Math. Ann. 256, 509-516 (1981)

Mathematische Annalen

Stabilität starkstetiger, positiver Operatorhalbgruppen auf C^*-Algebren

Ulrich Groh und Frank Neubrander

Mathematische Fakultät der Universität, Auf der Morgenstelle 10, D-7400 Tübingen, Bundesrepublik Deutschland

0. Einleitung

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist folgendes, auf A.M. Lyapunov zurückgehende, klassische Resultat aus der Stabilitätstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen [1].

Es sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix. Dann sind äquivalent:

1. *Für alle $x_0 \in \mathbb{C}^n$ gilt für die Lösung $T(t)x_0 := e^{At}x_0$ des abstrakten Cauchyproblems $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$:*

$$\|T(t)x_0\| \to 0 \quad \textit{für } t \to \infty.$$

2. *Für die Spektralschranke $s(A) = \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ gilt $s(A) < 0$.*
3. *Es existiert eine positiv-definite $n \times n$-Matrix Y mit $A^*Y + YA = -I$.*

Auf einem unendlichdimensionalen Banachraum E führt das abstrakte Cauchyproblem zu dem folgenden Ergebnis [7]:

Es sei $(A, D(A))$ ein dicht definierter, linearer Operator auf einem Banachraum E mit nichtleerer Resolventenmenge $\rho(A)$. Dann hat das abstrakte Cauchyproblem $\dot{x} = Ax$, $x(0) = y$ für alle $y \in D(A)$ genau dann eine stetig differenzierbare Lösung u, wenn $(A, D(A))$ der Generator einer starkstetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$ ist. Für die Lösung u gilt dann $u(t) = T(t)y$.

Wie in 1. ist man im besonderen an Stabilitätsaussagen für diese Halbgruppe interessiert. Beispiele zeigen aber, daß im allgemeinen aus $s(A) < 0$ nicht auf die Stabilität geschlossen werden kann [8, Sect. 23. 16], [5].

Wir befassen uns in dieser Arbeit mit starkstetigen Halbgruppen positiver Operatoren auf C^*-Algebren und untersuchen, welche Aussagen über die Stabilität solcher Halbgruppen gemacht werden können. Dabei knüpfen wir an Resultate an, die für positive Operatorhalbgruppen auf kommutativen C^*-Algebren in [4] und [5] bewiesen wurden. Einfache Beispiele zeigen, daß bei unseren Aussagen im allgemeinen nicht auf die Positivität verzichtet werden kann.

0025-5831/81/0256/0509/$01.80

1. Vorbemerkungen

Unter einer *starkstetigen Operatorhalbgruppe* $\{T(t)\}_{t\geqq 0}$ auf einem Banachraum E verstehen wir eine Familie $\{T(t)\}_{t\geqq 0}\subseteq\mathscr{L}(E)$ mit $T(0)=I$, $T(s+t)=T(s)\,T(t)$ $(s,t\geqq 0)$ und der Stetigkeit der Abbildung $t\mapsto T(t)$ für die *starke Operatortopologie* auf $\mathscr{L}(E)$. Zur Abkürzung werden wir unter diesen Voraussetzungen von der „Halbgruppe $\{T(t)\}$" sprechen. Für eine Einführung in die wesentlichen Begriffe dieser Theorie, wie z.B. Definition und Eigenschaften des *Generators* $(A, D(A))$, verweisen wir auf [13, Abschn. 3], [4] und die dort angegebene Literatur.

