Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen.

Von

Kurt Friedrichs und Hans Lewy in Göttingen.

Die folgenden Betrachtungen handeln von der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems für hyperbolische lineare partielle Differentialgleichungen. Bei den üblichen Beweisen werden gewisse Voraussetzungen über das Verhalten der Anfangswerte und der Lösung im *unendlichen* gemacht. Andrerseits zeigt aber die in gewissen Spezialfällen explizit bekannte Form der Lösung, daß ihr Wert in irgendeinem Punkt nur von den Vorgaben auf einem im *endlichen* liegenden Stück der Anfangslinie abhängt, daß also das Verhalten der Lösung im unendlichen ganz belanglos ist. Es ist daher zu erwarten, daß man den oben erwähnten Beweis für die Eindeutigkeit so umgestalten kann, daß er von dieser Tatsache Rechenschaft gibt [1]). In der neuen Form läßt sich der Beweis auf die allgemeine hyperbolische lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (auch mit nichtkonstanten Koeffizienten) übertragen; desgleichen auf gewisse Systeme von solchen Differentialgleichungen mit mehreren gesuchten Funktionen, wie sie z. B. in der Kristalloptik vorkommen. Damit ergibt sich auch für diese Anfangswertprobleme eine Antwort auf die Frage, von welchem Teil der Anfangswerte die Lösung in irgendeinem Punkte allein abhängen kann.

---

[1]) Nach Einlieferung dieser Arbeit haben wir erfahren, daß A. Rubinowicz auf Grund derselben Überlegung, die wir hier angestellt haben, die Eindeutigkeit der Lösungen der Maxwellschen Gleichungen nachgewiesen hat. Phys. Zeitschr. 27 (1926), S. 707. Vgl. auch Math. Annalen 96 (1927).

1.

Um uns zu orientieren, gehen wir aus von der einfachsten hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

für die Funktion u der beiden unabhängigen Variablen t und x. Wir stellen für sie das Anfangswertproblem, indem wir die Werte der Funktion u und ihrer ersten Ableitungen auf einer mit stetiger Tangente versehenen Kurve der (x, t)-Ebene vorschreiben und nach ihrer Fortsetzung in die (x, t)-Ebene gemäß der Differentialgleichung (1) fragen. Um zu zeigen, daß es höchstens *eine* Lösung geben kann, genügt es bekanntlich wegen der Linearität, nachzuweisen, daß die Lösung überall verschwindet, wenn die Anfangswerte verschwinden.

Wir betrachten das Integral

$$2 \iint_G u_t (u_{tt} - u_{xx})\, dx\, dt \tag{2}$$

über ein Gebiet G der (x, t)-Ebene, welches für eine Lösung der Differentialgleichung (1) offenbar verschwindet. Dieses Integral können wir folgendermaßen umformen:

$$\iint_G \{(u_t^2)_t + (u_x^2)_t - 2\,(u_x u_t)_x\}\, dx\, dt,$$

und dies läßt sich wiederum als folgendes Randintegral schreiben:

$$\int_\Gamma \left\{(u_t)^2 \frac{\partial t}{\partial n} + (u_x)^2 \frac{\partial t}{\partial n} - 2\, u_x u_t \frac{\partial x}{\partial n}\right\} ds, \tag{3}$$

wobei s die Bogenlänge auf der Randkurve Γ und $\frac{\partial t}{\partial n}$ und $\frac{\partial x}{\partial n}$ die Ableitungen von t und x in Richtung der äußeren Normalen bedeuten. Der Integrand stellt eine quadratische Form in den Variablen u_x und u_t dar. Die Bedingung dafür, daß diese Form definit ist, lautet:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial n} & -\frac{\partial x}{\partial n} \\ -\frac{\partial x}{\partial n} & \frac{\partial t}{\partial n} \end{vmatrix} > 0. \tag{4}$$

Wir verlangen nun von unserer Anfangskurve A, daß sie dieser Ungleichungsbedingung genügt und betrachten ein einfach zusammenhängendes Gebiet G (vgl. Fig. 1), das außer von einem Teil der Anfangskurve von einer anderen Kurve B begrenzt wird, die gleichfalls der Bedingung (4) genügt, einer, wie wir sagen wollen, raumartigen Kurve. Da auf der Anfangskurve u_x und u_t verschwinden, reduziert sich unser Rand-

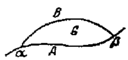

Fig. 1.

integral (3) auf ein Integral, das lediglich längs B zu erstrecken ist. Da der Integrand eine definite Form in u_x und u_t darstellt, der Wert des Integrals aber null ist, müssen auf der Linie B u_x und u_t verschwinden. Da wir die Linie B stetig in die Linie A so überführen können, daß in den Zwischenstadien stets die Ungleichung (4) erfüllt ist, so folgt, daß in dem ganzen Gebiet G u_x und u_t verschwinden. Daraus ergibt sich, daß auch die Funktion u selber in G identisch verschwindet.

