht der Fall; denn die Folge der Eigenwerte geht gegen Unendlich.

Nehmen wir diese Behauptung einmal als bewiesen an, so hat also die Minimalfolge eine endliche asymptotische Dimensionszahl, etwa r, und nun kann man, wie hier nicht bewiesen zu werden braucht[39]), aus linearen Kombinationen r zueinander orthogonale Minimalfolgen konstruieren, die für sich asymptotisch eindimensional sind. Genauer: ist $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots u_k, \ldots$ eine dieser Folgen, so gilt

$$(52) \qquad H[u_i - u_k] \to 0; \quad i, k \to \infty.$$

Eine solche neue Minimalfolge wollen wir dem folgenden Existenzbeweis zugrunde legen.

3. Das unendliche Anwachsen der Eigenwerte.

Vorher holen wir noch den Beweis für das unendliche Anwachsen der Eigenwerte nach. Zu dem Zweck berufen wir uns auf eine Eigenschaft der Eigenwerte, auf Grund deren sie unabhängig von der Existenz der Eigenfunktionen gekennzeichnet werden können, nämlich auf die *Maximum-Minimum-Eigenschaft,* die in folgendem besteht:

Das Minimum der Werte des Integrals $J_\mu[\varphi]$, genommen für alle zulässigen durch die Gleichung $H[\varphi] = 1$ normierten Funktionen φ, die zu irgendwelchen vorgegebenen $n-1$ Funktionen $v^1, \ldots, v^{n-1}$ vermöge der Gleichungen $H[\varphi v^\nu] = 0$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ orthogonal sind[40]), wird dann zum Maximum gemacht, wenn die Funktionen v^ν gerade die $n-1$ ersten Eigenfunktionen u^ν sind. Dies Maximum-Minimum ist gerade der

[39]) Vgl. B. S. 292.

[40]) Im Fall der eingespannten Platte soll die Funktion φ natürlich noch die gestellten Randbedingungen erfüllen.

n-te Eigenwert λ^n und die Funktion φ, für die es angenommen wird, ist die n-te Eigenfunktion u^n.

Der Beweis für diese Eigenschaft ist fast wörtlich derselbe wie beim entsprechenden Problem zweiter Ordnung und braucht hier nicht wiederholt zu werden [41]).

Wir können also, ohne uns auf die Existenz der Eigenfunktionen zu berufen, den n-ten Eigenwert anstatt als Maximum-Minimum entsprechend als obere Grenze der unteren Grenzen von $J_\mu[\varphi]$ unter den obigen Nebenbedingungen charakterisieren; wir wollen übrigens des bequemeren Ausdrucks wegen stets von Maximum und Minimum sprechen.

Das Maximum-Minimum-Problem der eingespannten Platte entsteht aus dem der freien Platte allein durch Auferlegung der Randbedingungen. Durch diese Verschärfung der Bedingungen kann das Minimum und also auch das Maximum-Minimum nur wachsen. Es ist also der n-te Eigenwert der freien Platte nicht größer als der der eingespannten Platte und deswegen genügt es, das unbeschränkte Anwachsen für die Eigenwerte der freien Platte nachzuweisen.

Zu dem Zweck bemerken wir, daß bei beliebiger Wahl der Funktionen v_ν unter den Nebenbedingungen $H[\varphi, v^\nu] = 0$ die Ungleichungen

$$\lambda^n \geqq \operatorname{Min} \frac{J_\mu[\varphi]}{H[\varphi]} \geqq \operatorname{Min} \frac{J_\mu[\varphi]}{D[\varphi]} \cdot \operatorname{Min} \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} \tag{53}$$