Unter einer *C^*-Algebra* $\mathfrak{A}$ verstehen wir eine komplexe Banachalgebra mit Involution $*$ und $\|x^*x\|=\|x\|^2$ für alle $x\in\mathfrak{A}$. Besitzt $\mathfrak{A}$ eine Einheit, so bezeichnen wir diese mit $\mathbb{1}$. Eine C^*-Algebra $\mathfrak{A}$ nennen wir eine *W^*-Algebra*, falls es einen Banachraum $\mathfrak{A}_*$ gibt, dessen Dual $(\mathfrak{A}_*)^*$ als Banachraum isomorph zu $\mathfrak{A}$ ist. Es ist $\mathfrak{A}_*$ eindeutig bestimmt [14, III.3.9] und $\mathfrak{A}$ besitzt stets eine Einheit [14, I.10.2]. Wir nennen $\mathfrak{A}_*$ den *Prädual* von $\mathfrak{A}$. Mit $\mathfrak{A}_+ := \{x^*x: x\in\mathfrak{A}\}$ bezeichnen wir den *positiven Kegel* einer C^*-Algebra. Dieser ist erzeugend und normal [12, p. 215] und der duale Kegel $\mathfrak{A}^*_+ := \{\varphi\in\mathfrak{A}^*: \varphi(x)\geqq 0$ für alle $x\in\mathfrak{A}_+\}$ ist schwach $*$-abgeschlossen und erzeugend. Entsprechend ist der positive Kegel $\mathfrak{A}_*{}^+ := \mathfrak{A}_*\cap\mathfrak{A}^*_+$ im Prädual einer W^*-Algebra erzeugend [14, III.4.2]. Unter einer *von Neumann-Algebra* $\mathfrak{A}$ auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ verstehen wir eine selbstadjungierte, in der schwachen Operatortopologie abgeschlossene Unteralgebra von $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ mit $\mathbb{1}_{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{A}$. Im besonderen ist jede von Neumann-Algebra eine (abstrakte) W^*-Algebra.

2. Das Problem $s(A)=\omega_0$

Ist $\{T(t)\}$ eine starkstetige Operatorhalbgruppe, so sind die Spektren $\sigma(T(t))$ durch den *Spektralradius* $r(T(t))=e^{\omega_0 t}$ mit festem $\omega_0\in[-\infty,\infty)$ beschränkt [8, p. 457]; [4, 1.1(iv)], während das Spektrum $\sigma(A)$ des Generators $(A, D(A))$ nur rechtsseitig beschränkt ist. Wir nennen $s(A) := \sup\{\mathrm{Re}(\lambda): \lambda\in\sigma(A)\}$ die *Spektralschranke* von A und es gilt $s(A)\leqq\omega_0$ [4].

Im folgenden wollen wir zeigen, daß für positive Halbgruppen auf C^*-Algebren und den Prädualen von W^*-Algebren stets $s(A)=\omega_0$ gilt. Dabei nennen wir eine Halbgruppe $\{T(t)\}$ *positiv*, falls $T(t)\mathfrak{A}_+\subseteq\mathfrak{A}_+$ für alle $0\leqq t\in\mathbb{R}$. Ein einfaches Beispiel zeigt, daß für die gewünschte Schlußfolgerung im allgemeinen auf die Positivität nicht verzichtet werden kann.

2.1. **Satz.** *Sei $\mathfrak{A}$ eine C^*-Algebra mit Einheit und sei $\{T(t)\}$ eine starkstetige, positive Operatorhalbgruppe auf $\mathfrak{A}$. Dann gilt $-\infty<s(A)=\omega_0$ und $s(A)\in\sigma(A)$.*

Beweis. Da alle Operatoren $T(t)$ $(t\geqq 0)$ positiv sind und unsere Algebra eine Einheit besitzt, existiert zu jedem $t\geqq 0$ ein Zustand $\varphi_t\in\mathfrak{A}^*$ mit

$$T(t)^*\varphi_t = r(T(t))\,\varphi_t = e^{\omega_0 t}\varphi_t$$

[6, 2.1]. Für $n\in\mathbb{N}$ sei

$$E_n := \{\varphi\in\mathfrak{A}^*_+ : \varphi(\mathbb{1})=1,\ T(2^{-n})^*\varphi = e^{\omega_0 2^{-n}}\varphi\}.$$

