Math. Ann. 255, 259–271 (1981)

Mathematische Annalen

Zur analytischen Beschreibung des Raumes der Schottky-Mumford-Kurven

L. Gerritzen

Institut für Mathematik der Universität, Universitätsstrasse 150, D-4630 Bochum, Bundesrepublik Deutschland

Mit $\mathcal{M}_n$ bezeichnen wir den Raum der Schottky-Mumford-Kurven vom Geschlecht $n \geqq 2$ über einem nichtarchimedischen, vollständigen und algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}$. Jeder solchen Kurve $M \in \mathcal{M}_n$ ist auf kanonische Weise ein endlicher Graph $P(M)$ zugeordnet, dessen zyklomatische Zahl n ist und bei dem die Valenz (=Ordnung) eines jeden Knotenpunktes $\geqq 3$ ist, siehe etwa [2] oder [1, Chap. III].

Bezeichnet man mit $\mathcal{M}_n(P)$ den Teilbereich derjenigen Kurven aus $\mathcal{M}_n$, deren kanonischer Graph isomorph ist zu einem vorgegebenen Graphen der erwähnten Art, so wird $\mathcal{M}_n$ zerschnitten in disjunkte Bereiche $\mathcal{M}_n(P)$.

Das Hauptresultat dieses Artikels ist der Nachweis der folgenden Aussage:

Es gibt kanonische analytische Polyeder $\bar{\mathcal{B}}_n(A)$ von $\mathbb{C}^{3n-3}$ und eine kanonische analytische Aktion der Gruppe $\operatorname{Aut} P$ der Automorphismen des Graphen P derart, daß

$$\mathcal{M}_n(P) \quad \text{isomorph zu} \quad \bar{\mathcal{B}}_n(A) \bmod \operatorname{Aut} P$$

ist. Darüberhinaus ist jede Isotropiegruppe

$$\mathcal{I}(\zeta) = \{\sigma \in \operatorname{Aut} P : \sigma(\zeta) = \zeta\}$$

dieser Aktion isomorph zur Automorphismengruppe der Kurve $M(\zeta)$.

Die Beschreibung der Bereiche $\bar{\mathcal{B}}_n(A)$, die abhängen von einem maximalen Teilbaum T von P sowie einer Anordnung und Orientierung der nicht in T liegenden Kanten von P, und der Aktion von $\operatorname{Aut} P$ auf ihnen, die explizit berechnet werden kann wird in den folgenden Abschnitten erläutert.

In Abschn. 1 wird gezeigt, daß $\mathcal{M}_n$ isomorph ist zu $\mathcal{S}_n \bmod P\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \operatorname{Aut} \Phi$, wo Φ freie Gruppe vom Rang n und $\mathcal{S}_n$ Teilbereich von $\mathbb{P}^{3n}$.

Im 2. Abschn. wird der Raum $\mathcal{B}_n$ der Schottky-Basen behandelt. Es wird erläutert, daß $\mathcal{B}_n \bmod P\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ analytisches Polyeder des $\mathbb{C}^{3n-3}$ ist.

In Abschn. 3 wird der Begriff der geometrischen Basis einer frei auf einem Baum B operierenden Gruppe Γ sowie deren Achsenbaum eingeführt. Es wird

0025-5831/81/0255/0259/$02.60

auseinandergesetzt, daß die Gruppe $\mathrm{Aut}_\Gamma B$ der Decktransformationen von B, die einer Untergruppe H von $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ isomorph ist, transitiv auf dem Raum der geometrischen Basen eines festen Achsenbaumtyps operiert.

Im 4. Abschn. werden in den Sätzen 1–3 die oben erwähnten Hauptresultate des Artikels bewiesen.

In Abschn. 5 wird erläutert, wie man die Aktion von $\mathrm{Aut}\,P$ auf $\bar{\mathscr{B}}_n(A)$ explizit berechnet.

Im 6. Abschn. wird dies an Hand eines Beispiels konkretisiert.

1.

Der Raum $\mathscr{M}_n$ ist isomorph zum Raum der Konjugationsklassen von Schottkygruppen vom Rang n der Gruppe $G := P\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ aller gebrochen-linearen Transformationen von $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dies kann man mit der in [1, Kap. VII, Abschn. 1] erläuterten Methode beweisen. Im komplexen Fall ist eine solche Aussage nicht richtig.

Die Beschreibung dieser Konjugationsklassen kann nun folgendermaßen gegeben werden:

Mit $\mathscr{S}_n$ bezeichnen wir den Raum aller n-Tupel

$$\zeta = (w_1, \ldots, w_n) \in G^n = G \times \ldots \times G$$

von gebrochen-linearen Transformationen, welche Schottkygruppen vom Rang n erzeugen.

Mit Φ_n bezeichnen wir eine freie Gruppe vom Rang n zusammen mit einer fest gewählten Basis $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$.

Jeder Automorphismus ϕ von Φ_n operiert auf kanonische Weise auf G^n und auf $\mathscr{S}_n$: stellt man $\phi(\varepsilon_i)$ als Wort in den Buchstaben $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ dar, und substituiert man sodann w_j für ε_j, so erhält man eine bijektive Abbildung

$$G^n \to G^n,$$

die $\mathscr{S}_n$ auf $\mathscr{S}_n$ abbildet, und die wir wieder mit ϕ bezeichnen. Man überzeugt sich leicht, daß man auf diese Weise eine Aktion von $\mathrm{Aut}\,\Phi_n$ auf $\mathscr{S}_n$ erhält.