bestehen. Wir wählen nun als Funktionen v^ν außer den linearen Funktionen $1, x, y$ die zweite bis $n-3$-te Eigenfunktion w^ν der freischwingenden Membran desselben Gebietes. Es sind also einmal die Nebenbedingungen $\iint_G \varphi\, dx\, dy = \iint_G \varphi\, x\, dx\, dy = \iint_G \varphi\, y\, dx\, dy = 0$ gestellt und infolgedessen bleibt nach Ungleichung (29) das Minimum von $\frac{J_\mu[\varphi]}{D[\varphi]}$ oberhalb einer nur vom Gebiet abhängigen positiven Schranke, während auf Grund der Nebenbedingungen $\iint_G \varphi\, dx\, dy = 0$, $\iint_G w^2 \varphi\, dx\, dy = 0, \ldots,$ $\iint w^{n-3} \varphi\, dx\, dy = 0$ das Minimum von $\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]}$ nicht kleiner als der $n-2$-te Eigenwert der frei schwingenden Membran ist. Daß der mit wachsendem n gegen Unendlich geht, dürfen wir als bekannt voraussetzen, und wir erkennen nun aus der Ungleichung (53), daß auch der Eigenwert der freischwingenden Platte unbeschränkt wächst.

[41]) Vgl. A. S. 17, 18.

4. Schluß des Existenzbeweises.

Nach dieser Einschaltung fahren wir in unserem Existenzbeweis fort. Wir können also annehmen, daß wir eine Minimalfolge u_i vor uns haben, für die die Grenzgleichung

$$H[u_i - u_k] \to 0 \tag{52}$$

gilt. Aus der Relation

$$J_\mu[u_i - u_k] - \lambda H[u_i - u_k] \to 0 \tag{51}$$

entnehmen wir dann

$$J_\mu[u_i - u_k] \to 0, \tag{54}$$

woraus wir die weiteren Beziehungen

$$J_0[u_i - u_k] \to 0 \tag{55}$$

$$D[u_i - u_k] \to 0 \tag{56}$$

ableiten wollen. Die Relation (55) ergibt sich sofort aus Ungleichung (30), S. 227, und die zweite (56) im Falle der eingespannten Platte aus Ungleichung (6), S. 211. Im Falle der freien Platte gilt die Ungleichung

$$D[\varphi] \leqq c J_0[\varphi],$$

mit deren Hilfe wir auf das Bestehen von $D[u_i - u_k] \to 0$ schließen könnten, ohne weiteres nicht. Wir können uns aber die Tatsache zunutze machen, daß wir die drei ersten Eigenfunktionen schon kennen. Es sind dies drei lineare Funktionen; sie gehören zum Eigenwert Null und sind Lösungen des entsprechenden homogenen Gleichgewichtsproblems. Für die vierte und die höheren Eigenfunktionen ist aber die Orthogonalität auf den drei ersten Eigenfunktionen verlangt; das bedeutet aber nichts anderes, als daß die drei Bedingungen $\int\limits_G \varphi\, dy = \int\limits_G \varphi x\, dy = \int\limits_G \varphi y\, dy = 0$ gestellt werden; und unter denen ist das Bestehen der Ungleichung

$$D[\varphi] \leqq c J_0[\varphi]$$

wegen (29) S. 227, gesichert.

Mit der Aufstellung der Relationen

$$J_0[u_i - u_k] \to 0, \quad D[u_i - u_k] \to 0, \quad H[u_i - u_k] \to 0$$

haben wir den Ausgangspunkt des Existenzbeweises beim Gleichgewichtsproblem erreicht. Ebenso wie dort erkennen wir die Konvergenz der Minimalfolge; nur ist an Stelle der dort auftretenden Funktion f jetzt λu_i zu setzen. Damit ergibt sich dann die Existenz einer zulässigen Funktion $u(x, y)$, die alle Nebenbedingungen erfüllt und das Integral $J_\mu[\varphi]$ zum

Minimum macht. Sie genügt der Differentialgleichung und im Falle der freien Platte den natürlichen Rand- und Eckbedingungen in der Form

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_{\Gamma} \zeta(\Delta u_n + (1-\mu)(u_{n,s})_s)\,ds \\ -\int\limits_{\Gamma} \zeta_n(\mu\,\Delta u + (1-\mu)\,u_{n,n})\,ds\end{array}\right. + \sum_{E} \zeta(1-\mu)(u^{(2)}_{n,s} - u^{(1)}_{n,s}) = 0,$$

während für die eingespannte Platte die Randbedingungen $\varphi = \varphi_x = \varphi_y = 0$ auch in der strengen Form erfüllt sind.

