Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.

Von

E. Zermelo in Göttingen.

Die Mengenlehre ist derjenige Zweig der Mathematik, dem die Aufgabe zufällt, die Grundbegriffe der Zahl, der Anordnung und der Funktion in ihrer ursprünglichen Einfachheit mathematisch zu untersuchen und damit die logischen Grundlagen der gesamten Arithmetik und Analysis zu entwickeln; sie bildet somit einen unentbehrlichen Bestandteil der mathematischen Wissenschaft. Nun scheint aber gegenwärtig gerade diese Disziplin in ihrer ganzen Existenz bedroht durch gewisse Widersprüche oder „Antinomieen", die sich aus ihren scheinbar denknotwendig gegebenen Prinzipien herleiten lassen und bisher noch keine allseitig befriedigende Lösung gefunden haben. Angesichts namentlich der „Russellschen Antinomie" von der „Menge aller Mengen, welche sich selbst nicht als Element enthalten"*) scheint es heute nicht mehr zulässig, einem beliebigen logisch definierbaren Begriffe eine „Menge" oder „Klasse" als seinen „Umfang" zuzuweisen. Die ursprüngliche Cantorsche Definition einer „Menge" als einer „Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen"**) bedarf also jedenfalls einer Einschränkung, ohne daß es doch schon gelungen wäre, sie durch eine andere, ebenso einfache zu ersetzen, welche zu keinen solchen Bedenken mehr Anlaß gäbe. Unter diesen Umständen bleibt gegenwärtig nichts anderes übrig, als den umgekehrten Weg einzuschlagen und, ausgehend von der historisch bestehenden „Mengenlehre", die Prinzipien aufzusuchen, welche zur Begründung dieser mathematischen Disziplin erforderlich sind. Diese Aufgabe muß in der Weise gelöst werden, daß man die Prinzipien einmal eng genug einschränkt, um alle Widersprüche auszuschließen, gleichzeitig aber auch weit genug ausdehnt, um alles Wertvolle dieser Lehre beizubehalten.

In der hier vorliegenden Arbeit gedenke ich nun zu zeigen, wie sich die gesamte von G. Cantor und R. Dedekind geschaffene Theorie auf

*) B. Russell, „The principles of Mathematics", vol. I, p. 366—368, 101—107.

**) G. Cantor, Math. Annalen Bd. 46, p. 481.

einige wenige Definitionen und auf sieben anscheinend voneinander unabhängige „Prinzipien“ oder „Axiome“ zurückführen läßt. Die weitere, mehr philosophische Frage nach dem Ursprung und dem Gültigkeitsbereiche dieser Prinzipien soll hier noch unerörtert bleiben. Selbst die gewiß sehr wesentliche „Widerspruchslosigkeit“ meiner Axiome habe ich noch nicht streng beweisen können, sondern mich auf den gelegentlichen Hinweis beschränken müssen, daß die bisher bekannten „Antinomieen“ sämtlich verschwinden, wenn man die hier vorgeschlagenen Prinzipien zugrunde legt. Für spätere Untersuchungen, welche sich mit solchen tiefer liegenden Problemen beschäftigen, möchte ich hiermit wenigstens eine nützliche Vorarbeit liefern.

Der nachstehende Artikel enthält die Axiome und ihre nächsten Folgerungen, sowie eine auf diese Prinzipien gegründete Theorie der Äquivalenz, welche die formelle Anwendung der Kardinalzahlen vermeidet. Ein zweiter Artikel, der die Lehre von der Wohlordnung und ihre Anwendung auf die endlichen Mengen und die Prinzipien der Arithmetik im Zusammenhange entwickeln soll, ist in Vorbereitung.

§ 1.

Grundlegende Definitionen und Axiome.

1. Die Mengenlehre hat zu tun mit einem „*Bereich*“ $\mathfrak{B}$ von Objekten, die wir einfach als „*Dinge*“ bezeichnen wollen, unter denen die „Mengen“ einen Teil bilden. Sollen zwei Symbole a und b dasselbe Ding bezeichnen, so schreiben wir $a = b$, im entgegengesetzten Falle $a \neq b$. Von einem Dinge a sagen wir, es „existiere“, wenn es dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehört; ebenso sagen wir von einer Klasse $\mathfrak{K}$ von Dingen, „es gebe Dinge der Klasse $\mathfrak{K}$“, wenn $\mathfrak{B}$ mindestens ein Individuum dieser Klasse enthält.

2. Zwischen den Dingen des Bereiches $\mathfrak{B}$ bestehen gewisse „*Grundbeziehungen*“ der Form $a \varepsilon b$. Gilt für zwei Dinge a, b die Beziehung $a \varepsilon b$, so sagen wir, „a sei *Element* der Menge b“ oder „b enthalte a als Element“ oder „besitze das Element a“. Ein Ding b, welches ein anderes a als Element enthält, kann immer als eine *Menge* bezeichnet werden, aber auch nur dann — mit einer einzigen Ausnahme (Axiom II).

3. Ist jedes Element x einer Menge M gleichzeitig auch Element der Menge N, so daß aus $x \varepsilon M$ stets $x \varepsilon N$ gefolgert werden kann, so sagen wir, „M sei *Untermenge* von N“, und schreiben $M \Subset N$*). Es ist stets $M \Subset M$, und aus $M \Subset N$ und $N \Subset R$ folgt immer $M \Subset R$. „*Elementenfremd*“

*) Dieses „Subsumptions“-Zeichen wurde von E. Schröder („Vorlesungen über Algebra der Logik“ Bd. I) eingeführt. Herr G. Peano und ihm folgend B. Russell, Whitehead u. a. brauchen dafür das Zeichen $\supset$.

heißen zwei Mengen M, N, wenn sie keine „gemeinsamen“ Elemente besitzen, oder wenn kein Element von M gleichzeitig Element von N ist.

4. Eine Frage oder Aussage $\mathfrak{E}$, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt *„definit“*. Ebenso wird auch eine „Klassenaussage“ $\mathfrak{E}(x)$, in welcher der variable Term x alle Individuen einer Klasse $\mathfrak{K}$ durchlaufen kann, als „definit“ bezeichnet, wenn sie für *jedes einzelne* Individuum x der Klasse $\mathfrak{K}$ definit ist. So ist die Frage, ob $a \varepsilon b$ oder nicht ist, immer definit, ebenso die Frage, ob $M \in N$ oder nicht.

Über die Grundbeziehungen unseres Bereiches $\mathfrak{B}$ gelten nun die folgenden *„Axiome“* oder *„Postulate“*.

Axiom I. Ist jedes Element einer Menge M gleichzeitig Element von N und umgekehrt, ist also gleichzeitig $M \in N$ und $N \in M$, so ist immer $M = N$. Oder kürzer: jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.

(Axiom der Bestimmtheit.)

Die Menge, welche nur die Elemente $a, b, c, \cdots, r$ enthält, wird zur Abkürzung vielfach mit $\{a, b, c, \cdots, r\}$ bezeichnet werden.

Axiom II. Es gibt eine (uneigentliche) Menge, die *„Nullmenge“* 0, welche gar keine Elemente enthält. Ist a irgend ein Ding des Bereiches, so existiert eine Menge $\{a\}$, welche a und nur a als Element enthält; sind a, b irgend zwei Dinge des Bereiches, so existiert immer eine Menge $\{a, b\}$, welche sowohl a als b, aber kein von beiden verschiedenes Ding x als Element enthält.