Wir betrachten noch die Aktion von G auf G^n, die einem $g \in G$ das Produkt des zu g gehörenden inneren Automorphismus

$$(w_1, \ldots, w_n) \mapsto (g w_1 g^{-1}, \ldots, g w_n g^{-1})$$

zuordnet.

Auf diese Weise erhält man eine Aktion des direkten Produkts

$$\tilde{G} = G \times \mathrm{Aut}\,\Phi_n$$

auf $\mathscr{S}_n$, und es gilt offenbar:

$\mathscr{M}_n$ ist isomorph zu $\mathscr{S}_n \bmod \tilde{G}$.

Diese Darstellung von $\mathcal{M}_n$ ist unübersichtlich, da $\operatorname{Aut}\Phi_n$ groß ist und $\mathcal{S}_n$ nicht gut überblickt werden kann.

Um zu einer handlicheren Beschreibung von $\mathcal{M}_n$ zu kommen, betrachten wir die Aktion von

$$G \times \text{Gruppe der inneren Automorphismen von } \Phi_n$$

auf $\mathcal{S}_n$ und führen auf $\mathcal{S}_n$ geeignete Koordinaten ein.

Jede Transformation $w(z) \neq$ Identität ist hyperbolisch und besitzt zwei Fixpunkte x, y auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, von denen einer, etwa x, anziehend ist. Dann gilt

$$\frac{w(z)-x}{w(z)-y} = t \cdot \frac{z-x}{z-y}$$

mit einem Wert $t \in \mathbb{C}$, $0 < |t| < 1$.

Dann ist

$$w(z) = w(t, x, y; z) = \frac{(x-ty)z + (t-1)xy}{(1-t)z + (tx-y)}$$

mit der üblichen Interpretation, wenn x oder y ∞ ist.

Es sei $w_i(z) = w(t_i, x_i, y_i; z)$. Damit wird ein Punkt $\zeta = (w_1, \ldots, w_n)$ identifiziert mit einem Punkt

$$(t_1, x_1, y_1; \ldots; t_n, x_n, y_n) \in \mathbb{P}^{3n}.$$

Auf diese Weise identifizieren wir $\mathcal{S}_n$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{P}^{3n}$.

Für die Aktion von $g \in G$ auf $\mathcal{S}_n$ gilt jetzt:

$$g \cdot (t_1, x_1, y_1; \ldots; t_n, x_n, y_n) = (t_1, g(x_1), g(y_1); \ldots; t_n, g(x_n), g(y_n)).$$

Daher gilt: $\mathcal{S}_n \bmod G$ kann mit dem Teilbereich

$$\bar{\mathcal{S}}_n := \{\zeta = (t_1, 0, \infty; t_2, 1, y_2; t_3, x_3, y_3; \ldots; t_n, x_n, y_n) \in \mathcal{S}_n\}$$

identifiziert werden.

Dies liegt daran, daß es zu drei verschiedenen Punkten x_1, y_1, x_2 aus $\mathbb{P}$ genau eine Transformation $g \in G$ gibt mit

$$g(x_1) = 0, \quad g(y_1) = \infty, \quad g(x_2) = 1.$$

Bezeichnet $\mathcal{J}_n$ die Gruppe der inneren Automorphismen von Φ_n, so gilt ebenfalls

$$\mathcal{S}_n \bmod G \times \mathcal{J}_n = \bar{\mathcal{S}}_n.$$

2.

Ein Erzeugendensystem $w_1, \ldots, w_n$ einer Schottkygruppe Γ vom Rang n heißt Schottky-Basis, wenn es paarweise disjunkte, abgeschlossene Kreisscheiben

$$U_1, \ldots, U_n, U_{-1}, \ldots, U_{-n}$$

von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gibt, so daß gilt:

wendet man w_i auf einen nicht in U_{-i} liegenden Punkt z_0 an, so fällt sein Bild $w_i(z_0)$ in die Kreisscheibe U_i. Hierbei wurde die Umkehrabbildung von w_i mit w_{-i}

bezeichnet, und die obige Bedingung muß für alle Indizes, auch für negative, richtig sein.

Nach Definition besitzt jede Schottkygruppe wenigstens eine Schottky-Basis. Schwieriger ist die Frage zu beantworten, zu einer Schottkygruppe alle möglichen Schottky-Basen zu konstruieren.

Sei nun $\mathscr{B}_n$ der Raum aller angeordneten Schottky-Basen. Dann ist

$$\tilde{G}\cdot\mathscr{B}_n=\mathscr{S}_n$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{B}}_n:&=\mathscr{B}_n \bmod G=\mathscr{B}_n \bmod G\times\mathscr{I}_n\\ &=\{\zeta=(t_1,0,\infty;t_2,1,y_2;t_3,x_3,y_3;\dots;t_n,x_n,y_n)\in\mathbb{C}^{3n-3}:0<|t_i|<1\end{aligned}$$

$x_i\neq x_j$ für alle Indizes i, j, mit $i\neq j$, wobei $y_i=x_{-i}$ und $x_i=0$, $y_1=\infty$, $x_2=1$ gesetzt wird.

$$|t_i(x_j-x_i)(x_k-x_i)|<|(x_j-x_i)(x_k-x_i)|$$

für alle Indizes j, k, die ungleich $\pm i$ sind$\}$.

Damit sieht man, daß $\bar{\mathscr{B}}_n$ ein offenes analytisches Polyeder und somit ein Steinscher Teilbereich von $\mathbb{C}^{3n-3}$ ist.