Die Folge der E_n, $n\in\mathbb{N}$, ist monoton fallend und es ist wegen der schwach * Kompaktheit der Einheitskugel von $\mathfrak{A}^*$ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \neq \emptyset$; sei etwa $\varphi\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Aus der Halbgruppeneigenschaft $T(s+t)=T(s)T(t)$ $(s,t\in\mathbb{R}_+)$ und der schwach * Stetigkeit der Abbildung $(t\mapsto T(t))$: $\mathbb{R}_+\to\mathfrak{A}^*$ folgt dann $T(t)^*\varphi=e^{\omega_0 t}$ für alle $t\geqq 0$. Angenommen $\omega_0=-\infty$. Dann gilt $T(t)^*\varphi=0$, also $0=\varphi(T(t)\mathbb{1})$ für alle $t>0$. Aus Stetigkeitsgründen bedeutet dies aber $1=\varphi(\mathbb{1})=0$, ein Widerspruch, der sich nur durch $\omega_0>-\infty$ auflöst. Da $e^{\omega_0 t}$ ein Element des Punktspektrums $P_\sigma(T(t)^*)$ eines jeden Operators $T(t)^*$ $(t\geqq 0)$ ist, folgt aus [4, 1.6 u. 1.7] $\omega_0\in\sigma(A)$ oder $s(A)=\omega_0$. □

2.2. *Bemerkung.* Wie das Beispiel der Translationshalbgruppe auf der C^*-Algebra $C_0(\mathbb{R}_+)$ der im „Unendlichen" verschwindenden stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ zeigt (vgl. unten 3.3), existiert im allgemeinen keine stetige Linearform, welche invariant unter allen $T(t)$ $(t\geqq 0)$ ist, sobald man auf die Existenz einer Einheit verzichtet. □

2.3. **Satz.** *Sei $\mathfrak{A}$ eine W^*-Algebra mit Prädual $\mathfrak{A}_*$ und sei $\{T(t)\}$ eine starkstetige, positive Operatorhalbgruppe auf $\mathfrak{A}_*$. Dann gilt $s(A)=\omega_0$.*

Beweis. Nach [5, Theorem 3] gilt für alle $\lambda>s(A)$ und $\varphi\in\mathfrak{A}_*$

$$R(\lambda, A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T(s)\,\varphi\,ds.$$

Für $\varphi\in\mathfrak{A}_*^+$ gilt aber $\|\varphi\|=\varphi(\mathbb{1})$, also folgt hieraus die Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\|T(s)\|\,ds$$

für alle $\varphi\in\mathfrak{A}_*$ und alle $\lambda>s(A)$. Im besonderen existiert für jede positive Halbgruppe $\{T(t)\}$ mit $s(A)<0$

$$\int_0^\infty \|T(s)\|\,ds,$$

d.h. für eine solche Halbgruppe muß für $t>0$ stets $r(T(t))<1$ sein [10, p. 121].

Angenommen es gibt eine positive Halbgruppe $\{T(t)\}$ mit $s(A)<\omega_0$. Wir betrachten dann die Halbgruppe $S(t):=e^{-\omega_0 t}\,T(t)$ mit Generator $(B, D(B))$. Für diese Halbgruppe gilt $s(B)=s(A)-\omega_0<0$ aber $r(S(t))=1$ $(t>0)$. Dies ist aber ein Widerspruch zu unseren vorherigen Überlegungen. Daher gilt stets $s(A)=\omega_0$. □

2.4. **Korollar.** *Sei $\mathfrak{A}$ eine C^*-Algebra und sei $\{T(t)\}$ eine starkstetige, positive Operatorhalbgruppe auf dem Dual $\mathfrak{A}^*$ von $\mathfrak{A}$. Dann gilt $s(A)=\omega_0$.*

Beweis. Nach [14, III.2.4] ist der Bidual von $\mathfrak{A}$ eine W^*-Algebra. Es folgt daher die Behauptung sofort aus Satz 2.3. □

Eine Modifikation des Beispiels in [15] zeigt, daß es starkstetige Operatorhalbgruppen auf C^*-Algebren mit $s(A)<\omega_0$ gibt.

2.5. *Beispiel.* Wir betrachten die C^*-Algebra c_0 und zeigen, daß es eine Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf c_0 gibt mit $\|T(t)\|=e^t$ $(t\geqq 0)$ und $\sigma(A)=\{in\colon n\in\mathbb{N}\}$. Dies bedeutet $0=s(A)<\omega_0=1$.