(Axiom der Elementarmengen.)

5. Nach I sind die „Elementarmengen“ $\{a\}$, $\{a, b\}$ immer eindeutig bestimmt, und es gibt nur eine einzige „Nullmenge“. Die Frage, ob $a = b$ oder nicht, ist immer definit (Nr. 4), da sie mit der Frage, ob $a \varepsilon \{b\}$ ist, gleichbedeutend ist.

6. Die Nullmenge ist Untermenge jeder Menge M, $0 \in M$; eine gleichzeitig von 0 und M verschiedene Untermenge von M wird als *„Teil“* von M bezeichnet. Die Mengen 0 und $\{a\}$ besitzen keine Teile.

Axiom III. Ist die Klassenaussage $\mathfrak{E}(x)$ definit für alle Elemente einer Menge M, so besitzt M immer eine Untermenge $M_{\mathfrak{E}}$, welche alle diejenigen Elemente x von M, für welche $\mathfrak{E}(x)$ wahr ist, und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Aussonderung.)

Indem das vorstehende Axiom III in weitem Umfange die Definition neuer Mengen gestattet, bildet es einen gewissen Ersatz für die in der Einleitung angeführte und als unhaltbar aufgegebene allgemeine Mengendefinition, von der es sich durch die folgenden Einschränkungen unterscheidet: Erstens dürfen mit Hilfe dieses Axiomes niemals Mengen *independent definiert*, sondern immer nur als Untermengen aus bereits gegebenen *ausgesondert* werden, wodurch widerspruchsvolle Gebilde wie „die Menge aller Mengen" oder „die Menge aller Ordinalzahlen" und damit nach dem Ausdrucke des Herrn G. Hessenberg „(Grundbegriffe der Mengenlehre" XXIV) die „ultrafiniten Paradoxieen" ausgeschlossen sind. Zugleich muß zweitens das bestimmende Kriterium $\mathfrak{E}(x)$ im Sinne unserer Erklärung Nr. 4 immer „definit" d. h. für jedes einzelne Element x von M durch die „Grundbeziehungen des Bereiches" entschieden sein, und hiermit kommen alle solchen Kriterien wie „durch eine endliche Anzahl von Worten definierbar" und damit die „Antinomie Richard" oder die „Paradoxie der endlichen Bezeichnung" (Hessenberg a. a. O. XXIII, vergl. dagegen J. König, Math. Ann. Bd. 61, p. 156) für unseren Standpunkt in Wegfall. Hieraus folgt aber auch, daß, streng genommen, vor jeder Anwendung unseres Axioms III immer erst das betreffende Kriterium $\mathfrak{E}(x)$ als „definit" nachgewiesen werden muß, was denn auch in den folgenden Entwicklungen bei jeder Gelegenheit, wo es nicht ganz selbstverständlich ist, immer geschehen soll.

7. Ist $M_1 \Subset M$, so besitzt M immer eine weitere Untermenge $M - M_1$, die „*Komplementärmenge* von M_1", welche alle diejenigen Elemente von M umfaßt, die *nicht* Elemente von M_1 sind. Die Komplementärmenge von $M - M_1$ ist wieder M_1. Die Komplementärmenge von $M_1 = M$ ist die Nullmenge 0, die Komplementärmenge jedes „Teiles" M_1 von M (Nr. 6) ist wieder ein „Teil" von M.

8. Sind M, N irgend zwei Mengen, so bilden nach III diejenigen Elemente von M, welche gleichzeitig Elemente von N sind, die Elemente einer Untermenge D von M, welche auch Untermenge von N ist und alle M und N *gemeinsamen* Elemente umfaßt. Diese Menge D wird der „gemeinsame Bestandteil" oder der „*Durchschnitt*" der Mengen M und N genannt und mit $[M, N]$ bezeichnet. Ist $M \Subset N$, so ist $[M, N] = M$; ist $N = 0$ oder sind M und N „elementenfremd" (Nr. 3), so ist $[M, N] = 0$.

9. Ebenso existiert auch für mehrere Mengen $M, N, R, \cdots$ immer ein „Durchschnitt" $D = [M, N, R, \cdots]$. Ist nämlich T irgend eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind, so entspricht nach III jedem Dinge a eine gewisse Untermenge $T_a \Subset T$, welche alle diejenigen Elemente von T umfaßt, die a als Element enthalten. Es ist somit für jedes a definit, ob $T_a = T$ ist, d. h. ob a gemeinsames Element aller Elemente von T ist, und ist A ein beliebiges Element von T, so bilden alle Elemente a von A, für welche $T_a = T$ ist, die Elemente einer Untermenge D von A, welche alle diese gemeinsamen Elemente umfaßt. Diese Menge D wird „der zu T gehörende Durchschnitt" genannt und mit $\mathfrak{D}T$ bezeichnet. Besitzen die Elemente von T keine gemeinsamen Elemente, so ist $\mathfrak{D}T = 0$, und dies ist z. B. immer der Fall, wenn ein Element von T keine Menge oder die Nullmenge ist.

10. Theorem. Jede Menge M besitzt mindestens eine Untermenge M_0, welche nicht Element von M ist.

Beweis. Für jedes Element x von M ist es definit, ob $x \varepsilon x$ ist oder nicht; diese Möglichkeit $x \varepsilon x$ ist an und für sich durch unsere Axiome nicht ausgeschlossen. Ist nun M_0 diejenige Untermenge von M, welche gemäß III alle solchen Elemente von M umfaßt, für die *nicht* $x \varepsilon x$ ist, so kann M_0 nicht Element von M sein. Denn entweder ist $M_0 \varepsilon M_0$ oder nicht. Im ersteren Falle enthielte M_0 ein Element $x = M_0$, für welches $x \varepsilon x$ wäre, und dieses widerspräche der Definition von M_0. Es ist also sicher *nicht* $M_0 \, \varepsilon M_0$, und es müßte somit M_0, wenn es Element von M wäre, auch Element von M_0 sein, was soeben ausgeschlossen wurde.

Aus dem Theorem folgt, daß nicht alle Dinge x des Bereiches $\mathfrak{B}$ Elemente einer und derselben Menge sein können; d. h. *der Bereich* $\mathfrak{B}$ *ist selbst keine Menge,* — womit die „Russellsche Antinomie" für unseren Standpunkt beseitigt ist.

Axiom IV. Jeder Menge T entspricht eine zweite Menge $\mathfrak{U}T$ (die „*Potenzmenge*" von T), welche alle Untermengen von T und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Potenzmenge.)

Axiom V. Jeder Menge T entspricht eine Menge $\mathfrak{S}T$ (die „*Vereinigungsmenge*" von T), welche alle Elemente der Elemente von T und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Vereinigung.)