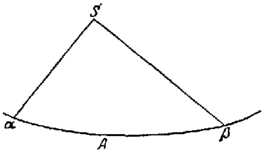

Fig. 2.

Den Schluß, daß u_x und u_t verschwinden, können wir offenbar in derselben Weise durchführen für das ganze Innere des krummlinigen Dreiecks (vgl. Fig. 2), das sich ergibt, wenn man von den Endpunkten α und β des Stückes A die beiden — offenbar geraden — Linien zieht, die der Gleichung

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial n} & -\dfrac{\partial x}{\partial n} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial n} & \dfrac{\partial t}{\partial n} \end{vmatrix} = 0$$

genügen und sich in einem Punkte S treffen (siehe Figur). Dies Dreieck können wir in der Grenze dadurch entstanden denken, daß wir die Linie B so weit wie möglich „aufblasen“, ohne die Bedingung (4) zu verletzen.

Daß die Lösung u in der Spitze S verschwindet, können wir auch dadurch schließen, daß wir von vornherein dies Gebiet zugrunde legen. Dann reduziert sich das Integral (3) auf die Summe der beiden folgenden Integrale über die beiden „Charakteristiken“ βS und $S\alpha$:

$$\sqrt{2}\left(\int\limits_{\beta S}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 ds + \int\limits_{S\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 ds\right) = 0.$$

Hieraus folgt $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$, wobei s die Bogenlänge auf einer Charakteristik bedeutet; das heißt $u = 0$ auf den beiden Charakteristiken und insbesondere in der Spitze S.

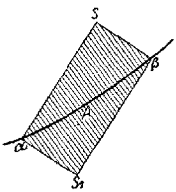

Fig. 3.

Unsere Betrachtungen lehren uns, daß zwei Lösungen der Differentialgleichung (1), deren Anfangswerte auf dem Bogen $\alpha\beta$ der Anfangslinie übereinstimmen, auch im ganzen Innern des „Charakteristikendreiecks“ $S\alpha\beta$ übereinstimmen. Dasselbe gilt natürlich für das Charakteristikendreieck $S_1\alpha\beta$ (vgl. Fig. 3), das durch Ziehen der Charakteristiken durch α und β nach *unten* entsteht. Mit anderen Worten:

Ändern wir die Anfangswerte außerhalb von $\alpha\beta$, so ändert sich die Lösung nicht innerhalb des zu $\alpha\beta$ gehörigen Charakteristikendreiecks.

Wollen wir jetzt umgekehrt von irgendeinem Punkte S feststellen, von welchem Teil der Anfangskurve der Wert der Lösung in S höchstens abhängt, so brauchen wir also bloß durch diesen Punkt die beiden Charakteristiken zu ziehen, bis sie die Anfangskurve schneiden; der ausgeschnittene Teil ist das gesuchte Gebiet der Abhängigkeit.

Das soeben geschilderte Verhalten der Lösung u der Differentialgleichung (1) erweist sich in der Folge als typisch für die ins Auge gefaßten Verallgemeinerungen.

2.

Wir betrachten zunächst solche Differentialgleichungen, die durch Nullsetzen der Eulerschen Ableitung einer quadratischen Form F in den ersten Ableitungen zweier Funktionen u und v der unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_m, t$ entstehen. Wir beschränken uns der Einfachheit halber[2]) auf eine Form von der Gestalt

$$F = a_{ik}\, u_i u_k + b_{ik}\, u_i v_k + c_{ik}\, v_i v_k - a\, u_t^2 - c\, v_t^2 \quad ^{3)}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_{ik}, \ldots, a, c$.