IV. Verallgemeinerung der Probleme.

1. Die halbfreien Probleme.

Die Gleichgewichts- und Schwingungsprobleme der eingespannten und der freien Platte waren nun als charakteristisch aus einer ganzen Reihe von Problemen herausgegriffen, die sich mit denselben Mitteln behandeln lassen. Es sind dies alles Probleme, in denen auch das Integral $J_\mu[\varphi]$ auftritt und die nun andere additive Zusatzintegrale mit Ableitungen niederer Ordnung oder andere künstliche Randbedingungen besitzen. Der Unterschied in der Behandlung liegt hauptsächlich darin, daß andere Integralungleichungen heranzuziehen sind.

Die wichtigsten dieser Fälle sind die „halbfreien" Probleme, in denen entweder die Werte der Funktion φ und des natürlichen Randausdruckes zweiter Ordnung oder die Werte von φ_n, des natürlichen Ausdruckes dritter Ordnung und der Eckkräfte am Rande vorgeschrieben sind[42]. Diese beiden Fälle entsprechen den Variationsproblemen:

$$J_\mu[\varphi] + \int\limits_{\Gamma} q\,\varphi_n\,ds = \mathrm{Min} \tag{57}$$

bei

$$\varphi = \bar{u}, \qquad \int\limits_{\Gamma} (\varphi_s - \bar{u}_s)^2\,ds = 0$$

und

$$\begin{gathered} J_\mu[\varphi] + \int\limits_{\Gamma} p\,\varphi\,ds + \sum_{E} k\,\varphi = \mathrm{Min} \\ \int\limits_{\Gamma} (\varphi_n - \bar{u}_n)^2\,ds = 0. \end{gathered} \tag{58}$$

Die zweite Randbedingung soll sich in jedem Fall als natürliche von selbst einstellen.

Für das erste dieser Probleme (57) brauchen wir, damit für jede Funktion ζ, welche Differenz zweier zugelassener Funktionen ist, die Be-

[42]) Vgl. oben und S. 224, 225. Es können z. B. auch die Werte von φ in den Ecken und die der beiden Randausdrücke vorgegeben werden.

ziehungen $H[\zeta] \leqq c_1 D[\zeta] \leqq c_2 J_0[\zeta] \leqq c_3 J_\mu[\zeta]$ bestehen[42a]), außer (5) S. 211 und (30) S. 227, noch die Ungleichung

$$D[\varphi] \leqq c J_0[\varphi] \quad \text{bei} \quad \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma \tag{59}$$

zu beweisen. Zu dem Zweck gehen wir von der Greenschen Formel

$$D[\varphi] = -\iint_G \varphi \Delta \varphi \, dx \, dy + \int_\Gamma \varphi \varphi_n \, ds$$

aus und beachten, daß das letzte Integral als Grenzwert von innen her aufgefaßt, verschwindet, da auf dem Rande $\varphi = 0$ ist und das Integral $\int \varphi_n^2 ds$, über alle Näherungskurven erstreckt, beschränkt bleibt (vgl. (13) S. 217). Es ist also $D[\varphi] \leqq \sqrt{H[\varphi]}\sqrt{2J_0[\varphi]}$ und da, wegen $\varphi = 0$ auf Γ, $H[\varphi] \leqq c D[\varphi]$ ist, folgt $D[\varphi] \leqq \sqrt{c D[\varphi]}\sqrt{2 J_0[\varphi]}$ und damit die gesuchte Ungleichung (59).

Im zweiten Problem (58) ist die Konstante 1 eine Lösung des homogenen Problems. Schließen wir sie durch $\iint_G \varphi \, dx \, dy = 0$ aus, so gilt unter dieser Bedingung die Ungleichung (28) $H[\varphi] \leqq c D[\varphi]$, (S. 227), und wir brauchen nur noch die Ungleichung

$$D[\varphi] \leqq c J_0[\varphi] \quad \text{bei} \quad \int_\Gamma \varphi_n^2 ds = 0 \tag{60}$$

zu beweisen. Wir schließen zu dem Zweck wieder $D[\varphi] = -H[\varphi, \Delta\varphi] \leqq \sqrt{H[\varphi]}\sqrt{2J_0[\varphi]}$ und daraus unter Berücksichtigung von $H[\varphi] \leqq c D[\varphi]$ die gesuchte Ungleichung (60).

Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich der Existenzbeweis für diese beiden Gleichgewichtsprobleme und die zugehörigen Eigenwertprobleme ohne weiteres durchführen.

Um zu beweisen, daß die Randbedingungen $\int_\Gamma (\varphi_s - \bar{u}_s)^2 ds = 0$ bzw. $\int_\Gamma (\varphi_n - \bar{u}_n)^2 ds = 0$ in den Randpunkten, die nicht Eckpunkte sind, auch in der strengen Form $\varphi_s = \bar{u}_s$ bzw. $\varphi_n = \bar{u}_n$ erfüllt sind, legen wir das Koordinatensystem so, daß im Punkte P_h (vgl. die Betrachtungen von S. 221) z. B. im ersten Falle φ_s[43]) mit φ_x zusammenfällt. Wir erhalten dann für den Wert von $\zeta_x = \zeta_s$ in diesem Punkte $[\zeta = u - \bar{u}]$ die Abschätzung

$$\zeta_x^2 = c h^4 \iint_{S_{2h}} (\Delta\Delta\zeta)^2 dx \, dy + c J_{0 S_{2h}}[\zeta] + \frac{c}{h}\int_\Gamma \zeta_x^2 ds \tag{*}$$

[42a]) Diese Beziehungen bilden für alle verwandten Probleme den *gemeinsamen Ausgangspunkt* des Existenzbeweises. Nur ihr *Nachweis* unter Ausnutzung der jeweiligen Vorgaben und Nebenbedingungen gestaltet sich verschieden.

[43]) D. h. die Ableitung von φ nach der Bogenlänge der durch P_h gehenden Näherungskurve Γ_h.

(an Stelle von (20) S. 222). Nun ist, wie man unter Benutzung der Existenz beschränkter Krümmung leicht einsieht, auf dem Randstück (Γ)

$$\zeta_x = \zeta_s + \alpha_h \zeta_y + \beta_h \zeta_y,$$

wo α_h und β_n mit h und von der Größenanordnung h gegen Null gehen. Es ist also:

$$\frac{1}{h}\int_{(\Gamma)} \zeta_x^2\, ds \leqq \frac{1}{h}\int_{(\Gamma)} \zeta_s^2\, ds + c\,\frac{\alpha_h^2+\beta_k^2}{h}\int_{(\Gamma)} (\zeta_x^2+\zeta_y^2)\, ds$$

und der letzte Ausdruck geht mit h gegen Null. Setzen wir die letzte Ungleichung in (*) ein, so erhalten wir eine von der speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängige Abschätzung für den Wert von ζ_s im Punkte P_h. Wie früher (vgl. S. 222, 223) folgt, daß in der Tat am Rande φ_s gegen $\bar{u}_s$ geht. Das Entsprechende gilt natürlich auch im zweiten Falle (58) für φ_n.

Wir hatten früher (vgl. S. 208) gesehen, daß das Problem der eingespannten Platte vom Parameter μ gar nicht mehr abhängt. Hier bei den *halbfreien Fällen gibt es zu jedem Problem eine ganze Schar von gleichwertigen Problemen*, die zu anderen Werten des Parameters μ gehören. Um das einzusehen, gehen wir wieder von dem Integral

$$2\iint_G (\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)\, dx\, dy$$

aus, das im Fall der eingespannten Platte nur von den vorgegebenen Randwerten abhängt. Wir formen es in das Randintegral

$$\int_\Gamma (\varphi_n \Delta\varphi - \varphi_x\varphi_{xn} - \varphi_y\varphi_{yn})\, ds$$

um und beachten, daß nach den Frenetschen Formeln die Gleichungen

$$x_n\Delta\varphi - \varphi_{xn} = +\frac{1}{\varrho}(\varphi_n x_n + \varphi_s x_s) + \varphi_{ss}x_n + \varphi_{ns}x_s,$$