Die in der Beschreibung von $\bar{\mathscr{B}}_n$ auftretenden Ungleichungen bedeuten gerade, daß

$$\left|t_i\frac{x_j-x_i}{x_j-y_i}\right|<\left|\frac{x_k-x_i}{x_k-y_i}\right|.$$

Da für $w_i(z)$ gilt:

$$\frac{w_i(z)-x_i}{w_i(z)-y_i}=t_i\frac{z-x_i}{z-y_i}$$

bedeutet dies, daß alle x_j mit $j\neq\pm i$ in einem Ringbereich

$$R=\{z\in\mathbb{P}:\varrho|t_i|<|w_i(z)|<\varrho\}$$

mit einem $\varrho\in|\mathbb{C}^*|$ enthalten sind.

Man muß für ϱ einen Wert nehmen, der etwas größer als $\max\limits_{j\neq\pm i}\left|\frac{x_j-x_i}{x_j-y_i}\right|$ ist. Damit kann man leicht nachweisen, daß $w_1,\dots,w_n$ Schottky-Basis ist.

3.

Es sei Γ eine Gruppe, die frei, d.h. fixpunktfrei und inversionsfrei, auf einem Baum B operiert. Ist $w\in\Gamma$, $w\neq\mathrm{id}$, so gibt es genau eine beidseitig unbegrenzte Linie in B, auf welcher w invariant und daher als Translation operiert.

$$\cdots\;\underset{\text{Linie}}{\overset{p\to w(p)}{\overline{\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\quad}}}\;\cdots$$

Diese Linie nennt man Achse von w, und wir bezeichnen sie mit A_w. Ihre Knotenpunkte p sind dadurch charakterisiert, daß der Abstand von p zu $w(p)$

minimal ist. Liegt ein Knotenpunkt q nicht auf A_w, so sei p derjenige Punkt der Achse A_w, der q am nächsten liegt. Den Verbindungsweg von q nach $w(q)$ erhält man daher dadurch, daß man zuerst von q nach p geht; dann auf der Achse A_w nach $w(p)$ und schließlich von $w(p)$ nach $w(q)$. Das zuletzt erwähnte Teilstück des Weges ist gerade das w-Bild der Verbindung von p nach q, also

$$qw(q) = qp \cdot pw(p) \cdot w(pq).$$

Auf dem Weg von q nach $w(q)$ liegen also bzgl. w äquivalente Punkte. Ein zusammenhängender Teilbaum F von B heißt Fundamentalbereich von B bezüglich Γ, wenn jeder Knoten von B Γ-äquivalent zu genau einem Knoten von F ist.

Man erhält Fundamentalbereiche dadurch, daß man im Quotientengraphen $P := B \bmod \Gamma$ einen maximalen Teilbaum T auswählt und ihn nach B zu einem Baum F hochliftet. Im folgenden betrachten wir nur solche Bäume, für welche der Quotientengraph endlich ist.

Ist nun k_1 eine Kante in B, die einen Knoten $p_1 \in F$ mit einem nicht in F gelegenen Knoten q_1 verbindet, so existiert ein $w_1 \in \Gamma$ mit

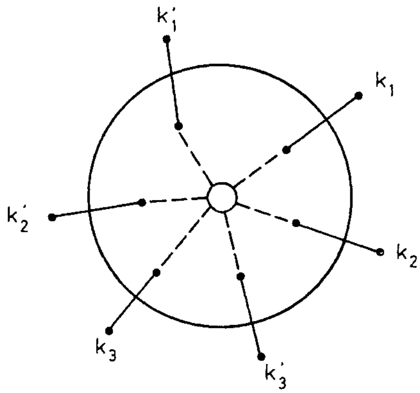
$$w_1(q_1) \in F.$$

Da $w_1(p_1) \notin F$, ist $w_1(k_1) = k_1'$ eine Kante, die einen Knotenpunkt aus F mit einem nicht in F gelegenen verbindet. Die Achse A_1 von w_1 geht durch q_1, p_1, $w_1(q_1)$, $w_1(p_1)$, da zwischen q_1 und $w_1(q_1)$ keine Γ-äquivalenten Punkte liegen.

Man sieht auf diese Weise, daß die Menge der Kanten von B, die nicht in F und nicht in $B - F$ liegen, sich schreiben läßt als

$$\{k_1, k_1', k_2, k_2', \ldots, k_n, k_n'\}$$

wobei k_i, k_i' auf der Achse A_i einer Transformation $w_i \in \Gamma$ liegt mit $w_i(k_i) = k_i'$.



Das System $w_1, \ldots, w_n$ ist eine Basis von Γ, das durch F bis auf die Reihenfolge und bis auf Inversionen w_i^{-1} eindeutig bestimmt ist, siehe etwa [3, I, Abschn. 3.3].

Wir nennen jedes auf diese Weise zu erhaltende System $(w_1, \ldots, w_n)$ eine geometrische Basis von Γ bezüglich der Aktion auf B.

Wir zeigen nun, daß jede geometrische Basis $w_1, \ldots, w_n$ einen Fundamentalbereich F bestimmt, aus dem sie in der oben beschriebenen Weise konstruiert wird. Dazu benötigt man, daß die Valenz von $B \geqq 3$ ist.