Hier bedeutet

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad v_t = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Wir verlangen für a_{ik} und c_{ik} die Gleichungen

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki},$$

was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, und fordern, daß die Form

$$\overline{F}(u_i, v_i) = a_{ik}\, u_i u_k + b_{ik}\, u_i v_k + c_{ik}\, v_i v_k$$

eine nicht ausgeartete positiv definite Form in den Variablen $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ ist. Die Bedeutung dieser Voraussetzungen, die unter anderem den hyperbolischen Charakter der aus der Form F entstehenden Eulerschen Differentialgleichungen garantieren, wird im Laufe dieses Paragraphen von selbst klar werden. Diese Differentialgleichungen lauten:

$$(5) \qquad \begin{aligned} 0 &= -[F]_u = 2a_{ik}\, u_{ik} + b_{ik}\, v_{ik} - 2a\, u_{tt} \\ 0 &= -[F]_v = 2c_{ik}\, v_{ik} + b_{ik}\, u_{ik} - 2c\, v_{tt}, \end{aligned}$$

wobei $u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ldots$ gesetzt ist.

[2]) Man beachte das Fehlen von Gliedern der Form $u_i u_t, \ldots, u_t v_t$.

[3]) Hier und im folgenden ist wie üblich über doppelt auftretende Indizes von 1 bis m zu summieren.

Wir denken uns nunmehr auf einem mit stetigen Normalen versehenen n-dimensionalen Flächenstück A des $m+1$-dimensionalen (x_i, t)-Raumes, über dessen Natur wir später noch genauere Voraussetzungen machen werden, die Werte der Funktionen u und v und ihrer ersten Ableitungen vorgegeben, und fragen nach ihrer Fortsetzung in den $(x_i\, t)$-Raum gemäß den Differentialgleichungen (5). Es genügt aus dem in § 1 erörterten Grunde, die Anfangswerte als null anzunehmen.

Nunmehr bilden wir für die Lösung unseres Anfangswertproblems unter Beachtung der Identität

$$u_{ik} v_t + v_{ik} u_t = (u_i v_t)_k + (v_k u_t)_i - (u_i v_k)_t$$

die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= u_t [F]_u + v_t [F]_v \\ &= (a_{ik} u_i u_k + b_{ik} u_i v_k + c_{ik} v_i v_k + a u_t^2 + c v_t^2)_t \\ &\quad - a_{ik}(u_i u_t)_k - a_{ik}(u_k u_t)_i - c_{ik}(v_i v_t)_k - c_{ik}(v_k v_t)_i \\ &\quad - b_{ik}(u_i v_t)_k - b_{ik}(v_k u_t)_i \end{aligned}$$

und integrieren die rechte Seite über ein einfach zusammenhängendes Gebiet G des (x_i, t)-Raumes, das von zwei Flächen mit stetigen Normalen berandet wird. Dies Integral läßt sich offenbar in folgendes Randintegral überführen:

$$\int_\Gamma J\, d\omega = \int_\Gamma \left[\begin{array}{l} (a_{ik} u_i u_k + b_{ik} u_i v_k + c_{ik} v_i v_k + a u_t^2 + c v_t^2) \dfrac{\partial t}{\partial n} \\ - a_{ik}(u_i u_t) \dfrac{\partial x_k}{\partial n} - a_{ik}(u_k u_t) \dfrac{\partial x_i}{\partial n} - c_{ik}(v_i v_t) \dfrac{\partial x_k}{\partial n} \\ - c_{ik}(v_k v_t) \dfrac{\partial x_i}{\partial n} - b_{ik}(u_i v_t) \dfrac{\partial x_k}{\partial n} - b_{ik}(v_k u_t) \dfrac{\partial x_i}{\partial n} \end{array} \right] d\omega,$$

wobei $d\omega$ das Oberflächenelement und $\frac{\partial x_i}{\partial n}, \frac{\partial t}{\partial n}$ die Ableitungen von x_i und t in Richtung der äußeren Normalen der Oberfläche Γ bedeuten.

Fig. 4.

Wählen wir jetzt als die eine der beiden Flächen des Randes Γ ein einfach zusammenhängendes Stück der Anfangsfläche A, so reduziert sich das Randintegral auf ein solches, das nur über die andere Fläche B zu erstrecken ist, da der Integrand auf A verschwindet.