$$y_n\Delta\varphi - \varphi_{yn} = +\frac{1}{\varrho}(\varphi_n y_n + \varphi_s y_s) + \varphi_{ss}y_n + \varphi_{ns}y_s$$

bestehen, wo ϱ der Krümmungsradius bedeutet, der positiv zu nehmen ist, wenn die Randkurve nach innen konkav ist. Es wird also

$$2\iint_G (\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)\, dx\, dy = \int_\Gamma \frac{1}{\varrho}(\varphi_s^2+\varphi_n^2)\, ds + \int_\Gamma (\varphi_{ss}\varphi_n - \varphi_{ns}\varphi_s)\, ds;^{43a)}$$

[43a]) Wir können diese Formel auch aus der auf S. 208 angegebenen erhalten, indem wir dort φ_x und φ_y durch φ_s und φ_n ausdrücken.

ferner ist, vorausgesetzt, daß der Rand Γ keine Ecken besitzt,

$$\int_\Gamma \varphi_{ss}\varphi_n\,ds = -\int_\Gamma \varphi_{ns}\varphi_s\,ds,$$

wie wir nach partieller Integration erkennen.

Wir können demnach im Falle der Randbedingung $\varphi_s = \bar{u}_s$ die Umformung

$$J_\mu[\varphi] = J_\nu[\varphi] + (\mu-\nu)\int_\Gamma \frac{1}{\varrho}\varphi_n^2\,ds + 2(\mu-\nu)\int_\Gamma \bar{u}_{ss}\varphi_n\,ds$$
$$+ (\mu-\nu)\int_\Gamma \frac{1}{\varrho}\bar{u}_s^2\,ds,$$

und im Falle der Randbedingung $\varphi_n = \bar{u}_n$ die Umformung

$$J_\mu[\varphi] = J_\nu[\varphi] + (\mu-\nu)\int_\Gamma \frac{1}{\varrho}\varphi_s^2\,ds - 2(\mu-\nu)\int_\Gamma \bar{u}_{ns}\varphi_s\,ds$$
$$+ (\mu-\nu)\int_\Gamma \frac{1}{\varrho}\bar{u}_n^2\,ds$$

vornehmen, durch die die Gleichwertigkeit eines zum Parameter μ gehörigen Problems mit einem anderen zum Parameter ν gehörigen dargetan wird. Es können auf diese Weise auch Probleme erfaßt werden, wo entweder u_s oder u_n auf Γ vorgegeben ist und in denen der Parameter μ Werte annimmt, die im Gegensatz zu der früheren Forderung (vgl. S. 226) nicht absolut kleiner als Eins sind.

Der wichtigste hierher gehörige Fall tritt für $\nu = 1$ ein. Hier tritt das Integral

$$J_1[\varphi] = \iint_G (\Delta\varphi)^2\,dx\,dy$$

auf, während die Randausdrücke dritter und zweiter Ordnung (S. 224) einfach $-\Delta\varphi_n$ und $-\Delta\varphi$ lauten und der Eckausdruck verschwindet. Die Lösungen der zugehörigen Probleme stehen bekanntlich in einfachem Zusammenhang mit Lösungen entsprechender Probleme zweiter Ordnung, die bei der Frage nach dem Gleichgewicht bzw. nach den Schwingungen einer Membran auftreten.

So erhält man die Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta\Delta\varphi = f; \quad \varphi = \bar{u}, \quad \Delta\varphi = q \text{ auf } \Gamma$$

als Lösung des Problems

$$\Delta\varphi = \psi, \quad \varphi = \bar{u} \text{ auf } \Gamma,$$

wo ψ wiederum aus den Forderungen

$$\Delta\psi = f, \quad \psi = q \text{ auf } \Gamma$$

zu bestimmen ist. Ferner erhält man die Lösung von

$$\Delta\Delta\varphi = f; \quad \varphi_n = \bar{u}_n; \quad \Delta\varphi_n = -p \text{ auf } \Gamma$$

aus den Lösungen der Probleme zweiter Ordnung

$$\Delta\varphi = \psi, \quad \varphi_n = \bar{u}_n \text{ auf } \Gamma,$$
$$\Delta\psi = f, \quad \psi_n = -p \text{ auf } \Gamma.$$