11. Ist kein Element von T eine von 0 verschiedene Menge, so ist natürlich $\mathfrak{S}T = 0$. Ist $T = \{M, N, R, \cdots\}$, wo die $M, N, R, \cdots$ sämtlich Mengen sind, so schreibt man auch $\mathfrak{S}T = M + N + R + \cdots$ und nennt $\mathfrak{S}T$ die „*Summe* der Mengen M, N, R, $\cdots$", ob einige dieser Mengen $M, N, R, \cdots$ nun gemeinsame Elemente besitzen oder nicht. Es ist immer $M = M + 0 = M + M = M + M + \cdots$.

12. Für die soeben definierte „Addition" der Mengen gilt das „kommutative" und das „assoziative" Gesetz:

$$M + N = N + M, \qquad M + (N + R) = (M + N) + R.$$

Endlich gilt für „Summen" und „Durchschnitte" (Nr. 8) auch das „distributive" Gesetz in doppelter Form:

$$[M + N, R] = [M, R] + [N, R],$$
$$[M, N] + R = [M + R, N + R].$$

Den Beweis führt man mit Hilfe von I, indem man zeigt, daß jedes Element der linksstehenden Menge zugleich Element der rechtsstehenden Menge ist und umgekehrt.*)

*) Diese vollständige Theorie dieser „logischen Addition und Multiplikation" findet sich in E. Schröders „Algebra der Logik", Bd. I.

13. Einführung des Produktes. Ist M eine von 0 verschiedene Menge und a irgend eines ihrer Elemente, so ist nach Nr. 5 definit, ob $M = \{a\}$ ist oder nicht. *Es ist also immer definit, ob eine vorgelegte Menge aus einem einzigen Element besteht oder nicht.*

Es sei nun T eine Menge, deren Elemente $M, N, R, \cdots$ lauter (untereinander elementenfremde) Mengen sein mögen, und S_1 irgend eine Untermenge ihrer „Vereinigungsmenge" $\mathfrak{S}T$. Dann ist für jedes Element M von T definit, ob der Durchschnitt $[M, S_1]$ aus einem einzigen Element besteht oder nicht. Somit bilden alle diejenigen Elemente von T, welche mit S_1 genau ein Element gemein haben, die Elemente einer gewissen Untermenge T_1 von T, und es ist wieder definit, ob $T_1 = T$ ist oder nicht. Alle Untermengen $S_1 \subseteq \mathfrak{S}T$, welche mit jedem Elemente von T genau ein Element gemein haben, bilden also nach III die Elemente einer Menge $P = \mathfrak{P}T$, welche nach III und IV Untermenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{S}T$ ist und als die „zu T gehörende *Verbindungsmenge*" oder als „das *Produkt* der Mengen $M, N, R, \cdots$" bezeichnet werden soll. Ist $T = \{M, N\}$, oder $T = \{M, N, R\}$, so schreibt man abgekürzt $\mathfrak{P}T = MN$ oder $= MNR$.

Um nun den Satz zu gewinnen, daß *ein Produkt mehrerer Mengen nur dann verschwinden* (d. h. der Nullmenge gleich sein) *kann, wenn ein Faktor verschwindet,* brauchen wir ein weiteres Axiom.

Axiom VI. Ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von 0 verschiedene Mengen und untereinander elementenfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{S}T$ mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem Elemente von T ein und nur ein Element gemein hat.

(Axiom der Auswahl.)

Man kann das Axiom auch so ausdrücken. daß man sagt, es sei immer möglich, aus jedem Elemente $M, N, R, \cdots$ von T ein einzelnes Element $m, n, r, \cdots$ *auszuwählen* und alle diese Elemente zu einer Menge S_1 zu vereinigen.*)

Die vorstehenden Axiome genügen, wie wir sehen werden, um alle wesentlichen Theoreme der allgemeinen Mengenlehre abzuleiten. Um aber die Existenz „unendlicher" Mengen zu sichern, bedürfen wir noch des folgenden, seinem wesentlichen Inhalte von Herrn R. Dedekind**) herrührenden Axiomes.

Axiom VII. Der Bereich enthält mindestens eine Menge Z, welche die Nullmenge als Element enthält und so beschaffen ist, daß jedem ihrer

---

*) Über die Berechtigung dieses Axiomes vgl. meine Abhandlung Math. Ann. Bd. 65, p. 107—128, wo im § 2 p. 111ff. die bezügliche Literatur erörtert wird.

**) „Was sind und was sollen die Zahlen?" § 5 Nr 66. Der von Herrn Dedekind hier versuchte „Beweis" dieses Prinzips kann nicht befriedigen, da er von der „Menge alles Denkbaren" ausgeht, während für unseren Standpunkt nach Nr. 10 der Bereich $\mathfrak{B}$ selbst *keine* Menge bildet.

Elemente a ein weiteres Element der Form $\{a\}$ entspricht, oder welche mit jedem ihrer Elemente a auch die entsprechende Menge $\{a\}$ als Element enthält.

(Axiom des Unendlichen.)

14$_{\text{VII}}$.*) Ist Z eine beliebige Menge von der in VII geforderten Beschaffenheit, so ist für jede ihrer Untermengen Z_1 definit, ob sie die gleiche Eigenschaft besitzt. Denn ist a irgend ein Element von Z_1, so ist definit, ob auch $\{a\} \varepsilon Z_1$ ist, und alle so beschaffenen Elemente a von Z_1 bilden die Elemente einer Untermenge Z_1', für welche definit ist, ob $Z_1' = Z_1$ ist oder nicht. Somit bilden alle Untermengen Z_1 von der betrachteten Eigenschaft die Elemente einer Untermenge $T \in \mathfrak{U}Z$, und der ihnen entsprechende Durchschnitt (Nr. 9) $Z_0 = \mathfrak{D}T$ ist eine Menge von der gleichen Beschaffenheit. Denn einmal ist 0 gemeinsames Element aller Elemente Z_1 von T, und andererseits, wenn a gemeinsames Element aller dieser Z_1 ist, so ist auch $\{a\}$ allen gemeinsam und somit gleichfalls Element von Z_0.

Ist nun Z' irgend eine andere Menge von der im Axiom geforderten Beschaffenheit, so entspricht ihr in genau derselben Weise wie Z_0 dem Z eine kleinste Untermenge Z_0' von der betrachteten Eigenschaft. Nun muß aber auch der Durchschnitt $[Z_0, Z_0']$, welcher eine gemeinsame Untermenge von Z und Z' ist, die gleiche Beschaffenheit wie Z und Z' haben und als Untermenge von Z den Bestandteil Z_0, sowie als Untermenge von Z' den Bestandteil Z_0' enthalten. Nach I folgt also, daß $[Z_0, Z_0'] = Z_0 = Z_0'$ sein muß, und daß somit Z_0 *der gemeinsame Bestandteil aller möglichen wie Z beschaffenen Mengen* ist, obwohl diese nicht die Elemente einer Menge zu bilden brauchen. Die Menge Z_0 enthält die Elemente 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$ usw. und möge als *„Zahlenreihe“* bezeichnet werden, weil ihre Elemente die Stelle der Zahlzeichen vertreten können. Sie bildet das einfachste Beispiel einer „abzählbar unendlichen“ Menge (Nr. 36).

§ 2.

Theorie der Äquivalenz.

Die „Äquivalenz“ zweier Mengen**) läßt sich für unseren Standpunkt zunächst nur für den Fall definieren, wo die Mengen „elementenfremd“ (Nr. 3) sind, und kann erst nachträglich auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden.