Wir können jetzt die Fläche B so wählen, daß der Integrand J definit wird und also verschwindet, da das ganze Integral verschwindet. Um dies einzusehen, schreiben wir den Integranden in folgender Form:

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
J = {} & \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}}\, \overline{F}\left(u_i \frac{\partial t}{\partial n} - u_t \frac{\partial x_i}{\partial n},\; v_i \frac{\partial t}{\partial n} - v_t \frac{\partial x_i}{\partial n}\right) \\
& + \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}} \left(a \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial n} \frac{\partial x_k}{\partial n}\right) u_t^2 \\
& - \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}}\, b_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial n} \frac{\partial x_k}{\partial n}\, u_t v_t \\
& + \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}} \left(c \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - c_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial n} \frac{\partial x_k}{\partial n}\right) v_t^2 .
\end{aligned}
$$

Verlangen wir nun von den Normalen der Fläche B und der Einfachheit halber auch von denen der Fläche A, daß die Bedingungen der „Raumartigkeit"

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&1.\quad D = \begin{vmatrix} a \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial n} \frac{\partial x_k}{\partial n} & -\frac{b_{ik}}{2} \frac{\partial x_i}{\partial n} \frac{\partial x_k}{\partial n} \\ -\frac{b_{ik}}{2} \frac{\partial x_i}{\partial n} \frac{\partial x_k}{\partial n} & c \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - c_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial n} \frac{\partial x_k}{\partial n} \end{vmatrix} > 0 \\
&2.\quad E = a \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial n} \frac{\partial x_k}{\partial n} + c \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - c_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial n} \frac{\partial x_k}{\partial n} > 0
\end{aligned}
$$

erfüllt sind, so ergibt sich, daß J eine nicht ausgeartete positiv definite quadratische Form der Variablen $u_i \frac{\partial t}{\partial n} - u_t \frac{\partial x_i}{\partial n}$, $v_i \frac{\partial t}{\partial n} - v_t \frac{\partial x_i}{\partial n}$, u_t, v_t ist, woraus folgt, daß alle diese Ausdrücke verschwinden, daß also, da wegen $(7)_2$ $\frac{\partial t}{\partial n} \neq 0$ sein muß, sämtliche Ableitungen von u und v auf B null sind.

Dasselbe kann man ebenso wie in § 1 nunmehr für das ganze Innere des von A und B eingeschlossenen Gebietes G beweisen. Und somit folgt aus dem Verschwinden von u und v auf der Fläche A das Verschwinden im ganzen Gebiet G.

Wenn wir jetzt umgekehrt fragen, von welchem Teil der Anfangswerte der Wert der Lösungen u, v in einem Punkte S abhängt, brauchen wir nur durch den Punkt S als Spitze den „charakteristischen" Kegel, d. h. denjenigen Kegel zu ziehen, dessen Gleichung in „Ebenen"koordinaten $D = 0$ lautet. Dieser Kegel schneidet aus der Anfangsfläche A, da diese raumartig angenommen ist, ein im Endlichen liegendes Stück C heraus. Nimmt man alle die Mantellinien, die den Punkt S mit der äußeren Berandung von C verbinden, so bilden sie zugleich mit dem Stück C ein kegelartiges Gebiet G. Dieses Gebiet [4]) besteht aus endlich vielen der

[4]) Über mögliche Gestalten des charakteristischen Kegels vgl. G. Herglotz, Sitzungsberichte der sächs. Akademie d. Wissensch. 1926.

oben von uns zugrunde gelegten Art, nur daß nicht auf dem Kegelmantel $D > 0$ ist, sondern $D = 0$, und daß anstatt $E > 0$ eventuell $E = 0$ ist. Infolgedessen können wir nicht mehr schließen, daß auf der Mantelfläche B alle Ableitungen von u und v verschwinden; jedenfalls aber sind wir sicher, daß die Variablen, die in $\overline{F}$ in (6) auftreten, nämlich $u_i \frac{\partial t}{\partial n} - u_t \frac{\partial x_i}{\partial n}$, $v_i \frac{\partial t}{\partial n} - v_t \frac{\partial x_i}{\partial n}$ einzeln verschwinden. Diese Ausdrücke sind aber unter der Bedingung $D = 0$ je m unabhängige Ableitungen der Funktionen u und v nach Richtungen, die nur auf der m-dimensionalen Mantelfläche $D = 0$ liegen [5]). Daraus folgt wiederum, daß auf der ganzen Mantelfläche und insbesondere in der Spitze S u und v verschwinden. Das heißt, der Wert der Lösung des Anfangswertproblems unserer Differentialgleichungen (5) im Punkte S hängt höchstens von den Vorgaben auf dem Stück C der Anfangsfläche A ab und ist eindeutig durch sie bestimmt.

Daß die Lösung wirklich im ganzen Innern des charakteristischen Kegels verschwindet, wenn sie auf C mit ersten Ableitungen Null ist, ließe sich wieder dadurch zeigen, daß man das Stück C durch raumartige Flächen so in den äußeren Kegelmantel überführt, daß dadurch das ganze Kegelinnere überstrichen wird.