Lemma 1. (1) *$A_i \cap A_j \subseteqq F$ für $i \neq j$.*

(2) *Der kürzeste Verbindungsweg V_{ij} von A_i und A_j verläuft in F $(i \neq j)$.*

(3) *Jeder Knoten von F, der nicht auf zwei Achsen $A_i \cap A_j$ liegt, liegt auf einem kürzesten Verbindungsweg V_{ij} $(i \neq j)$.*

Beweis. A_i und A_j gehen beide durch F, daher gibt es einen Weg von A_i nach A_j, der ganz in F liegt und der $p_i \in A_i$ mit p_j aus A_j verbindet. Läuft man längs A_i von p_i zum Anfangspunkt von V_{ij}, dann V_{ij} entlang und schließlich vom Endpunkt von V_{ij} längs A_j nach p_j, so hat man p_i mit p_j durch einen Weg ohne Stachel verbunden, der daher mit dem in F verlaufenden übereinstimmen muß. Damit ist (1) und (2) bewiesen. Im Fall (1) reduziert sich V_{ij} zu einem Punkt.

Ad (3). Da die Valenz von B wenigstens 2 ist, geht durch jeden Endpunkt von F wenigstens eine Achse. Ist $p \in F$ ein Knoten, der nur auf der Achse A_i liegt, so gibt es eine in p angeheftete Kante k, die nicht auf A_i liegt. Betrachtet man einen mit k startenden Weg in F, so trifft man spätestens, wenn man zu einem Endpunkt von F kommt, auf eine andere Achse A_j. Der Verbindungsweg V_{ij} geht jedenfalls durch p.

Liegt $p \in F$ auf keiner der Achsen A_i, so betrachtet man einen Weg in F durch p, der zwei Endpunkte von F verbindet. Dieser Weg verbindet dann zwei verschiedene Achsen A_i und A_j, und V_{ij} geht dann durch p. Dies war zu zeigen.

Damit sieht man, daß F durch die Achsen $A_1, \ldots, A_n$ beschrieben werden kann, weshalb F durch $w_1, \ldots, w_n$ eindeutig bestimmt ist.

Ein Baum T zusammen mit einer Achsenindikatorfunktion genannten Abbildung a von $N = \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ in die Menge der Knotenpunkte von T heißt Achsenbaum vom Grad n. Zwei solche Achsenbäume (T, a) und (T', a') heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus ϕ des Baumes T auf den Baum T' gibt mit

$$\phi(a(i)) = a'(i)$$

für alle i.

Jedem Achsenbaum (T, a) vom Grad n ist ein Graph P mit der zyklomatischen Zahl n zugeordnet: zu den Kanten von T fügt man für jedes $i \geqq 1$ eine $a(-i)$ und $a(i)$ verbindende Kante neu hinzu.

Jeder angeordneten geometrischen Basis $\zeta = (w_1, \ldots, w_n)$ von Γ ist ein Achsenbaum $A(\zeta) = (F, a)$ zugeordnet, wo F der zu $w_1, \ldots, w_n$ gehörende Fundamentalbereich ist und a definiert durch

$$a(-i) = \text{erster Knotenpunkt der Achse } A_i \text{ von } w_i \text{ in } F$$

$$a(+i) = \text{letzter Knotenpunkt der Achse } A_i \text{ in } F.$$

Dabei ist A_i durch die Translationsrichtung von w_i angeordnet. Die obige Bedingung bedeutet, daß $w_i(a(-i))$ und $a(+i)$ durch eine Kante verbunden sind.

Lemma 2. *B, B' seien Bäume der Valenz $\geqq 3$, auf welchen Γ frei operiert. Gibt es eine Basis $\zeta = (w_1, \ldots, w_n)$ von Γ, die geometrische Basis bzgl. B und bzgl. B' ist und derart, daß der Achsenbaum $A(\zeta)$ von ζ bezüglich B isomorph ist zum Achsenbaum $A'(\zeta)$ von ζ bezüglich B', so gibt es einen Isomorphismus $\phi: B \to B'$ von Bäumen mit*

$$w \cdot \phi(p) = \phi(w \cdot p)$$

für alle $w \in \Gamma$.

Beweis. Es gibt genau einen Isomorphismus $\phi: A(\zeta) \to A'(\zeta)$. Der zu ζ gehörende Fundamentalbereich in B (bzw. in B') sei F (bzw. F'). Dann ist ϕ insbesondere ein Isomorphismus $F \to F'$. Ist p Knotenpunkt von B, so existiert genau ein $w \in \Gamma$ mit $w(p) \in F$. Man setzt:

$$\phi(p) := w^{-1} \phi(w(p))$$

und rechnet nach, daß ϕ der Isomorphismus der verlangten Art ist.

Sei nun $\mathrm{Aut}_\Gamma B$ die Gruppe der Decktransformationen der kanonischen Überlagerung $B \to P$. Somit enthält $\mathrm{Aut}_\Gamma B$ alle Baumautomorphismen ϕ von B, für welche gilt

$$\phi \Gamma p = \Gamma \phi(p)$$

für alle Knotenpunkte p von B.

$\mathrm{Aut}_\Gamma B$ enthält Γ als normale Untergruppe und $\mathrm{Aut}_\Gamma B \bmod \Gamma$ ist gerade die Gruppe der Automorphismen von P, da jeder Automorphismus von P geliftet werden kann zu einem Automorphismus der universellen Überlagerung von P, und das ist gerade der Baum B.

Sei nun $\zeta = (w_1, \dots, w_n)$ eine geometrische Basis von Γ bezüglich B und H die Menge aller Automorphismen ϕ der Gruppe Γ, für welche gilt:

$\phi(\zeta) := (\phi(w_1), \dots, \phi(w_n))$ ist geometrische Basis bezüglich B, und der Achsenbaum von $\phi(\zeta)$ ist isomorph zum Achsenbaum von ζ.

Lemma 3. *H ist Gruppe und kanonisch isomorph zu* $\mathrm{Aut}_\Gamma B$.