15. Definition A. Zwei elementenfremde Mengen M und N heißen *„unmittelbar äquivalent“*, $M \sim N$, wenn ihr Produkt MN (Nr. 13) mindestens eine solche Untermenge Φ besitzt, daß jedes Element von $M + N$ in einem

*) Die Indizes VI oder VII an der Nummer eines Theorems sollen ausdrücken, daß hier das Axiom VI oder VII explizit oder implizit zur Anwendung kommt.

**) G. Cantor, Math. Annalen Bd. 46, p. 483.

und nur einem Elemente $\{m, n\}$ von Φ als Element erscheint. Eine Menge $\Phi \mathrel{\overline{\in}} MN$ von der betrachteten Beschaffenheit heißt eine „*Abbildung von M auf N*“; zwei Elemente m, n, welche in einem Elemente von Φ vereinigt erscheinen, heißen „aufeinander abgebildet“, sie „entsprechen einander“, das eine ist „das Bild“ des anderen.

16. Ist Φ irgend eine Untermenge von MN, also Element von $\mathfrak{U}(MN)$, und x irgend ein Element von $M + N$, so ist es immer definit (Nr. 4), ob die x enthaltenden Elemente von Φ eine Menge bilden, die aus einem einzigen Element besteht (Nr. 13). Somit ist auch definit, ob *alle* Elemente x von $M + N$ diese Eigenschaft besitzen, d. h. ob Φ eine „Abbildung“ von M auf N darstellt oder nicht. Die sämtlichen Abbildungen Φ bilden also nach III die Elemente einer gewissen Untermenge Ω von $\mathfrak{U}(MN)$, und es ist definit, ob Ω von 0 verschieden ist oder nicht. *Für zwei elementenfremde Mengen M, N ist es also immer definit, ob sie äquivalent sind oder nicht.*

17. Sind zwei äquivalente elementenfremde Mengen M, N durch Φ aufeinander abgebildet, so entspricht auch jeder Untermenge $M_1 \mathrel{\overline{\in}} M$ eine äquivalente Untermenge $N_1 \mathrel{\overline{\in}} N$ vermöge einer Abbildung Φ_1, welche eine Untermenge von Φ ist.

Denn für jedes Element $\{m, n\}$ von Φ ist es definit, ob $m \varepsilon M_1$ ist oder nicht, und alle in dieser Weise zu M_1 gehörenden Elemente von Φ bilden somit die Elemente einer Untermenge $\Phi_1 \mathrel{\overline{\in}} \Phi$. Bezeichnet man nun mit N_1 den Durchschnitt (Nr. 8) von $\mathfrak{S}\Phi_1$ mit N, so erscheint jedes Element von $M_1 + N_1$ nur in einem einzigen Elemente von Φ_1 als Element, weil es sonst auch in Φ mehrfach vorkommen würde, und es ist nach Nr. 15 in der Tat $M_1 \sim N_1$.

18. Sind zwei elementenfremde Mengen M und N einer und derselben dritten Menge R gleichzeitig elementenfremd und äquivalent, oder ist $M \sim R$, $R \sim R'$, $R' \sim N$, wobei je zwei aufeinander folgende Mengen elementenfremd sein sollen, so ist auch immer $M \sim N$.

Es seien $\Phi \mathrel{\overline{\in}} MR$, $\mathrm{X} \mathrel{\overline{\in}} RR'$, $\Psi \mathrel{\overline{\in}} R'N$ drei „Abbildungen“ (Nr. 15), welche bezw. M auf R, R auf R' und R' auf N abbilden. Ist dann $\{m, n\}$ irgend ein Element von MN, so ist definit, ob es ein Element $r \varepsilon R$ und ein Element $r' \varepsilon R'$ gibt, so daß gleichzeitig $\{m, r\} \, \varepsilon \Phi$, $\{r, r'\} \, \varepsilon \mathrm{X}$ und $\{r', n\} \, \varepsilon \Psi$ ist. Alle Elemente $\{m, n\}$ von dieser Beschaffenheit bilden somit die Elemente einer Menge $\Omega \mathrel{\overline{\in}} MN$, welche eine Abbildung von M auf N darstellt. Ist nämlich etwa m irgend ein Element von M, so entspricht ihm immer ein einziges Element $r \varepsilon R$, ein einziges $r' \varepsilon R'$ und somit auch ein einziges $n \varepsilon N$ von der verlangten Beschaffenheit; das Analoge gilt für jedes Element n von N. Jedem Elemente von $M + N$ entspricht also in der Tat ein einziges Element $\{m, n\}$ von Ω, und es ist wirklich $M \sim N$.

19. Theorem. Sind M und N irgend zwei Mengen, so gibt es immer eine Menge M', welche der einen M äquivalent und der anderen N elementenfremd ist.

Beweis. Es sei $S = \mathfrak{S}(M+N)$ gemäß V die Menge, welche die Elemente der Elemente von $M+N$ umfaßt, und r gemäß Nr. 10 ein Ding, welches nicht Element von $M+S$ ist. Dann sind die Mengen M und $R = \{r\}$ elementenfremd, und das Produkt $M' = MR$ besitzt die im Theorem verlangte Eigenschaft. In der Tat ist dann jedes Element von M' nach Nr. 13 eine Menge der Form $m' = \{m, r\}$, wo $m \varepsilon M$ ist, und niemals Element von $M+N$, weil sonst r Element eines Elementes von $M+N$ und damit gemäß V Element von S wäre gegen die Annahme. Also ist M' beiden Mengen M und N elementenfremd.

Ferner entspricht jedem Element m von M ein und nur ein Element $m' = \{m, r\}$, und umgekehrt enthält jedes m' nur ein einziges Element m von M als Element, da r kein Element von M sein sollte. Jedem Element von $M+M'$ entspricht also ein einziges Element $\{m, m'\}$ von MM', für welches $m' = \{m, r\}$ ist, und wenn man alle so beschaffenen Paare $\{m, m'\}$ zu einer Untermenge $\Phi \subseteq MM'$ rechnet, so ist nach Nr. 15 Φ eine Abbildung von M auf M' und $M \sim M'$.

Aus unserem Satze folgt, daß *die sämtlichen Mengen, welche einer nicht verschwindenden Menge M äquivalent sind, nicht die Elemente einer Menge T bilden können;* denn ist T eine beliebige Menge, so gibt es immer eine Menge $M' \sim M$, welche der Vereinigung $\mathfrak{S}T$ elementenfremd und daher *nicht* Element von T ist.

20. Sind M und N irgend zwei Mengen, so ist es immer definit, ob es eine Menge R gibt, welche beiden Mengen M und N gleichzeitig elementenfremd und äquivalent ist.

Es sei nämlich M' gemäß Nr. 19 eine Menge, welche M äquivalent und $M+N$ elementenfremd ist. Dann ist nach Nr. 16 definit, ob $M' \sim N$ ist oder nicht. Im ersteren Falle ist $R = M'$ eine Menge von der verlangten Beschaffenheit, im entgegengesetzten Falle kann es eine solche Menge R überhaupt nicht geben, da nach Nr. 18 aus $M' \sim M$, $M \sim R$ und $R \sim N$ immer $M' \sim N$ folgen müßte gegen die Annahme.