Wir bemerken noch zum Schluß dieses Paragraphen, daß unser Anfangswertproblem für die Differentialgleichungen (5) gleichwertig ist mit einem Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung vierter Ordnung in *einer* Funktion, entweder u oder v. Die betreffende Differentialgleichung, die durch Elimination aus den Gleichungen (5) entsteht, lautet

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 2a_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} - 2a\frac{\partial^2}{\partial t^2} & b_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} \\ b_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} & 2c_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} - 2c\frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{vmatrix} \cdot u = 0,$$

wobei wir eine symbolische Schreibweise verwandt haben, deren Bedeutung auf der Hand liegt. Die zugehörige charakteristische Gleichung ist, wie man sieht, unsere Gleichung $D = 0$ [vgl. $(7)_1$]. Damit ist jedenfalls für solche Typen von Differentialgleichungen vierter Ordnung (bzw. höherer gerader Ordnung entsprechend mehr gesuchten Funktionen in den ursprünglichen Gleichungen) nachgewiesen, daß der Wert der Lösung in einem Punkte S eindeutig bestimmt ist durch die Vorgaben auf demjenigen Stück der Anfangsfläche, das von dem charakteristischen Kegel durch S als Spitze ausgeschnitten wird.

---

[5]) Der Ausdruck $u_i \frac{\partial t}{\partial n} - u_t \frac{\partial x_i}{\partial n}$ stellt die Ableitung von u nach einer Richtung dar, deren Projektion in den $(x_1, \ldots, x_m)$-„Raum" parallel zur x_i-Achse ist; daraus folgt sofort die Unabhängigkeit dieser Richtungen.

Der Fall einer Differentialgleichung für *eine* Funktion ist offenbar als Grenzfall in unserem Ansatz enthalten, während andererseits die Übertragung auf den Fall von mehr Funktionen sich ohne weiteres durchführen läßt.

3.

Ein Beispiel zu den vorhergehenden Überlegungen bieten die *Differentialgleichungen der Kristalloptik*[6]). Es handelt sich hier um eine quadratische Form in den ersten Ableitungen der drei Funktionen u, v, w der Variablen x, y, z, t, den Komponenten des elektrischen Vektors,

$$F \equiv \alpha_1 (u_y - v_x)^2 + \alpha_2 (v_z - w_y)^2 + \alpha_3 (w_x - u_z)^2 - u_t^2 - v_t^2 - w_t^2,$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0.$$

Wir stellen in entsprechender Weise das Anfangswertproblem und können alle Schlüsse wie vorher ausführen, mit Ausnahme desjenigen, daß auf der hier dreidimensionalen Fläche B alle Ableitungen erster Ordnung von u, v, w verschwinden, da die Form $\overline{F}$ ausgeartet ist. Wir können aber jedenfalls schließen, daß die zeitlichen Ableitungen u_t, v_t, w_t auf B null sind. Die Anfangsfläche und die Fläche B ist hier eingeschränkt durch die folgenden, den Relationen (7) entsprechenden Bedingungen für ihre Normalen:

$$(9)\quad 1.\quad 0 < D \equiv \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - \alpha_1 \left(\frac{\partial y}{\partial n}\right)^2 - \alpha_3 \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)^2 & \alpha_1 \frac{\partial y}{\partial n}\cdot\frac{\partial x}{\partial n} & \alpha_3 \frac{\partial z}{\partial n}\cdot\frac{\partial x}{\partial n} \\ \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial n}\cdot\frac{\partial y}{\partial n} & \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - \alpha_2 \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)^2 - \alpha_1 \left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2 & \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial n}\cdot\frac{\partial y}{\partial n} \\ \alpha_3 \frac{\partial x}{\partial n}\cdot\frac{\partial z}{\partial n} & \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial n}\cdot\frac{\partial z}{\partial n} & \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - \alpha_3 \left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2 - \alpha_2 \left(\frac{\partial y}{\partial n}\right)^2 \end{vmatrix}$$

2. Die Summe der zweireihigen Hauptminoren ist > 0.

3. Die Summe der einreihigen Hauptminoren ist > 0.

Die „Ebene" $t = 0$ z. B. genügt diesen Bedingungen.