Beweis. Es sei $\phi \in \mathrm{Aut}_\Gamma B$. Wir fassen ϕ als inneren Automorphismus auf der normalen Untergruppe Γ von $\mathrm{Aut}_\Gamma B$ auf. Nun ist $(\phi(w_1), \dots, \phi(w_n))$ geometrische Basis mit Fundamentalbereich $\phi(F)$, wenn F der zu $\zeta = (w_1, \dots, w_n)$ gehörende Fundamentalbereich ist. Ist A_i Achse von w_i, so ist $\phi(A_i)$ die Achse von $\phi(w_i) = \phi w_i \phi^{-1}$. Daraus folgt: $A(\zeta)$ ist isomorph zu $A(\phi\zeta)$ und ϕ liegt in H.

Man rechnet leicht nach, daß die betrachtete Zuordnung $\mathrm{Aut}_\Gamma B \to H$ injektiv und ein Gruppenhomomorphismus ist.

Sei nun $\phi \in H$. Wir betrachten auf B eine zweite Aktion $*$ von Γ, indem wir setzen: $w * p = \phi(w) \cdot p$.

Auf Grund der Voraussetzung an ϕ folgt aus Lemma 1, daß beide Gruppenaktionen isomorph sind, d. h. es gibt einen Baumisomorphismus $\psi: B \to B$ derart, daß

$$\psi(w \cdot p) = w * \psi(p)$$

gilt für alle $w \in \Gamma$.

Somit gilt

$$\psi \circ w = \phi(w) \circ \psi$$

und

$$\phi(w) = \psi \circ w \circ \psi^{-1}$$

d. h. der zur Decktransformation ψ gehörende Automorphismus aus H ist ϕ, und es ist alles gezeigt.

4.

Ist $\zeta=(w_1,\dots,w_n)\in\mathscr{S}_n$, so bezeichnen wir mit $\Gamma(\zeta)$ die von $w_1,\dots,w_n$ erzeugte Schottkygruppe und mit $B(\zeta)$ den kanonischen Baum, der zur Schottkygruppe $\Gamma(\zeta)$ gehört. $\Gamma(\zeta)$ operiert frei auf $B(\zeta)$.

Es gilt: ζ ist Schottky-Basis von $\Gamma(\zeta)$ genau dann, wenn ζ geometrische Basis bezüglich $B(\zeta)$ ist.

Der Beweis dieses Sachverhalts ist implizit in [1, Kap. I, Abschn. 4] enthalten.

Sei nun $A=(T,a)$ ein Achsenbaum vom Grad n. P sei der Graph der zyklomatischen Zahl n, der dadurch entsteht, daß man zu T für jedes $1\leqq i\leqq n$ eine Kante zwischen $a(-i)$ und $a(i)$ hinzufügt. Es werde vorausgesetzt, daß die Valenz eines jeden Punktes von $P\geqq 3$ sei.

Nunmehr sei

$$\mathscr{B}_n(A):=\{\zeta\in\mathscr{B}_n : A(\zeta) \text{ ist isomorph zu } A\},$$

wobei $A(\zeta)$ der zu ζ gehörende Achsenbaum der Aktion von $\Gamma(\zeta)$ auf dem Baum $B(\zeta)$ ist.

Sei weiterhin

$$H:=\{\phi\in\operatorname{Aut}\Gamma : \phi(\zeta)\in\mathscr{B}_n(A) \text{ für jedes } \zeta\in\mathscr{B}_n(A)\}.$$

Wie oben gezeigt, ist die Gruppe H isomorph zur Gruppe der Decktransformationen der Überlagerung $B(\zeta)\to B(\zeta)/\Gamma(\zeta)\approx P$.

Man überzeugt sich leicht, daß G auf $\mathscr{B}_n(A)$ operiert, da die Aktionen konjugierter Schottkygruppen auf ihren Bäumen kanonisch isomorph sind.

Sei nun $\bar{\mathscr{B}}_n(A)=\mathscr{B}_n(A)\bmod G$.

Wir zeigen nun, daß $\bar{\mathscr{B}}_n(A)$ analytisches Polyeder von $\bar{\mathscr{B}}_n$ ist. Es seien i,r zwei verschiedene Indizes in $\{\pm 1,\dots,\pm n\}$ und A_{ir} der orientierte Weg in T, der in $a(i)$ beginnt und in $a(r)$ endet. Auf A_{ir} haben wir eine Anordnung: für zwei Knotenpunkte p,q auf A_{ir} sagen wir, daß $p \underset{ir}{<} q$ ist, wenn man in positiver Richtung laufen muß, um von p nach q zu kommen.

Die kanonische Projektion von T in A_{ir} werde mit π_{ir} bezeichnet. Somit ist $\pi_{ir}(p)$ derjenige Punkt in A_{ir}, der dem Knoten p am nächsten liegt.

Satz 1.

$$\bar{\mathscr{B}}_n(A)=\{\zeta=(t_1;t_2,y_2;t_3,x_3,y_3;\dots;t_n,x_n,y_n)\in\bar{\mathscr{B}}_n:$$

$$\left|\frac{x_k-x_i}{x_k-x_r}\right| < \left|\frac{x_j-x_i}{x_j-x_r}\right| \quad \textit{falls} \quad \pi_{ir}a(k) \underset{ir}{<} \pi_{ir}a(j)$$

$$\left|\frac{x_k-x_i}{x_k-x_r}\right| = \left|\frac{x_j-x_i}{x_j-x_r}\right| \quad \textit{falls} \quad \pi_{ir}a(k) = \pi_{ir}a(j)$$

für alle $j\neq i,r,\ k\neq i,r\}$.