Sei $l^\infty(n)$ der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ versehen mit der Supremumsnorm. Es ist dann die C^*-Algebra $\mathfrak{A}:=\{(x_n)\colon x_n\in l^\infty(n), \lim_n\|x_n\|=0\}$ versehen mit der Supremumsnorm isomorph zu c_0. Sei für $n\in\mathbb{N}$ $A_n=(a_{i,j}^{(n)})$ die wie folgt definierte $n\times n$-Matrix:

$$a_{i,j}^{(n)}=\begin{cases}1 & j=i+1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\qquad (i,j=1,2,\dots,n).$$

Es gilt dann $\sigma(A_n)=\{0\}$ $(n\in\mathbb{N})$ und für $B_n:=in+A_n$ $\sigma(B_n)=\{in\}$ $(n\in\mathbb{N})$. Es ist $R(\lambda,B_n)$ gegeben durch die Matrix

$$(\lambda-in)^{-n}\cdot\begin{pmatrix}(\lambda-in)^{n-1} & (\lambda-in)^{n-2}\dots & 1\\ 0 & \ddots(\lambda-in)^{n-1}\dots & (\lambda-in)\\ \vdots\ \ 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots\dots\dots\dots & (\lambda-in)^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Demnach gilt $\|R(\lambda,B_n)\|\leqq 1$ $(n\in\mathbb{N})$. Für $x=(x_n)\in\mathfrak{A}$ und $0\leqq t\in\mathbb{R}$ sei $T(t)x:=(e^{in}e^{tA_n}x_n)$. Da $\|e^{tA_n}\|=\|e^{tA_n}\mathbb{1}_n\|$ ist, gilt $\|T(t)\|=\sup_n\{e^{tA_n}\}=e^t$ $(t\geqq 0)$. Eine leichte Rechnung zeigt nun, daß für $x\in\bigoplus_{n=1}^{\infty}l^\infty(n)$: $\lim\|T(t)x-x\|=0$ erfüllt ist. Da $\bigoplus_{n=1}^{\infty}l^\infty(n)$ dicht in $\mathfrak{A}$ ist, folgt hieraus die starke Stetigkeit der Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf $\mathfrak{A}$. Der Generator B der Halbgruppe $\{T(t)\}$ ist durch $\bigoplus_{n=1}^{\infty}B_n$ gegeben mit $D(B)=\{(x_n)\in\mathfrak{A}\colon (B_nx_n)\in\mathfrak{A}\}$. Wegen $\{in\colon n\in\mathbb{N}\}\subseteq\sigma(B)$ gilt $s(B)\geqq 0$. Für alle $\lambda\notin\{in\colon n\in\mathbb{N}\}$ existiert $R(\lambda,B_n)$ und es ist wegen $\|R(\lambda,B_n)\|\leqq 1$ $R:=\bigoplus_{n=1}^{\infty}R(\lambda,B_n)$ ein stetiger Operator auf $\mathfrak{A}$ mit $(\lambda-B)\circ R=I$ auf $\mathfrak{A}$ und $R\circ(\lambda-B)=I$ auf $D(B)$. Daher ist λ ein Element der Resolventenmenge von B und $R(\lambda,B)=R$ oder $0=s(B)<\omega_0=1$. □

3. Stabilität positiver Operatorhalbgruppen auf C^*-Algebren

Eine starkstetige Operatorhalbgruppe $\{T(t)\}$ heiße *stabil*, falls es einen Operator $P\in\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ gibt für den in einer der drei Standardoperatortopologien $\lim_{t\to\infty}T(t)=P$ gilt. Es ist dann P eine Projektion auf den Fixraum $F:=\{x\in\mathfrak{A}\colon T(t)x=x$ für alle $t\geqq 0\}$ und man kann somit die Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in F und $\ker P$ voraussetzen. Da die hier interessierende Fragestellung auf dem abgeschlossenen, $T(t)$-invarianten Teilraum F trivial ist, soll nur untersucht werden, wann $\lim T(t)=0$ gilt (hier und im weiteren falls nichts anderes erwähnt immer für $t\to\infty$). Es ist daher sinnvoll folgende Sprachregelung zu treffen.