Die Gleichung des charakteristischen Kegels, den wir durch einen Punkt S ziehen, lautet in Ebenenkoordinaten $D = 0$. Die Determinante D zerfällt in zwei Faktoren

$$D = \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 \cdot D_1.$$

Infolgedessen enthält der charakteristische Kegel $D = 0$ noch die Schar der Ebenen, die der t-Achse parallel sind. Der andere Anteil, der Kegel mit der Gleichung $D_1 = 0$, zerfällt bekanntlich in zwei sich berührende

[6]) Vgl. hierzu z. B. Enzyklopädie der math. Wissensch. IV 4, 30, Artikel von E. Hellinger über Mechanik der Kontinua, Nr. 13.

Kegel. Für den äußeren Mantel gelten die Ungleichungen $(9)_2$ und $(9)_3$ (eventuell mit dem Gleichheitszeichen).

Wir betrachten jetzt das Stück C, das der äußere Kegelmantel aus der Anfangsfläche herausschneidet, und das Gebiet G, das von dem äußeren Mantel und dem Stück C umschlossen wird. Da jeder Punkt des Inneren von G Punkt einer Fläche B sein kann, verschwinden u_t, v_t, w_t überall im Inneren von G. Zieht man nun im Punkte S die Parallele zur t-Achse, so trifft sie, wie man leicht sieht, das Stück C, ohne den Kegelmantel zu durchsetzen. Hieraus ergibt sich, daß u_t, v_t, w_t in der Spitze S verschwinden, da sie auf dem Stück C der Anfangsfläche verschwinden. Das heißt, der Wert irgendeiner Lösung des Anfangswertproblems der Differentialgleichungen der Kristalloptik hängt höchstens von den Vorgaben auf dem Stück C der Anfangsfläche A ab und ist eindeutig durch sie bestimmt.

4.

Wir zeigen nunmehr, daß die Überlegungen der vorigen Paragraphen sich auch durchführen lassen, wenn die Differentialgleichungen

1. noch *lineare Zusatzglieder* in der Funktion u und ihren ersten Ableitungen enthalten;

2. wenn außerdem die Koeffizienten *nicht mehr konstant* sind, sondern Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind.

Wir beschränken uns dabei auf einen Spezialfall mit typischem Verhalten. Es sei eine hyperbolische Differentialgleichung

$$L[u] \equiv a\,u_{tt} - b\,u_{xx} + c\,u_t + d\,u_x + e\,u = 0 \tag{10}$$

gegeben, in der also $a > 0$ und $b > 0$ ist; wir setzen dabei voraus, daß die Koeffizienten a, b, c, d, e innerhalb eines gewissen Bereiches der Variablen x, t — auf den wir uns ein für allemal beschränken — mit ihren ersten Ableitungen stetig sind.

Wir nehmen an, daß auf einer raumartigen Anfangskurve A, das heißt auf einer solchen, für deren Normalenkomponenten $\frac{\partial t}{\partial n}$, $\frac{\partial x}{\partial n}$ die charakteristische Form

$$a\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - b\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2 > 0 \tag{10$_a$}$$

ist, die Werte einer Lösung u unserer Differentialgleichung (10) null sind mitsamt ihren ersten Ableitungen. Wir betrachten nun eine weitere raumartige Kurve B, die die Anfangskurve A in den Punkten α und β schneidet (vgl. Fig. 1), und ziehen wieder das über das eingeschlossene Gebiet G erstreckte Integral

$$2\iint_G \dot{u}\,L[u]\,dx\,dt$$

heran, wobei $\dot{u}$ die Ableitung von u in einer zeitartigen Richtung ist, d. h. in einer Richtung, die zu einer raumartigen Kurve (bzw. bei mehr Variablen zu einer raumartigen Fläche) normal ist. Man sieht, daß in unserem Spezialfall jede Parallele zur t-Achse zeitartig ist; daher können wir $\dot{u} = u_t$ wählen. Wir formen nun das Integral

$$0 = 2\iint\limits_G u_t L[u]\,dx\,dt$$

wie früher in § 1 um und erhalten

$$\begin{aligned} 0 = &\int\limits_\Gamma \left[a\, u_t^2 \frac{\partial t}{\partial n} + b\, u_x^2 \frac{\partial t}{\partial n} - 2b\, u_x u_t \frac{\partial x}{\partial n}\right] ds \\ (11) \qquad &- \iint\limits_G [a_t u_t^2 + b_t u_x^2 - 2b_x u_x u_t]\,dx\,dt \\ &+ 2\iint\limits_G [c\, u_t^2 + d\, u_x u_t + e\, u\, u_t]\,dx\,dt, \end{aligned}$$