Das vorstehende Theorem in Verbindung mit Nr. 18 berechtigt uns jetzt zu der folgenden Erweiterung unserer Definition A:

21. Definition B. Zwei beliebige (nicht elementenfremde) Mengen M und N heißen *„mittelbar äquivalent"*, $M \sim N$, wenn es eine dritte Menge R gibt, welche ihnen beiden elementenfremd und im Sinne der Definition A beiden „unmittelbar äquivalent" ist.

Eine solche durch R „vermittelte" Äquivalenz zweier Mengen M und N wird gegeben durch *zwei simultane* „Abbildungen" $\Phi \subseteq MR$ und

$\Psi \Subset NR$, und zwei Elemente $m \varepsilon M$ und $n \varepsilon N$ heißen „entsprechend" oder „aufeinander abgebildet", wenn sie einem und demselben dritten Elemente $r \varepsilon R$ entsprechen, so daß gleichzeitig $\{m, r\} \varepsilon \Phi$ und $\{n, r\} \varepsilon \Psi$ ist. Auch bei einer solchen vermittelten Abbildung entspricht wie in Nr. 17 jeder Untermenge M_1 von M eine äquivalente Untermenge R_1 von R und somit wieder eine äquivalente Untermenge $N_1 \Subset N$.

Wegen Nr. 18 kann diese Definition B auch auf elementenfremde Mengen M, N angewendet werden, und nach Nr. 20 ist es immer *definit, ob zwei beliebige Mengen* im Sinne dieser Definition *äquivalent sind oder nicht.*

22. Jede Menge ist sich selbst äquivalent. Sind zwei Mengen M, N einer dritten R äquivalent, so sind sie einander ~~selbst~~ äquivalent.

Ist nämlich gemäß Nr. 19 M' eine Menge, welche M elementenfremd und äquivalent ist, so ist gleichzeitig $M \sim M'$ und $M' \sim M$, also nach Nr. 21 wirklich $M \sim M$.

Ist ferner die Äquivalenz der Mengen M und R vermittelt durch M', sowie die Äquivalenz von R und N vermittelt durch N', wobei M' zu M und R, sowie N' zu N und R elementenfremd sein soll, so wählen wir gemäß Nr. 19 eine sechste Menge R', welche $\sim R$ und der Summe $M + N + R$ elementenfremd ist, und haben dann wegen Nr. 18

$$M \sim M' \sim R \sim R', \quad \text{also} \quad M \sim R'$$

und

$$N \sim N' \sim R \sim R', \quad \text{also} \quad N \sim R',$$

so daß nach Nr. 21 die Äquivalenz von M und N durch R' vermittelt ist.

23. Die Nullmenge ist nur sich selbst äquivalent. Jede Menge der Form $\{a\}$ ist jeder anderen Menge $\{b\}$ derselben Form und keiner sonstigen Menge äquivalent.

Denn da das Produkt $0 \cdot M$ immer $= 0$ ist, so kann keine Menge $M \neq 0$ im Sinne der Nr. 15 der Nullmenge (unmittelbar) und somit auch keine Menge M' im Sinne von Nr. 21 ihr „mittelbar" äquivalent sein.

Ist ferner $\{a\}$ elementenfremd zu M, d. h. a nicht εM, so sind alle Elemente des Produktes $\{a\} M$ von der Form $\{a, m\}$, und wenn M außer m noch ein weiteres Element p enthielte, so wären $\{a, m\}$ und $\{a, p\}$ nicht elementenfremd, wie in Nr. 15 für jede „Abbildung" $\Phi \Subset \{a\} M$ gefordert. Dagegen ist $\{a\} \cdot \{b\} = \{a, b\}$ stets eine Abbildung von $\{a\}$ auf $\{b\}$.

24. Theorem. Ist $M \sim M'$ und $N \sim N'$, während M und N einerseits, M' und N' andererseits einander elementenfremd sind, so ist immer

$$M + N \sim M' + N'.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, wo $M + N$ und $M' + N'$ elementenfremd sind. Dann ist auf beide Äquivalenzen $M \sim M'$ und $N \sim N'$ die Definition A Nr. 15 anwendbar, und es gibt zwei

Abbildungen $\Phi \mathrel{\overline{\in}} MM'$ und $\Psi \mathrel{\overline{\in}} NN'$, deren Summe $\Phi + \Psi$ die verlangte Abbildung von $M + N$ auf $M' + N'$ darstellt. Ist nämlich $p \varepsilon (M + N)$, so ist entweder $p \varepsilon M$ oder $p \varepsilon N$, aber wegen $[M, N] = 0$ nicht beides gleichzeitig, und im einen Falle enthält Φ, im anderen Ψ ein einziges Element der Form $\{p, q\}$. Ebenso entspricht auch jedem Elemente q von $M' + N'$ ein und nur ein Element $\{p, q\}$ in $\Phi + \Psi$.

Sind $M + N$ und $M' + N'$ nicht selbst elementenfremd, so gibt es gemäß Nr. 19 eine Menge $S'' \sim M' + N'$, welche der Summe $M + N + M' + N'$ elementenfremd ist, und bei einer Abbildung X von $M' + N'$ auf S'' mögen wegen Nr. 17 den beiden Teilen M' und N' die äquivalenten und elementenfremden Teile M'' und N'' von S'' entsprechen. Dann ist $M \sim M' \sim M''$ sowie $N \sim N' \sim N''$ und, da jetzt $M + N$ und $M'' + N''$ elementenfremd sind, nach dem soeben Bewiesenen

$$M + N \sim M'' + N'' = S'' \sim M' + N',$$

also wieder

$$M + N \sim M' + N'.$$

25. Theorem. Ist eine Menge M einem ihrer Teile M' äquivalent, so ist sie auch jedem anderen Teile M_1 äquivalent, welcher M' als Bestandteil enthält.

Beweis. Es sei

$$M \sim M' \mathrel{\overline{\in}} M_1 \mathrel{\overline{\in}} M \quad \text{und} \quad Q = M_1 - M'.$$

Wegen der vorausgesetzten Äquivalenz $M \sim M'$ gibt es gemäß Nr. 21 eine Abbildung $\{\Phi, \Psi\}$ von M auf M', vermittelt etwa durch M''. Ist nun A eine beliebige Untermenge von M, so entspricht ihr bei der betrachteten Abbildung eine bestimmte Untermenge A' von M', und es ist definit, ob $A' \mathrel{\overline{\in}} A$ ist oder nicht. Somit bilden alle solchen Elemente A von $\mathfrak{U}M$, für welche gleichzeitig $Q \mathrel{\overline{\in}} A$ und $A' \mathrel{\overline{\in}} A$ ist, nach III die Elemente einer gewissen Menge $T \mathrel{\overline{\in}} \mathfrak{U}M$, und es ist namentlich M selbst Element von T. Der gemeinsame Bestandteil $A_0 = \mathfrak{D}T$ aller Elemente von T (Nr. 9) besitzt nun die folgenden Eigenschaften: 1) $Q \mathrel{\overline{\in}} A_0$, weil Q eine gemeinsame Untermenge aller $A \varepsilon T$ ist, 2) $A_0' \mathrel{\overline{\in}} A_0$, weil jedes Element x von A_0 gemeinsames Element aller $A \varepsilon T$ und somit auch sein Bild $x' \varepsilon A' \mathrel{\overline{\in}} A$ gemeinsames Element aller A ist. Wegen 1) und 2) ist also auch $A_0 \varepsilon T$. Endlich ist 3) $A_0 = Q + A_0'$. Da nämlich $A_0' \mathrel{\overline{\in}} A_0$ und gleichzeitig $\mathrel{\overline{\in}} M' \mathrel{\overline{\in}} M - Q$ ist, so ist einmal $A_0' \mathrel{\overline{\in}} A_0 - Q$. Andererseits ist aber auch jedes Element r von $A_0 - Q$ ein Element von A_0' und daher $A_0 - Q \mathrel{\overline{\in}} A_0'$. In der Tat, wäre r nicht $\varepsilon A_0'$, so würde auch $A_1 = A_0 - \{r\}$ noch A_0' und a fortiori A_1' als Bestandteil enthalten und, da es immer noch Q enthält, selbst Element von T sein, während es doch nur ein *Teil* von $A_0 = \mathfrak{D}T$ ist. Es ist also