3.1. *Definition.* Sei E ein Banachraum. Eine starkstetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf E heiße

1. *Gleichmäßig stabil*, falls $\lim \|T(t)\| = 0$ gilt.
2. *Stark stabil*, falls in der starken Operatortopologie $\lim T(t) = 0$ gilt.
3. *Schwach stabil*, falls in der schwachen Operatortopologie $\lim T(t) = 0$ gilt.
4. *Exponentiell stabil*, falls es ein $t_0 \in \mathbb{R}_+$ und ein $\omega \in \mathbb{R}_+$ gibt, so daß für alle $t \geqq t_0$ $\|T(t)\| \leqq e^{-\omega t}$ gilt.

In [2, p. 111] wird gezeigt, daß für einen positiven Operator T auf einer kommutativen C^*-Algebra mit Einheit die Konvergenz der Potenzen $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in der schwachen Operatortopologie äquivalent zur Normkonvergenz ist. Wir wollen nun diesen „diskreten" Sachverhalt für positive Operatorenhalbgruppen auf nichtkommutative C^*-Algebren mit Einheit übertragen. Ein einfaches Beispiel zeigt, daß auf die Existenz einer Einheit nicht verzichtet werden kann.

3.2. **Satz.** *Sei $\mathfrak{A}$ eine C^*-Algebra mit Einheit und sei $\{T(t)\}$ eine starkstetige, positive Operatorhalbgruppe auf $\mathfrak{A}$. Dann sind äquivalent:*

1. $s(A) < 0$.
2. *Die Halbgruppe $T(t)$ ist gleichmäßig stabil.*
3. *Die Halbgruppe $T(t)$ ist stark stabil.*
4. *Die Halbgruppe $T(t)$ ist schwach stabil.*

Beweis. Wegen Satz 2.1 und $\|T(t)\| \leqq M e^{\omega_0 t}$ genügt es, die Implikation von 4. nach 1. zu zeigen. Zu $0 < t_0 \in \mathbb{R}$ existiert aber ein $0 \neq \varphi \in \mathfrak{A}^*$ mit

$$T(t_0)^* \varphi = r(T(t_0)) \varphi .$$

Also gilt für alle $0 \neq x \in \mathfrak{A}$

$$\varphi(T(t_0)^n x) = r(T(t_0))^n \varphi(x) \to 0$$

für $n \to \infty$. Daraus folgt $r(T(t_0)) < 1$ und somit wegen $r(T(t_0)) = e^{\omega_0 t}$: $s(A) = \omega_0 < 0$. □

3.3. *Bemerkung.* Ist $\mathfrak{A}$ eine C^*-Algebra ohne Einheit, so gelten die obigen Äquivalenzen im allgemeinen nicht mehr. Als Beispiel dafür betrachten wir die C^*-Algebra $C_0(\mathbb{R}_+)$ und die Halbgruppe $\{T(t)\}$ mit $(T(t)f)(s) = f(s+t)$ $(f \in C_0(\mathbb{R}_+),\ 0 \leqq s,\ t \in \mathbb{R})$. Dann gilt $\|T(t)\| = 1$ $(t \geqq 0)$ aber $\lim\limits_{t \to \infty} \|T(t)f\| = 0$ für alle $f \in C_0(\mathbb{R}_+)$. Entsprechendes gilt für die obige Halbgruppe auch auf $L^1(\mathbb{R}_+)$. Es übertragen sich also die Äquivalenzen von 3.2 nicht auf Präduale von W^*-Algebren. □

4. Stabilität von implementierten Halbgruppen auf von Neumann-Algebren

Ist $\mathfrak{A}$ eine W^*-Algebra und $\{T(t)\}$ eine Operatorhalbgruppe auf $\mathfrak{A}$, so nennen wir diese *schwach*-stetig*, falls die Abbildung $t \mapsto T(t)$ stetig ist, wenn $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $(\mathfrak{A}, \sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*))$ versehen ist. Eine Charakterisierung solcher Halbgruppen ist in Analogie zum Satz von Hille-

Yosida möglich [2, 3.1.10]. Gegeben sei nun eine von Neumann-Algebra $\mathfrak{A}$ auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ und sei $\{U(t)\}$ eine starkstetige Operatorhalbgruppe auf $\mathfrak{H}$ mit Generator $(B, D(B))$. Für $x \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ sei $T(t)x := U(t)^* \circ x \circ U(t)$ $(t \geqq 0)$. Falls für $t \geqq 0$ $T(t)\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$ gilt, so nennen wir die auf $\mathfrak{A}$ durch $\{T(t)\}$ induzierte Halbgruppe *implementiert durch* $\{U(t)\}$.