wobei Γ wieder der Rand des Gebiets G ist. Der Anteil des Randintegrals, der von dem Teil $(\alpha\beta)$ der Anfangskurve A herrührt, verschwindet wegen der Anfangsbedingungen. Den Anteil, der von der Kurve B herrührt, können wir offenbar unabhängig von der Funktion u nach unten durch

$$M\int\limits_B (u_t^2 + u_x^2)\,ds$$

abschätzen, da der Integrand, als Form in u_x und u_t betrachtet, nicht ausgeartet positiv definit ist. Die Konstante $M > 0$ hängt nur von den Werten von a, b, $\frac{\partial t}{\partial n}$, $\frac{\partial x}{\partial n}$ auf B ab. Die Gebietsintegrale in (11) können wir offenbar nach der Schwarzschen Ungleichung nach oben durch das Integral

$$N\iint\limits_G (u_t^2 + u_x^2 + u^2)\,dt\,dx$$

abschätzen, wobei $N > 0$ (ebenso wie alle folgenden Konstanten) nicht von der Funktion u abhängen. Da aber die Funktion u auf A verschwindet, gilt die leicht zu beweisende [7]) Ungleichung

$$\iint\limits_G u^2\,dx\,dt \leqq P\iint\limits_G (u_x^2 + u_t^2)\,dx\,dt \qquad (P > 0),$$

so daß wir schließlich aus unserer Gleichung (11) die Ungleichung

$$(12) \qquad M\int\limits_B (u_t^2 + u_x^2)\,ds \leqq Q\iint\limits_G (u_t^2 + u_x^2)\,dt\,dx \qquad (Q > 0)$$

erhalten.

---

[7]) Vgl. z. B. Friedrichs, Randwertprobleme der elastischen Platten I Nr. 2. 2., dieses Heft, S. 212.

Wir denken uns nun das Stück $(\alpha\beta)$ der Anfangskurve A durch eine Schar von *raumartigen* Kurven C mit stetiger Normalen, die sämtlich durch die Punkte α und β gehen und sich im übrigen nicht schneiden, mit ihren Normalen stetig in die Kurve B übergeführt. Jede Kurve C der Schar schließt mit dem Stück $(\alpha\beta)$ ein Gebiet D ein, für das wiederum eine Ungleichung der Form (12) mit gewissen anderen Konstanten M und Q gilt. Aus Stetigkeitsgründen erkennt man aber leicht, daß für alle Gebiete D die Ungleichung

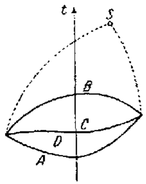

Fig. 5.

$$(13)\qquad \overline{M}\int_C (u_t^2 + u_x^2)\,ds \leqq \overline{Q}\iint_D (u_t^2 + u_x^2)\,dt\,dx$$

mit *denselben* festen positiven Konstanten $\overline{M}$, $\overline{Q}$ gilt.

Aus dem Bestehen dieser Ungleichungen folgt nunmehr, daß u_t und u_x im Gebiet G verschwinden. Um das einzusehen, ziehen wir etwa durch den Mittelpunkt des Stückes (α, β) die Parallele zur t-Achse und führen als neue Veränderliche erstens die Bogenlänge auf der Kurve C und zweitens die Werte von t im Schnittpunkt mit der eben beschriebenen Geraden ein. Da die Kurven C sämtlich raumartig sind, ist der Winkel ihrer Tangente mit der t-Richtung größer als ein gewisser fester positiver Winkel. Integrieren wir nun das Integral $\int_C (u_t^2 + u_x^2)\,ds$ nach der so definierten Variablen t von der Anfangskurve A bis zur Kurve B, so läßt sich infolgedessen das so entstehende Doppelintegral nach unten durch $R\iint_G (u_t^2 + u_x^2)\,dt\,dx$ abschätzen, wo $R > 0$ ist und nicht vom Gebiet G abhängt. Integrieren wir aber das Integral $\iint_D (u_t^2 + u_x^2)\,dt\,dx$ nach der neuen Variablen t, so können wir den so entstehenden Ausdruck durch $(t_B - t_A)\iint_G (u_t^2 + u_x^2)\,dt\,dx$ nach oben abschätzen, so daß wir schließlich aus unserer Ungleichung (13) die Ungleichung

$$(14)\qquad \iint_G (u_t^2 + u_x^2)\,dt\,dx \leqq \frac{\overline{Q}\,|t_B - t_A|}{\overline{M}\cdot R}\iint_G (u_t^2 + u_x^2)\,dt\,dx$$

erhalten. Wählen wir nun die Kurve B so nahe an A, daß $|t_B - t_A| < \frac{\overline{M}\cdot R}{\overline{Q}}$ ist, so kann unsere Ungleichung offenbar nur bestehen, wenn das Integral über G selbst verschwindet, d. h. wenn u_t und u_x gleich null sind, woraus dann auch $u = 0$ folgt.