$$M_1 = Q + M' = (Q + A_0') + (M' - A_0') = A_0 + (M' - A_0'),$$

wo die beiden Summanden rechts keine Elemente gemein haben, weil Q und M' elementenfremd sind. Da nun aber $A_0 \sim A_0'$ und $M' - A_0'$ sich selbst äquivalent ist, so folgt nach Nr. 24

$$M_1 \sim A_0' + (M' - A_0') = M' \sim M,$$

d. h. wie behauptet, $M_1 \sim M$.

26. Folgerung. Ist eine Menge M einem ihrer Teile M' äquivalent, so ist sie auch jeder Menge M_1 äquivalent, welche aus M durch Fortlassung oder Hinzufügung eines einzelnen Elementes entsteht.

Es sei

$$M \sim M' = M - R \quad \text{und} \quad M_1 = M - \{r\},$$

wo $r \varepsilon R$ sein möge. Dann ist

$$M' = M - \{r\} - (R - \{r\}) \Subset M - \{r\} = M_1$$

und nach dem vorigen Satze $M \sim M_1$.

Ist ferner

$$M_2 = M - \{a\}, \quad \text{wo} \quad a \varepsilon M' = M - R$$

ist, so sei

$$M_0 = M - \{a, r\},$$

und wir haben nach Nr. 23 und 24

$$M_2 = M_0 + \{r\} \sim M_0 + \{a\} = M_1 \sim M,$$

also auch

$$M_2 \sim M.$$

Ist endlich

$$M_3 = M + \{c\},$$

wo c nicht εM ist, so folgt aus $M \sim M'$ wieder nach Nr. 24

$$M_3 = M + \{c\} \sim M' + \{c\} = M - R + \{c\} = M_3 - R,$$

und nach dem vorher Bewiesenen weiter

$$M = M_3 - \{c\} \sim M_3,$$

womit der Satz in allen seinen Teilen bewiesen ist.

27. Äquivalenzsatz. Ist jede von zwei Mengen M, N einer Untermenge der anderen äquivalent, so sind M und N selbst äquivalent.

Es sei $M \sim M' \Subset N$ und $N \sim N' \Subset M$. Dann entspricht wegen Nr. 21 der Untermenge M' von N eine äquivalente Untermenge $M'' \Subset N' \Subset M$, und es ist $M \sim M' \sim M''$, also nach dem Theorem Nr. 25 auch $M \sim N' \sim N$, q. e. d.*)

*) Der hier in den Nrn. 25 und 27 gegebene Beweis des „Äquivalenzsatzes" (auf Grund meiner brieflichen Mitteilung vom Jan. 1906 zuerst publiziert von Herrn H. Poincaré in der Revue de Métaphysique et de Morale t. 14, p. 314) beruht lediglich auf der Dedekindschen Kettentheorie (Was sind und was sollen die Zahlen? § 4) und vermeidet im Gegensatz zu den älteren Beweisen von E. Schröder und F. Bernstein, sowie zu dem letzten Beweise von J. König (Comptes Rendus t. 143, 9 VII 1906) jede Bezugnahme auf geordnete Reihen vom Typus ω oder das Prinzip der voll-

28. Theorem. Ist T eine beliebige Menge, deren Elemente $M, N, R, \cdots$ sämtlich Mengen sind, so kann man sie alle gleichzeitig abbilden auf äquivalente Mengen $M', N', R', \cdots$, welche die Elemente einer neuen Menge T' bilden und unter sich sowohl wie einer gegebenen Menge Z elementenfremd sind.

Beweis. Es sei $S = \mathfrak{S}T = M + N + R + \cdots$ nach V die Summe aller Elemente von T, und gemäß Nr. 19 sei T'' eine Menge, welche T äquivalent und der Summe $T + S + \mathfrak{S}(S + Z)$ elementenfremd ist, so daß vermöge einer Abbildung Ω jedem Elemente $M, N, R, \cdots$ von T ein bestimmtes Element $M'', N'', R'', \cdots$ von T'' entspricht. Ein beliebiges Element des Produktes ST'' (Nr. 13) ist dann von der Form $\{s, M''\}$, wo $s \varepsilon S$ und $M'' \varepsilon T''$ ist, und für jedes solche Element ist es definit (Nr. 4), ob $s \varepsilon M$ ist, wo M das dem M'' vermöge Ω entsprechende Element von T, d. h. gemäß Nr. 15 $\{M, M''\} \varepsilon \Omega$ sein soll. Alle so beschaffenen Elemente des Produktes bilden somit wegen III die Elemente einer Untermenge S' von ST'', und diese Menge S' ist $S + Z$ elementenfremd, weil sonst ein $M'' \varepsilon T''$ als Element von $\{s, M''\}$ Element eines Elementes von $S + Z$, also wegen V Element von $\mathfrak{S}(S + Z)$ wäre gegen die über T'' gemachte Annahme. Ist ferner M ein beliebiges Element von T, und M'' das entsprechende von T'', so bilden diejenigen Elemente $\{s, M''\}$ von S', welche M'' als Element enthalten, nach III eine gewisse Untermenge $M' \Subset S'$, und es ist $M' \sim M$ vermöge einer Abbildung $\mathsf{M} \Subset MM' \Subset SS'$, in welcher jedem Elemente m von M ein Element $m' = \{m, M''\}$ von M' entspricht und umgekehrt. Ebenso gehört auch zu jedem anderen Element $N \varepsilon T$ eine äquivalente Untermenge $N' \Subset S'$ und eine Abbildung $\mathsf{N} \Subset NN' \Subset SS'$, durch welche jedem Elemente n von N ein Element $\{n, N''\}$ von N' entspricht. Die beiden Untermengen M' und N', welche zu zwei verschiedenen Elementen M und N von T gehören, sind aber immer elementenfremd, denn wäre etwa

$$\{m, M''\} = \{n, N''\}$$

ein gemeinsames Element von M' und N', so müßte M'' als Element von $\{n, N''\}$ entweder $= N''$ oder $= n$ sein, und im ersten Falle wäre auch $M = N$, im zweiten aber wären T'' und S nicht elementenfremd, gegen die Annahme. Die Untermengen $M', N', R', \cdots$ von S', welche vermöge der Abbildungen $\mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{P}, \cdots$ den Elementen $M, N, R, \cdots$, von

ständigen Induktion. Einen ganz ähnlichen Beweis veröffentlichte ungefähr gleichzeitig Herr G. Peano („Super Teorema de Cantor-Bernstein", Rendiconti del Circolo Matematico XXI sowie Revista de Mathematica VIII, p. 136), wo in der letztgenannten Note zugleich auch der von Herrn H. Poincaré gegen meinen Beweis gerichtete Einwand erörtert wird. Vgl. meine Note Math. Ann. Bd. 65, p. 107—128, § 2 b.