4.1. *Bemerkungen*
1. Unter Benutzung von [14, II.2.6] zeigt eine einfache Rechnung, daß eine implementierte Halbgruppe stets schwach*-stetig ist.
2. Jeder Operator $T(t)$ $(t \geqq 0)$ einer implementierten Halbgruppe ist vollständig positiv und stetig für die schwach*-Topologie auf $\mathfrak{A}$.
3. Ist $\{T(t)\}$ eine implementierte Halbgruppe, so ist die präadjungierte Halbgruppe $\{T(t)_*\}$ schwachstetig auf $\mathfrak{A}_*$ und muß daher nach [2, 3.1.8] sogar starkstetig sein. Aus Satz 2.3 folgt dann, daß für implementierte Halbgruppen stets $s(A) = \omega_0$ gelten muß, da $s(A) = s(A_*)$ und dies auch für die entsprechenden ω_0 gilt.
4. Mit $\{U(t)\}$ ist auch die adjungierte Halbgruppe $\{U(t)^*\}$ auf $\mathfrak{H}$ starkstetig mit Generator $(B^*, D(B^*))$. Für die von $\{U(t)\}$ auf $\mathfrak{A}$ implementierte Halbgruppe $\{T(t)\}$ mit Generator $(A, D(A))$ zeigt eine zu [2, 3.2.55] analoge Überlegung, daß für $x \in \mathfrak{A}$ das folgende äquivalent ist:
   (i) $x \in D(A)$
   (ii) *Für* $\xi \in D(B)$ *gilt* $x(\xi) \in D(B^*)$ *und die lineare Abbildung*

$$(*) \qquad (\xi \mapsto x(B\xi) + B^*(x\xi)) \colon D(B) \to H$$

besitzt eine stetige Fortsetzung auf $\mathfrak{H}$.

Für $x \in D(A)$ ist dann Ax durch die stetige Fortsetzung von $(*)$ gegeben. Wir schreiben daher kurz $Ax = xB + B^*x$. □

Wir wollen im folgenden einige äquivalente Aussagen zur exponentiellen Stabilität einer implementierten Halbgruppe angeben. Es zeigt sich, daß die Lösbarkeit der Operatorgleichung

$$yB + B^*y = -x \qquad (x, y \in \mathfrak{A}_+)$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, und daher dies ein unendlichdimensionales Analogon zum klassischen Resultat von Lyapunov darstellt (s. Einleitung).

4.2. **Satz.** *Sei* $\mathfrak{A}$ *eine von Neumann-Algebra auf einem Hilbertraum* $\mathfrak{H}$ *und sei* $\{T(t)\}$ *eine schwach*-stetige Operatorhalbgruppe auf* $\mathfrak{A}$ *mit Generator* $(A, D(A))$, *die von einer auf* $\mathfrak{H}$ *starkstetigen Operatorhalbgruppe* $\{U(t)\}$ *mit Generator* $(B, D(B))$ *implementiert wird. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
1. $s(A) < 0$.
2. *Die Halbgruppe* $\{U(t)\}$ *ist exponentiell stabil.*
3. *Es existiert ein* $0 \leqq x \in D(A)$ *mit* $Ax = -\mathbb{1}$.
4. *Es existiert ein* $0 \leqq x \in D(A)$ *mit* $x(D(B)) \subseteq D(B^*)$ *und* $xB + B^*x = -\mathbb{1}$.
5. *Für alle* $0 \leqq x \in \mathfrak{A}$ *existiert ein* $0 \leqq y \in D(A)$ *mit* $Ay = -x$.