Denken wir uns nun durch einen Punkt S die beiden Charakteristiken, d. h. die Linien mit der Gleichung $a\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)^2 - b\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2 = 0$, gezogen, bis sie die Anfangskurve A in den Punkten α und β schneiden, so wollen wir das Stück $(\alpha\beta)$ der Anfangskurve A durch eine Schar von raumartigen sich außer in den Punkten α und β nicht schneidenden Kurven C stetig[8]) in die beiden Charakteristiken S_α und S_β überführen. Nach demselben Verfahren wie oben schreiben wir jeder Kurve C eindeutig einen Wert t_C zu. Dann können wir zu jeder Kurve C eine andere Kurve $B(C)$ unserer Schar mit $t_B > t_C$ angeben, so daß in dem von C und $B(C)$ eingeschlossenen Gebiet die Funktion u verschwindet, sobald sie mit ihren ersten Ableitungen auf C verschwindet. Nach einem bekannten Schlußverfahren folgt daraus, daß u im ganzen Inneren des Dreiecks $S\alpha\beta$ verschwindet, wenn u mit ersten Ableitungen auf A verschwindet.

Im Falle der allgemeinsten linearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung liegen die Verhältnisse ähnlich, so daß die Beweise ohne irgendwelche wesentliche Änderung sinngemäß übertragen werden können. Dasselbe gilt für Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, sobald man verlangt, daß die Glieder in den Ableitungen zweiter Ordnung zu einem Variationsproblem gehören (was gewisse Symmetriebedingungen in diesen Gliedern bedeutet), und wenn man geeignete Voraussetzungen über die Natur der charakteristischen Form macht, die den hyperbolischen Charakter des Systems ausdrücken (entsprechend den in § 2 gestellten Definitheitsforderungen).

Damit ist aber der Beweis geführt, daß die Lösungen solcher Differentialgleichungen in bezug auf ihre Abhängigkeit und Eindeutigkeit von den Anfangswerten dasselbe Verhalten zeigen wie die Lösungen der Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ohne Zusatzglieder.

5.

Schlußbemerkung. Die Ergebnisse dieser Arbeit sind von Nutzen, wenn man die Lösung des Anfangswertproblems durch Integration über Einzellösungen explizite herzuleiten sucht (wie das z. B. durch die Methode des Fourierschen Integrals oder durch die damit eng zusammenhängende durch G. Herglotz[9]) jüngst angewandte Methode geschieht). Man weiß nämlich jetzt von vornherein, daß es genügt, das Integral über die Einzellösungen nur über das Abhängigkeitsgebiet zu erstrecken.

Als einfachstes Beispiel erwähnen wir das Problem der Differentialgleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$ mit den Anfangsbedingnngen $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = g(x)$. Die Methode des Fourierschen Integrals führt zu der Auflösungsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+q)\, dq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi q} \frac{\sin t\xi}{\xi}\, d\xi.$$

[8]) Bei diesem Übergang sollen sich nicht nur die Kurven, sondern auch die Normalen stetig ändern, natürlich außer an der Spitze S.

[9]) A. a. O.

Aus unseren Ergebnissen entnehmen wir nunmehr sofort, daß es genügt, sich bei der Integration nach der Variablen q auf das Gebiet $-t \leqq q \leqq t$ zu beschränken, mit anderen Worten, es folgt ganz von selbst, daß der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi q} \frac{\sin t\xi}{\xi} d\xi$$

für $q > t$ verschwindet.

In diesem Falle ist das Ergebnis natürlich auch sehr leicht direkt zu gewinnen. Anders aber liegt es in komplizierteren Fällen, vor allem bei mehr unabhängigen Veränderlichen, z. B. im Falle der Kristalloptik, wo es sich um mehrfache Fouriersche Integrale handelt, die zunächst über den ganzen unendlichen Raum zu erstrecken sind. Der Nachweis, daß diese Integrale außerhalb des Abhängigkeitsgebietes verschwinden, bildet gerade eine charakteristische Schwierigkeit bei Verwendung der Methode des Fourierschen Integrals; unsere Ergebnisse erlauben uns sofort, diesen Schluß zu ziehen.

(Eingegangen am 1. 12. 1926.)