T äquivalent sind, sind also in der Tat sowohl unter sich als auch, weil S' es ist, der Menge Z elementenfremd. Endlich ist von jeder Untermenge $S_1' \in S'$, welche ein Element $\{s, M''\}$ enthält, immer definit, ob sie mit der entsprechenden Menge M' identisch ist oder nicht, und alle diese $M', N', R', \cdots$ bilden gemäß III und IV die Elemente einer gewissen Menge $T' \in \mathfrak{U} S'$; der Satz ist also in allen seinen Teilen bewiesen.

29_{VI}. Allgemeines Auswahlprinzip. Ist T eine Menge, deren Elemente $M, N, R, \cdots$ sämtlich von Null verschiedene Mengen sind, so gibt es immer Mengen P, welche nach einer bestimmten Vorschrift jedem Element M von T eines seiner Elemente $m \varepsilon M$ eindeutig zuordnen.

Beweis. Man wende auf T' das in der vorhergehenden Nr. 28 angegebene Verfahren an, wobei $Z = 0$ gesetzt werden kann, und hat dann alle Mengen $M, N, R, \cdots$ gleichzeitig abgebildet auf die äquivalenten Mengen $M', N', R', \cdots$, welche unter sich elementenfremd sind und die Elemente einer Menge T' bilden. Ist nun P gemäß VI eine solche Untermenge von $\mathfrak{S} T'$, welche mit jedem Element von T' genau ein Element gemein hat, so leistet P die verlangte Zuordnung. Ist nämlich M irgend ein Element von T und ist M' das entsprechende Element von T', so enthält P nur ein einziges Element m' von M', und diesem entspricht wieder ein ganz bestimmtes Element m von M.

30_{VI}. Theorem. Sind zwei äquivalente Mengen T und T', deren Elemente $M, N, R, \cdots$ bzw. $M', N', R', \cdots$ unter sich elementenfremde Mengen sind, so aufeinander abgebildet, daß jedem Element M der einen Menge eine äquivalente Menge M' als Element der anderen entspricht, so sind auch die zugehörigen Summen $\mathfrak{S} T$ und $\mathfrak{S} T'$, sowie die entsprechenden Produkte $\mathfrak{P} T$ und $\mathfrak{P} T'$ einander äquivalent.

Beweis. Wir beweisen den Satz zunächst unter der Annahme, daß $S = \mathfrak{S} T$ und $S' = \mathfrak{S} T'$ einander elementenfremd sind, in welchem Falle auch jedes Element von T jedem Element von T' elementenfremd sein muß. Aus $M \sim M'$ folgt dann gemäß Nr. 15, daß $\mathfrak{U}(MM')$ eine von 0 verschiedene Untermenge A_M besitzt, welche die sämtlichen möglichen Abbildungen $\mathsf{M}, \mathsf{M}', \mathsf{M}'', \cdots$ von M auf M' als Elemente enthält. Ebenso entspricht jedem anderen Element N von T eine Menge $\mathsf{A}_N \in \mathfrak{U}(NN')$, welche die sämtlichen Abbildungen von N auf N' umfaßt, und auch A_N ist $\neq 0$. Alle diese Abbildungsmengen $\mathsf{A}_M, \mathsf{A}_N, \mathsf{A}_R, \cdots$ sind Untermengen von $\mathfrak{U}(SS')$ und bilden daher wegen III und IV die Elemente einer gewissen Untermenge $\mathsf{T} \in \mathfrak{U}\mathfrak{U}(SS')$. Da nun die Elemente von T sämtlich von 0 verschiedene Mengen und unter sich elementenfremd sind (weil aus der Elementenfremdheit von MM' und NN' auch die ihrer Untermengen folgt), so ist nach Axiom VI auch das Produkt $\mathfrak{P}\mathsf{T} \neq 0$, und ein beliebiges Element Θ von $\mathfrak{P}\mathsf{T}$ ist eine Menge der Form $\Theta = \{\mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{P}, \cdots\}$, welche von jeder der Mengen $\mathsf{A}_M, \mathsf{A}_N, \mathsf{A}_R, \cdots$ genau ein Element enthält. Die Existenz einer solchen „kombinierten Abbildung" hätten wir kürzer auch aus dem Theorem Nr. 29 schließen können. Bilden wir nun gemäß V die Vereinigung

$$\Omega = \mathfrak{S}\Theta = \mathsf{M} + \mathsf{N} + \mathsf{P} + \cdots \in SS',$$

so liefert Ω die verlangte Abbildung von S auf S'. Denn jedes Element s von S muß einem und nur einem Elemente von T, etwa M, als Element angehören und daher in einem einzigen Element der entsprechenden Abbildung M als Element erscheinen, während in allen übrigen Summanden $\mathsf{N}, \mathsf{P}, \cdots$ kein Element von M mehr vorkommt. Das analoge gilt auch für jedes Element s' von S', und nach der Definition Nr. 15 ist somit in der Tat $S \sim S'$.

Durch dasselbe Ω und seine Untermengen wird wegen Nr. 17 auch jede Untermenge p von S auf eine äquivalente Untermenge p' von S' abgebildet, und ist insbesondere $p = \{m, n, \cdots\}$ gemäß Nr. 13 ein Element von $P = \mathfrak{P}T$, so ist die ihm entsprechende Untermenge $p' = \{m', n', \cdots\}$ von S' auch ein Element von $\mathfrak{P}T'$. Ist nämlich M' ein beliebiges Element von T', und M das entsprechende Element von T, so enthält p ein und nur ein Element $m \varepsilon M$ und p' das entsprechende Element $m' \varepsilon M'$, aber auch kein weiteres Element von M', da ein solches auch einem zweiten Elemente von M in p entsprechen müßte. Ebenso entspricht jedem Elemente $p' \varepsilon \mathfrak{P}T'$ ein und nur ein Element $p \varepsilon \mathfrak{P}T$, und wir erhalten in der Tat eine bestimmte Untermenge $\Pi \in \mathfrak{P}T \cdot \mathfrak{P}T'$ als Abbildung von $\mathfrak{P}T$ auf $\mathfrak{P}T'$, so daß auch diese beiden Produkte einander äquivalent sind.