Beweis. Es sei $u_{ir}(z)=\dfrac{z-x_i}{z-x_r}$.

Nach Koordinatentransformation dürfen wir annehmen, daß $x_i=0$, $x_r=\infty$ ist. Dann wird $u_{ir}(z)=z$. Die Knotenpunkte des Fundamentalbereichs, der zu ζ gehört, werden gegeben durch Kreisscheiben D der Art

$$D=\{z\in\mathbb{C}:|z-x_k|\leqq|x_{k'}-x_k|\},$$

siehe [1, Kap. VII, Abschn. 4].

Die Projektion von D durch π_{ir} ist die Kreisscheibe

$$\pi_{ir}(D)=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqq\max(|x_k|,|x_{k'}|)\}.$$

Ist $D'=\{z\in\mathbb{C}:|z-x_j|\leqq|x_{j'}-x_j|\}$ eine weitere solche Kreisscheibe, so ist

$$\pi_{ir}(D)\subsetneqq\pi_{ir}(D')$$

genau dann, wenn

$$\max|x_k|,|x_{k'}|<\max|x_j|,|x_{j'}|.$$

Ebenso ergibt sich, daß $\pi_{ir}(D)=\pi_{ir}(D')$ genau dann, wenn

$$\max(|x_k|,|x_{k'}|)=\max(|x_j|,|x_{j'}|).$$

Ist nun D (bzw. D') die kleinste Kreisscheibe, in der x_k (bzw. x_j) enthalten ist, so ist

$$|x_{k'}|\leqq|x_k|$$

$$|x_{j'}|\leqq|x_j|,$$

und es folgt die Behauptung.

Nun ist $\bar{\mathscr{B}}_n(A)=\mathscr{B}_n(A)\bmod G\times\mathscr{I}(\Phi)$, wo $\mathscr{I}(\Phi)$ die Gruppe der inneren Automorphismen von Φ bezeichnet, siehe Abschn, 1.

Die Faktorgruppe $H/\mathscr{I}(\Phi)$, die isomorph ist zur Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}P$, operiert daher auf $\bar{\mathscr{B}}_n(A)$. Mit Hilfe der Ergebnisse der Abschn. 1–3 erhält man:

Satz 2. $\mathscr{M}_n(P)=\bar{\mathscr{B}}_n(A)\bmod\operatorname{Aut}P$.

Bemerkung. Um zu beweisen, daß $\mathscr{M}_n(P)$ bianalytisch äquivalent zu $\bar{\mathscr{B}}_n(A)\bmod\operatorname{Aut}P$ ist, muß man zeigen, daß $\bar{\mathscr{B}}_n(A)$ eine universelle Familie von Kurven repräsentiert. Dies kann man erreichen durch eine naheliegende Verallgemeinerung der Methoden aus [1, Kap. IV]. Auf diesen Aspekt soll an anderer Stelle eingegangen werden.

Satz 3. *Die Isotropiegruppe*

$$\mathscr{I}(\zeta):=\{\phi\in\operatorname{Aut}P:\phi(\zeta)=\zeta\}$$

ist isomorph zur Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}M(\zeta)$ *der zu* ζ *gehörenden Kurve* $M(\zeta)$.

Beweis. $\operatorname{Aut}M(\zeta)$ ist isomorph zur Faktorgruppe N/Γ, wo $N:=\{g\in G:g\Gamma(\zeta)g^{-1}=\Gamma(\zeta)\}$ der Normalisator von $\Gamma=\Gamma(\zeta)$ in $G=P\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist. Die Isotropiegruppe der Aktion von $G\times H$ auf ζ ist $\mathscr{I}'(\zeta)=\{(g,\phi)\in G\times H:(g,\phi)\cdot\zeta=\zeta\}$.

Nun bedeutet $(g,\phi)\cdot(\zeta)=\zeta$, daß

$$\Gamma(\zeta)=g\Gamma(\phi(\zeta))g^{-1}=g\Gamma(\zeta)g^{-1},$$

da $\Gamma(\phi(\zeta))=\Gamma(\zeta)$. Daher ist $g\in N$.

Ist umgekehrt $g \in N$, so ist $g(\zeta) = g \cdot \zeta g^{-1}$ eine Schottky-Basis von $\Gamma(\zeta)$, die denselben Achsenbaum wie ζ hat.

Daher existiert ein eindeutig bestimmtes $\phi \in H$ mit $\phi(g(\zeta)) = \zeta$ und somit $(g, \phi)(\zeta) = \zeta$. Genau dann, wenn $g \in \Gamma$ ist, ist ϕ ein innerer Automorphismus. Somit ist Γ auf kanonische Weise normale Untergruppe von $\mathscr{I}'(\zeta)$, und es gilt: $\mathscr{I}'(\zeta)/\Gamma = N/\Gamma$.

Da andererseits $\mathscr{I}'(\zeta) \cap G \times \mathscr{I}(\Phi) = \Gamma$, ist $\mathscr{I}'(\zeta)/\Gamma = \mathscr{I}(\zeta)$, und alles ist gezeigt.

5.

Man kann nun im Prinzip die Räume $\mathscr{M}_n(P)$ bestimmen und etwa ihre Singularitäten berechnen.

Damit man die Aktion von Aut$P$ auf $\bar{\mathscr{B}}_n(A)$ sowie von H auf $\mathscr{B}_n(A)$ explizit berechnen kann, beachtet man, daß der Achsenbaum A gegeben wird durch einen maximalen Teilbaum T von P sowie durch eine Anordnung $k_1, k_2, \ldots, k_n$ der Kanten von P, die nicht in T liegen und der Festlegung einer Orientierung für jede der Kanten k_i. Die Achsenindikatorfunktion a wird dann gegeben durch

$a(-i) =$ Anfangspunkt von k_i

$a(+i) =$ Endpunkt von k_i.