Bei den entsprechenden Schwingungsproblemen

$$\Delta\Delta\varphi - \lambda\varphi = 0$$

unter den Randbedingungen

$$\varphi = 0, \quad \Delta\varphi = 0 \text{ auf } \Gamma \quad \text{bzw.} \quad \varphi_n = 0, \quad \Delta\varphi_n = 0 \text{ auf } \Gamma$$

fallen die Lösungen zusammen mit den Lösungen der Eigenwertprobleme der Differentialgleichung $\Delta\varphi + \sqrt{\lambda}\varphi = 0$ unter den Randbedingungen $\varphi = 0$ bzw. $\varphi_n = 0$ auf Γ und es bietet sich durch unsere obigen Überlegungen die Möglichkeit, diese Probleme zweiter Ordnung auf solche Probleme vierter Ordnung zurückzuführen, in deren Variationsproblem das Integral $J_0[\varphi]$ auftritt, wodurch es eventuell gelingt, schärfere Aussagen z. B. über das Verhalten der Lösungen am Rande zu gewinnen. Auf eine nähere Begründung dieser Zusammenhänge wollen wir hier nicht eingehen.

Beiläufig mag noch bemerkt werden, daß es bei einer freien Platte mit dem Parameter $\mu = 1$ unendlich viele lineare unabhängige Lösungen des homogenen Gleichgewichtsproblems gibt; es ist also Null unendlich vielfacher Eigenwert des zugehörigen Schwingungsproblems. Jede orthonormierte Folge von Potentialfunktionen liefert solche Lösungen[43b]).

2. Probleme mit Zusatzgliedern.

Eine weitere Verallgemeinerung unserer Probleme besteht darin, daß zum Variationsausdruck additiv noch Randintegrale

$$\int_\Gamma \sigma_1\varphi^2\,ds, \quad \int_\Gamma \sigma_2\varphi_s^2\,ds, \quad \int_\Gamma \tau\varphi_n^2\,ds$$

hinzukommen; solchen Integralen begegneten wir schon bei der oben angegebenen Umformung (vgl. S. 243). Diese Integrale stellen die potentiellen Energien von Bindungen dar, die am Rand das Verschwinden der Verschiebung $\varphi = 0$, ihre Konstanz $\varphi_s = 0$ oder das Verschwinden ihrer normalen Ableitung $\varphi_n = 0$ erstreben. Sie ändern die natürlichen Randbedingungen dadurch, daß sie zur Scherkraft — dem Ausdruck dritter Ordnung — um $\sigma_1\varphi - (\sigma_2\varphi_s)_s$ beitragen, zum Biegungsmoment — dem

[43b]) Vgl. D. S. 320.

Ausdruck zweiter Ordnung — um $\tau \varphi_n$ und zu den Eckkräften um $-\sigma_2(\varphi_s^{(2)} - \varphi_s^{(1)})$.

Die so entstehenden Probleme stellen die Verbindung zwischen den Problemen mit freiem und mit festem Rand dar, die aus ihnen entstehen, wenn man σ_1, σ_2, τ verschwinden oder unbeschränkt wachsen läßt.

Alle diese Probleme lassen sich mit unseren Methoden behandeln, jedenfalls, wenn σ_1, σ_2, τ auf dem Rande stückweise stetig und größer als eine positive Konstante sind. Allerdings muß man dazu noch die Integralungleichungen

$$D[\varphi] \leqq c J_0[\varphi] + c \int_\Gamma \varphi^2 ds, \tag{61}$$

$$D[\varphi] \leqq c J_0[\varphi] + c \int_\Gamma \varphi_s^2 ds, \tag{62}$$

$$D[\varphi] \leqq c J_0[\varphi] + c \int_\Gamma \varphi_n^2 ds \tag{63}$$

heranziehen.