6. *Für alle* $0 \leqq x \in \mathfrak{A}$ *existiert ein* $0 \leqq y \in D(A)$ *mit* $y(D(B)) \subseteq D(B^*)$ *und* $yB + B^* y = -x$.

7. $\int_0^\infty \| U(s)\xi \|^2 ds$ *existiert für alle* $\xi \in \mathfrak{H}$.

8. $\int_0^\infty (T(s)x)\xi | \eta) ds$ *existiert für alle* $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ *und alle* $x \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Da $s(A) = \omega_0$ gilt, zeigt eine leichte Rechnung die Äquivalenz von 1. und 2., während die Äquivalenz der Behauptungen 3. und 4. beziehungsweise 5. und 6. sich aus Bemerkung 4.1.4. ergibt.

1.$\Rightarrow$3.: Wegen $\omega_0 = s(A) < 0$ existiert $R(0, A)$ und ist auf Grund der Integraldarstellung [4, 1.1 (iii)] positiv. Daher gilt $R(0, A)\mathbb{1} = x \in D(A)_+$ oder $Ax = -\mathbb{1}$ mit einem $x \in D(A)_+$

3.$\Rightarrow$5.: Sei $0 \leqq x \in D(A)$ mit $Ax = -\mathbb{1}$. Dann gilt

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax\, ds = -\int_0^s T(s)\mathbb{1}\, ds \qquad (t \geqq 0)$$

und damit für alle $0 \leqq t \in \mathbb{R}$: $0 \leqq \int_0^t T(s)\mathbb{1}\, ds \leqq x$. Da $\left(\int_0^t T(s)\mathbb{1}\, ds\right)_{t \geqq 0}$ eine monoton wachsende, beschränkte Familie positiver Elemente in $\mathfrak{A}$ ist, existiert $\lim_{t \to \infty} \int_0^t T(s)\mathbb{1}\, ds$ in der schwachen Operatortopologie von $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$. Diese ist aber auf den beschränkten Mengen von $\mathfrak{A}$ äquivalent zur $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*)$-Topologie, also existiert in $\mathfrak{A}$ für alle $\varphi \in \mathfrak{A}_*$ $\int_0^\infty \varphi(T(s)\mathbb{1})\, ds$. Ist $0 \leqq x \in \mathfrak{A}$ so gilt $0 \leqq x \leqq \|x\| \cdot \mathbb{1}$, d.h. für $0 \leqq \varphi \in \mathfrak{A}_*$ und $0 \leqq s \in \mathbb{R}$ ist $\varphi(T(s)x) \leqq \|x\|\, \varphi(T(s)\mathbb{1})$ woraus die Existenz von $\int_0^\infty \varphi(T(s)x)\, ds$ für alle $0 \leqq x \in \mathfrak{A}$, $0 \leqq \varphi \in \mathfrak{A}_*$ folgt. Da die positiven Kegel von $\mathfrak{A}_*$ und $\mathfrak{A}$ erzeugend sind, existiert $\int_0^\infty \varphi(T(s)x)\, ds$ für alle $x \in \mathfrak{A}$ und $\varphi \in \mathfrak{A}_*$, und es gilt $\varphi(R(0, A)x) = \int_0^\infty \varphi(T(s)x)\, ds$. Wie man sieht ist $0 \leqq R(0, A)$.

3.$\Rightarrow$7.: Wie der obige Beweis gezeigt hat, existiert $\int_0^\infty T(s)\mathbb{1}\, ds$ in der schwachen Operatortopologie, d.h. $\int_0^\infty \|U(s)\xi\|^2 ds = \int_0^\infty (T(s)\mathbb{1}\, \xi | \xi)\, ds$ existiert für alle $\xi \in \mathfrak{H}$.