Man legt einen Aufpunkt p in T fest und identifiziert Γ mit der Homotopiegruppe $\pi(P, p)$ der Wege in P mit Anfangs- und Endpunkt p.

Es sei C_i der einfach geschlossene Weg in P, der durch k_i geht und außer k_i nur Kanten aus T enthält, und $w_i = v_i C_i v_i^{-1}$, wobei v_i der einfache, in T verlaufende Weg von p an C_i ist. Die Lassowege w_i sind eine geometrische Basis von Γ bezüglich der universellen Überlagerung B von P, die man mit den Homotopieklassen von in p beginnenden Wegen identifiziert.

Ist $\phi \in \operatorname{Aut} P$, so ist $\phi(w_i)$ ein in $\phi(p)$ beginnender und endender Weg. Verbindet man p mit $\phi(p)$ durch einen in T verlaufenden Weg v, und setzt man $\tilde{\phi}(w_i) = v\phi(w_i) \cdot v^{-1}$, so kann man diesen Weg als Produkt der Wege $w_1, \ldots, w_n$ darstellen und erhält in dieser Weise die gesuchte Operation $\tilde{\phi}$ von $\phi \in \operatorname{Aut} P$ auf Γ. Damit erhält man die Gruppe H und die Operation auf $\mathscr{B}_n(A)$.

Satz 4. *Zu jedem i gibt es (von i abhängige) Indizes*

$$j_1, \ldots, j_r, t_1, \ldots, t_s \in \{\pm 1, \ldots, \pm n\}$$

mit

$$\tilde{\phi}(w_i) = w_{t_1} \cdot \ldots \cdot w_{t_s} \cdot w_{j_1} \cdot w_{j_2} \cdot \ldots \cdot w_{j_r} \cdot w_{t_s}^{-1} \cdot \ldots \cdot w_{t_1}^{-1}.$$

Dabei sind die Beträge der Indizes $j_1, \ldots, j_r$, $t_1, \ldots, t_s$ paarweise verschieden; insbesondere ist $r + s \leqq n$.

Die Indizes $j_1, \ldots, j_r$ sind unabhängig von der Wahl des Aufpunktes p in P.

Beweis. Ist C irgendein einfach geschlossener Weg in P und v ein in T verlaufender Weg, der p mit C verbindet, sowie

$$w = v \cdot C \cdot v^{-1}$$

so gilt:

$$w = w_{j_1} \cdot \ldots \cdot w_{j_r}$$

wo w_{-j} das Inverse des Weges w_j bezeichnet. Die Indizes $j_1, \ldots, j_r$ sind dadurch bestimmt, daß der Weg w von den Kanten $\{k_1, \ldots, k_n, k'_1, \ldots, k'_n\}$ genau die Kanten $k_{j_1}, \ldots, k_{j_r}$, wo $k_{-j} = k'_j$ bedeutet, und zwar in dieser angegebenen Reihenfolge, durchläuft. Eine Kante k_j wird, da C einfach geschlossen ist, höchstens einmal durchlaufen.

Falls k_j durchlaufen wird, kommt die entgegengesetzt orientierte Kante k'_j nicht vor im Weg w.

Man wendet diese Überlegung an auf den Bildweg $\phi(w_i)$ und beachtet, daß

$$\phi(w_i) = \phi(v_i) \cdot \phi(C_i) \cdot \phi(v_i)^{-1}.$$

Nun sei v der Weg in T, der den Endpunkt von $\phi(v_i)$ mit dem Aufpunkt p verbindet.

Dann ist

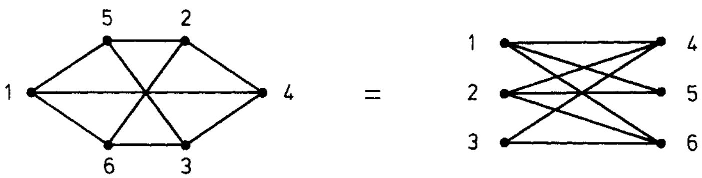
$$\phi(w_i) = [\phi(v_i) \cdot v] \cdot [v^{-1} \phi(C_i) \cdot v] \cdot [\phi(v_i) \cdot v]^{-1}.$$

Für jeden Weg in eckigen Klammern gilt die obige Überlegung, und man erhält einen Beweis des Satzes.

Folgerung. $\mathrm{Aut}\,P$ operiert auf der Homologiegruppe $H_1(P) \approx \Gamma$ modulo Kommutatoruntergruppe $[\Gamma, \Gamma]$. Die Matrix der Operation von $\phi \in \mathrm{Aut}\,P$ bezüglich der durch die Klassen von $w_1, \ldots, w_n$ gegebenen Basis hat als Einträge nur die Werte $0, +1, -1$.

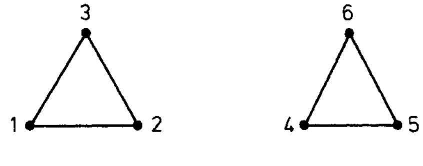
6.

Betrachten wir den folgenden Graphen P



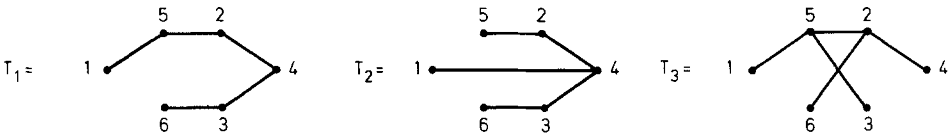
der zyklomatischen Zahl 4.