Ferner kann zum Variationsausdruck noch ein Integral

$$\int_G \varrho \varphi^2 dg$$

hinzukommen, wo ϱ mit ersten Ableitungen stetig ist und selbst zwischen positiven Schranken liegt. Der Beitrag zur Kraft ist $-\varrho\varphi$. Hier wird man sich bei der Durchführung des Existenzbeweises auf die Ungleichung

$$D[\varphi] \leqq c \sqrt{J_0[\varphi]} \sqrt{H[\varphi]} + c H[\varphi] \tag{64}$$

berufen.

Schließlich kann noch ein Glied

$$\iint_G (\alpha \varphi_x^2 + 2\beta \varphi_x \varphi_y + \gamma \varphi_y^2) dx\, dy$$

wo $c_1(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \leqq \alpha \varphi_x^2 + 2\beta \varphi_x \varphi_y + \gamma \varphi_y^2 \leqq c_2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$ bei geeigneten Konstanten c_1, c_2 ist. Durch einen solchen Ausdruck wird im wesentlichen die „Streckspannung" dargestellt[44]). Lautet das Zusatzglied speziell $c \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx\, dy$, so stellt der Variationsausdruck die potentielle Energie eines Körpers dar, der ein Mittelding zwischen Platte und Membran ist. Zur Kraft tritt noch ein Glied $(\alpha\varphi_x + \beta\varphi_y)_x + (\beta\varphi_x + \gamma\varphi_y)_y$ und zur Scherkraft ein Glied $(\alpha\varphi_x + \beta\varphi_y)x_n + (\beta\varphi_x + \gamma\varphi_y)y_n$.

Bei den entsprechenden Eigenwertproblemen ist nur noch darauf zu achten, ob die Folge der Eigenwerte gegen Unendlich geht. Das ist auf Grund der Maximum-Minimum-Eigenschaft offenbar der Fall, sobald das Problem sich aus dem Schwingungsproblem der freien Platte dadurch er-

[44]) Vgl. A. Nadai, Elastische Platten, S. 272.

zeugen läßt, daß man im Variationsausdruck positive Glieder hinzusetzt, oder daß Randbedingungen gestellt werden. Tritt zu dem normierenden Ausdruck $H[\varphi]$ noch ein Integral $\iint\limits_G (\alpha\varphi_x^2 + 2\beta\varphi_x\varphi_y + \gamma\varphi_y^2)\,dx\,dy$, so genügt es, das unendliche Anwachsen der Eigenwerte für das folgende freie Problem nachzuweisen

$$J_0[\varphi] = \mathrm{Min},$$
$$D[\varphi] = 1, \quad D[\varphi, u^\nu] = 0 \quad (v^\nu = 1, \ldots, n-1).$$

Setzen wir zu dem Zweck $\varphi_x = \psi$ und $\varphi_y = \chi$ und lassen die Bedingung $\psi_y = \chi_x$ fort, so können die Eigenwerte nur abnehmen. Die Eigenwerte des so entstehenden Problems

$$D[\psi] + D[\chi] = \mathrm{Min},$$
$$H[\psi] + H[\chi] = 1, \quad H[\psi, u^\nu] + H[\chi, w^\nu] = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

sind aber, wie man sofort sieht, die je zweimal zu nehmenden Eigenwerte des Problems

$$D[\varphi] = \mathrm{Min},$$
$$H[\varphi] = 1, \quad H[\varphi, u^\nu] = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n-1),$$

deren unbeschränktes Anwachsen bekannt ist.

Treten zum Ausdruck $H[\varphi]$ noch positive Randintegrale auf, so kann man, um das unendliche Anwachsen der Eigenwerte zu zeigen, in derselben Weise vorgehen, wie es Courant bei entsprechenden Problemen zweiter Ordnung getan hat[45]).