7.$\Rightarrow$8.: Mit Hilfe der „Polarisationsidentität" folgt die Existenz des Integrals $\int_0^\infty (U(s)\xi | U(s)\eta)\, ds$ für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$, d.h. es existiert $\int_0^\infty \psi(T(s)\mathbb{1})\, ds$ für alle $\psi \in \mathfrak{A}_\sim$, $\mathfrak{A}_\sim$ der Vektorraum der Vektorzustände auf $\mathfrak{A}$, und es sei $\mathfrak{A}_\sim^+ := \mathfrak{A}_\sim \cap \mathfrak{A}_*^+$. Nach [14, III.4.2 und II.2.6] ist $\mathfrak{A}_\sim^+$ ein erzeugender Kegel in $\mathfrak{A}_\sim$. Wie im Beweis der Implikation von 3. nach 5. schließen wir, daß für alle $x \in \mathfrak{A}$ und $\psi \in \mathfrak{A}_\sim$ $\int_0^\infty \psi(T(s)x)\, ds$ existiert, also erst recht für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ $\int_0^\infty ((T(s)x)\xi | \eta)\, ds$.

8.$\Rightarrow$9.: Sei $0 \leqq \varphi \in \mathfrak{A}_*$, $0 \leqq x \in \mathfrak{A}$ und sei $0 < t \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig. Da $\mathfrak{A}_\sim^+$ dicht in $\mathfrak{A}^+$ ist [14, 4.10], existiert ein $0 \leqq \psi \in \mathfrak{A}_\sim$ mit

$$\|\varphi - \psi\| \leqq (t\,\|x\| \sup\{\|T(s)\|:\ 0 \leqq s \leqq t\})^{-1}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^t \varphi(T(s)\,x)\,ds &\leqq \|\varphi - \psi\|\,(t\,\|x\| \sup\{\|T(s)\|:\ 0 \leqq s \leqq t\}) + \int_0^t \psi(T(s)\,x)\,ds \\ &\leqq 1 + \int_0^\infty \psi(T(s)\,x)\,ds.\end{aligned}$$

Daraus folgt aber die Existenz von $\int_0^\infty \varphi(T(s)\,x)\,ds$ für alle $\varphi \in \mathfrak{A}_*$ und alle $x \in \mathfrak{A}$.

9.$\Rightarrow$1.: Da $R(0, A)$ existiert, folgt wegen $s(A) \in \sigma(A)$, $s(A) < 0$. □

Literatur

1. Bellman, R.E.: Introduction to matrix analysis. New York: McGraw Hill 1960
2. Bratteli, O., Robinson, D.W.: Operator algebras and quantum statistical mechanics I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1979
3. Choquet, G., Foias, C.: Solution d'un problème sur les itérés d'un operateur positif sur $C(K)$ et propriétés des moyennes associées. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25**, 109–129 (1975)
4. Derndinger, R., Nagel, R.: Der Generator stark stetiger Verbandshalbgruppen auf $C(X)$ und dessen Spektrum. Math. Ann. **245**, 159–177 (1979)
5. Greiner, G., Voigt, J., Wolff, M.: On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators. J. Operator Theory **5**, 245–256 (1981)
6. Groh, U.: The peripheral spectrum of Schwarz operators on C^*-algebras. Math. Z. **176**, 311–318 (1981)
7. Hille, E.: Une generalisation du problem de Cauchy. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **4**, 31–48 (1953)
8. Hille, E., Phillips, R.S.: Functional analysis and semigroups. 2nd ed. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. 31, Providence, R.I. 1957
9. Mil'stein, G.N.: Exponential stability of positive semigroups in a linear topological space I, II. Matem. Soviet Math. (Iz. VUZ.) **19**, 35–42, 51–61 (1975)
10. Pazy, A.: Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations. University of Maryland, Lecture Note 10 (1974)
11. Pedersen, G.K.: On the operator equation $HT + TH = 2K$. Indiana Univ. Math. J. **25**, 1029–1034 (1976)
12. Schaefer, H.H.: Topological vector spaces. 4th print. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1980
13. Schaefer, H.H.: Ordnungsstrukturen in der Operatorentheorie. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **82**, 33-50 (1980)
14. Takesaki, M.: Theory of operator algebras I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1979
15. Zabczyk, J.: A note on C_0-semigroups. Bull. Acad. Pol. Sci. **23**, 895–898 (1975)

Eingegangen am 6. September 1980; revidierte Fassung am 13. Februar 1981