Der komplementäre Graph P' von P ist die disjunkte Vereinigung zweier Dreiecke

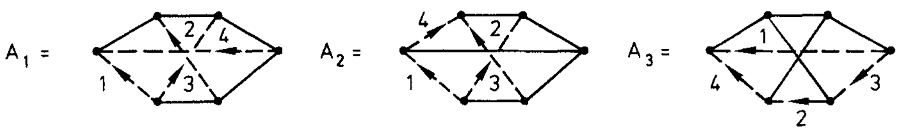


Aut P ist isomorph zur Aut P', und Aut P' ist das semi-direkte Produkt von $\mathscr{S}_3 \times \mathscr{S}_3$ mit $\mathscr{S}_2$, wobei $\mathscr{S}_2$ auf $\mathscr{S}_3 \times \mathscr{S}_3$ durch Komponentenvertauschung operiert. Die Ordnung von Aut P ist somit $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$, und die Gruppe wird erzeugt von der Drehung $\phi = (1\ 5\ 2\ 4\ 3\ 6)$ und der Transposition $\psi = (2\ 3)$.

P besitzt drei Klassen nichtisomorpher maximaler Teilbäume



Durch die unten angegebene Anordnung und Orientierung der gestrichelt gezeichneten Kanten wird T_i die Struktur eines Achsenbaumes A_i aufgeprägt, siehe Abschn. 5.



Die Aktionen von Aut P auf den analytischen Polyedern

$$\bar{\mathscr{B}}_4(A_1) = \{\zeta = (t_1; t_2, y_2; t_3, x_3, y_3; t_4, x_4, y_4) \in \bar{\mathscr{B}}_4 : \\ |y_3| > |y_2| > |y_4| > |x_3| > 1 > |x_4|\},$$

$$\bar{\mathscr{B}}_4(A_2) = \{\zeta \in \bar{\mathscr{B}}_4 : |y_3| > |y_2| > |x_3| = |x_4| = 1 > |y_4|, \\ |x_4 - 1| < |x_4 - x_3| < 1\},$$

$$\bar{\mathscr{B}}_4(A_3) = \{\zeta \in \bar{\mathscr{B}}_4 : |y_3| > 1 = |y_4| > |y_2| = |x_3| > |x_4|, \\ |x_3 - y_2| < |y_2|, \\ |y_4 - 1| < 1\}$$

sind bianalytisch äquivalent.

Identifiziert man Γ mit der Homotopiegruppe $\pi(P, 1)$ der Homotopieklassen geschlossener Wege, deren Anfangs- und Endpunkt 1 ist, so gilt: (w_1, w_2, w_3, w_4) bzw. (v_1, v_2, v_3, v_4) bzw. (u_1, u_2, u_3, u_4) ist geometrische Basis von Γ, deren Achsenbaum isomorph ist zu A_1 bzw. A_2 bzw. A_3, wenn

$$w_1 = 1\ 5\ 2\ 4\ 3\ 6\ 1; \qquad w_2 = 1\ 5\ 2\ 4\ 3\ 5\ 1$$

$$w_3 = 1\ 5\ 2\ 4\ 3\ 6\ 2\ 5\ 1, \quad w_4 = 1\ 5\ 2\ 4\ 1$$

$$v_1 = w_4^{-1} w_1, \qquad v_2 = w_4^{-1} w_2^{-1} w_4$$

$$v_3 = w_4^{-1} w_3 w_4, \qquad v_4 = w_4$$

$$u_1 = w_4, \qquad u_2 = w_2^{-1} w_3$$

$$u_3 = w_2, \qquad u_4 = w_3^{-1} w_1.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} &\phi(w_1)=w_1, && \phi(w_2)=w_3 \\ &\phi(w_3)=w_1 w_4^{-1}, && \phi(w_4)=w_2 \\ &\psi(w_1)=w_2^{-1}w_3^{-1}w_1, && \psi(w_2)=w_2^{-1} \\ &\psi(w_3)=w_2^{-1}w_3^{-1}w_2, && \psi(w_4)=w_2^{-1}w_4. \end{aligned}$$

Die Matrix der Operation von ϕ bzw. ψ auf der Homologiegruppe $H_1(P)$ bezüglich der durch die Homologieklassen von w_1, w_2, w_3, w_4 gegebenen Basis ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man erhält eine treue Darstellung von $\operatorname{Aut} P$ in $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$.

Die Behandlung der Singularitäten von $\mathscr{M}_4(P)$ erfordert die Bestimmung der Fixpunktmengen $X(\tau)$ von $\tau \in \operatorname{Aut} P$ auf $\bar{\mathscr{B}}_4(A_i)$. Die Mengen $X(\tau)$ sind analytische Teilmengen von $\bar{\mathscr{B}}_4(A_i)$, deren naive Berechnung auch dann recht aufwendig ist, wenn man sich zu τ einen möglichst geeigneten Achsenbaum A_i aussucht. Ich will auf diese Fragestellung an anderer Stelle zurückkommen.

Literatur

1. Gerritzen, L., Put, M. van der: Schottky groups and Mumford curves. Lecture Notes in Mathematics, 817. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1980
2. Mumford, D.: An analytic construction of degenerating curves over complete local fields. Compositio Math. **24**, 129–174 (1972)
3. Serre, J.P.: Arbres, amalgames, SL_2. Astérisque (Paris) **46** (1977)

Eingegangen am 11. September 1980