Mit den hier gegebenen Andeutungen ist die Reihe der möglichen Verallgemeinerungen nicht erschöpft. Im wesentlichen lassen sich *alle Variationsprobleme, in denen genügend viel Ableitungen zweiter oder höherer Ordnung* vorkommen, mit den hier dargelegten Methoden behandeln. Die Hauptpunkte, in denen sich die Behandlung unterscheiden kann, betreffen die *Integralungleichungen*, die *zum Differentialausdruck gehörige Singularität* (vgl. S. 216) und den Nachweis des *unendlichen Anwachsens der Eigenwerte.*

Wir wollen nun zum Schluß noch die oben angegebenen Integralgleichungen

(61) $$D[\varphi] \leqq c\,J_0[\varphi] + c\int\limits_\Gamma \varphi^2\,ds,$$

(62) $$D[\varphi] \leqq c\,J_0[\varphi] + c\int\limits_\Gamma \varphi_s^2\,ds,$$

(63) $$D[\varphi] \leqq c\,J_0[\varphi] + c\int\limits_\Gamma \varphi_n^2\,ds,$$

[45]) F., S. 45–48.

$$D[\varphi] \leqq c\sqrt{J_0[\varphi]}\sqrt{H[\varphi]} + cH[\varphi] \tag{64}$$

beweisen. Zu dem Zweck gehen wir von der Greenschen Formel

$$D[\varphi] = -H[\varphi, \Delta\varphi] + \int_\Gamma \varphi\varphi_n\, ds$$

aus, aus der wir die Ungleichung

$$D[\varphi] \leqq \sqrt{H[\Delta\varphi]}\sqrt{H[\varphi]} + \sqrt{\int_\Gamma \varphi^2\, ds}\sqrt{\int_\Gamma \varphi_n^2\, ds} \tag{65}$$

ableiten.

Schätzen wir $H[\varphi]$ und $\int_\Gamma \varphi_n^2\, ds$ nach den Ungleichungen (5) S. 211, (13_1) S. 227 ab, so bekommen wir

$$D[\varphi] \leqq \sqrt{2J_0[\varphi]}\sqrt{cD[\varphi] + c\int_\Gamma \varphi^2\, ds} + c\sqrt{\int_\Gamma \varphi^2\, ds}\sqrt[4]{J_0[\varphi]}\sqrt[4]{D[\varphi]}$$
$$+ c\sqrt{\int_\Gamma \varphi^2\, ds}\sqrt{D[\varphi]},$$

woraus wir Ungleichung (61) entnehmen.

Die Ungleichung (62) folgt hieraus sofort, wenn wir erst eine Konstante durch die Forderung festlegen, daß in einem Randpunkte $\varphi = 0$ wird. Dann ist nämlich $\int_\Gamma \varphi^2\, ds \leqq c\int_\Gamma \varphi_s^2\, ds$ (vgl. die Schlußweise von S. 229 unten, indem man die Rolle von $\varphi_0 = 0$ und φ_a vertauscht).

Wollen wir die Ungleichung (63) beweisen, so können wir eine additive Konstante durch die Bedingungen $\iint_G \varphi\, dx\, dy = 0$ festlegen. Dann können wir in (65) $\int_\Gamma \varphi^2\, ds$ nach (13) und dann $H[\varphi]$ nach (28) S. 227 abschätzen und erhalten

$$D[\varphi] \leqq c\sqrt{2J_0[\varphi]}\sqrt{D[\varphi]} + c\sqrt{\int_\Gamma \varphi_n^2\, ds}\sqrt{D[\varphi]},$$

woraus wir die gesuchte Ungleichung entnehmen.

Schätzen wir schließlich die Integrale $\int_\Gamma \varphi^2\, ds$, $\int_\Gamma \varphi_n^2\, ds$ vermittels (13) und (13_1) S. 227 ab, so erhalten wir aus (65)

$$D[\varphi] \leqq \sqrt{2J_0[\varphi]}\sqrt{H[\varphi]}$$
$$+ c\left(\sqrt[4]{D[\varphi]}\sqrt[4]{H[\varphi]} + \sqrt{H[\varphi]}\right)\left(\sqrt[4]{J_0[\varphi]}\sqrt[4]{D[\varphi]} + \sqrt{D[\varphi]}\right)$$

und daraus die Ungleichung (64).

(Eingegangen am 19. 11. 1926.)