Sind nun aber S und S' nicht mehr elementenfremd, so können wir gemäß Nr. 19 eine dritte Menge S'' einführen, welche S' äquivalent und $S + S'$ elementenfremd ist. Dann entspricht wegen Nr. 17 einer Untermenge $M' \in S'$ eine äquivalente Untermenge $M'' \in S''$, und da die $M', N', R', \cdots$ untereinander elementenfremd sind, so gilt das gleiche auch von den entsprechenden $M'', N'', R'', \cdots$. Da ferner jedes Element s'' von S'' einem Elemente s' von S' entspricht, welches einer der Mengen $M', N', R', \cdots$ angehört, so ist S'' die *Summe* aller dieser $M'', N'', R'', \cdots$, welche die Elemente einer gewissen Untermenge $T'' \in \mathfrak{U}S''$ bilden. Nun haben wir aber $M \sim M' \sim M''$, $N \sim N' \sim N''$, $\cdots$; es ist also jedes Element M von T dem entsprechenden Element M'' von T'' äquivalent, und da jetzt $S'' = \mathfrak{S}T''$ beiden Summen $S' = \mathfrak{S}T'$ und $S = \mathfrak{S}T$ elementenfremd ist, so folgt nach dem oben Bewiesenen:

$$\mathfrak{S}T \sim \mathfrak{S}T'' \sim \mathfrak{S}T' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}T \sim \mathfrak{P}T'' \sim \mathfrak{P}T',$$

womit der Satz in voller Allgemeinheit bewiesen ist.

31. Definition. Ist eine Menge M einer Untermenge der Menge N

äquivalent, aber nicht umgekehrt N einer Untermenge von M, so sagen wir, M sei „von *kleinerer Mächtigkeit* als N", und schreiben abgekürzt $M < N$.

Folgerungen. a) Da es nach Nr. 21 für irgend zwei Mengen definit ist, ob sie einander äquivalent sind oder nicht, so ist es auch definit, ob M mindestens einem Element von $\mathfrak{U}N$, sowie ob N irgend einem Element von $\mathfrak{U}M$ äquivalent ist. *Es ist also immer definit, ob $M < N$ ist oder nicht.*

b) Die drei Beziehungen $M < N$, $M \sim N$, $N < M$ schließen einander aus.

c) Ist $M < N$ und $N < R$ oder $N \sim R$, so ist immer auch $M < R$.

d) Ist M einer Untermenge von N äquivalent, so ist entweder $M \sim N$ oder $M < N$. Dies ist eine Folge des „Äquivalenzsatzes" Nr. 27.

e) Die Nullmenge ist von kleinerer Mächtigkeit als jede andere Menge, ebenso jede aus einem einzigen Elemente bestehende Menge $\{a\}$ von kleinerer Mächtigkeit als jede Menge M, welche echte Teile besitzt. Vergl. Nr. 23.

32. Satz von Cantor. Ist M eine beliebige Menge, so ist immer $M < \mathfrak{U}M$. *Jede Menge ist von kleinerer Mächtigkeit als die Menge ihrer Untermengen.*

Beweis. Jedem Element m von M entspricht eine Untermenge $\{m\} \in\!\!\!= M$. Da es nun für jede Untermenge $M_1 \in\!\!\!= M$ definit ist, ob sie nur ein einziges Element enthält (Nr. 13), so bilden alle Untermengen der Form $\{m\}$ die Elemente einer Menge $U_0 \in\!\!\!= \mathfrak{U}M$, und es ist $M \sim U_0$.

Wäre umgekehrt $U = \mathfrak{U}M$ äquivalent einer Untermenge $M_0 \in\!\!\!= M$, so entspräche vermöge einer Abbildung Φ von U auf M_0 jeder Untermenge $M_1 \in\!\!\!= M$ ein bestimmtes Element m_1 von M_0, so daß $\{M_1, m_1\} \varepsilon \Phi$ wäre, und es wäre immer definit, ob $m_1 \varepsilon M_1$ ist oder nicht. Alle solchen Elemente m_1 von M_0, für welche *nicht* $m_1 \varepsilon M_1$ ist, bildeten also die Elemente einer Untermenge $M' \in\!\!\!= M_0 \in\!\!\!= M$, welche gleichfalls Element von U wäre. Dieser Menge $M' \in\!\!\!= M$ kann aber kein Element m' von M_0 entsprechen. Wäre nämlich $m' \varepsilon M'$, so widerspräche dies der Definition von M'. Wäre aber m' *nicht* $\varepsilon M'$, so müßte nach derselben Definition M' auch dieses Element m' enthalten, widersprechend der Annahme. Es ergibt sich also, daß U keiner Untermenge von M äquivalent sein kann, und in Verbindung mit dem zuerst Bewiesenen, $M < \mathfrak{U}M$.

Der Satz gilt für *alle* Mengen M, z. B. auch für $M = 0$, und es ist in der Tat

$$0 < \{0\} = \mathfrak{U}(0).$$

Ebenso ist auch für jedes a

$$\{a\} < \{0, \{a\}\} = \mathfrak{U}\{a\}.$$

Aus dem Satze folgt endlich, daß es zu jeder beliebigen Menge T von

Mengen $M, N, R, \cdots$ immer noch Mengen von größerer Mächtigkeit gibt; z. B. die Menge

$$P = \mathfrak{U}\mathfrak{S}T > \mathfrak{S}T \gtrsim M, N, R, \cdots$$

besitzt diese Eigenschaft.

33_{VI}. Theorem. Sind zwei äquivalente Mengen T und T', deren Elemente $M, N, R, \cdots$ bzw. $M', N', R', \cdots$ unter sich elementenfremde Mengen sind, so aufeinander abgebildet, daß jedes Element M von T von kleinerer Mächtigkeit ist als das entsprechende Element M' von T', so ist auch die Summe $S = \mathfrak{S}T$ aller Elemente von T von kleinerer Mächtigkeit als das Produkt $P' = \mathfrak{P}T'$ aller Elemente von T'.

Beweis. Es genügt, den Satz für den Fall zu beweisen, wo die beiden Summen $S = \mathfrak{S}T$ und $S' = \mathfrak{S}T'$ elementenfremd sind. Die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall vollzieht sich dann analog wie bei dem Theorem Nr. 30 und mit Hilfe desselben durch Einschaltung einer dritten Menge $S'' \sim S$, welche S' elementenfremd ist.

Zunächst ist zu zeigen, daß S einer Untermenge von P' äquivalent ist. Wegen $M < M'$ existiert eine von 0 verschiedene Untermenge $\mathsf{A}_M \in \mathfrak{U}(MM')$, deren sämtliche Elemente $\mathsf{M}, \mathsf{M}', \mathsf{M}'', \cdots$ Abbildungen sind, welche M auf Untermengen $M_1', M_2', \cdots$ von M' abbilden. Solche Abbildungsmengen $\mathsf{A}_M, \mathsf{A}_N, \mathsf{A}_R, \cdots$ existieren für je zwei entsprechende Elemente $\{M, M'\}$, $\{N, N'\}$, $\{R, R'\}, \cdots$ von T und T', und jedes Element $\Theta = \{\mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{P}, \cdots\}$ ihres Produktes $\mathfrak{P}\mathsf{T} = \mathsf{A}_M \cdot \mathsf{A}_N \cdot \mathsf{A}_R \cdots$ liefert, analog wie in Nr. 30, eine simultane Abbildung sämtlicher Elemente $M, N, R, \cdots$ von T auf äquivalente Untermengen $M_1', N_1', R_1', \cdots$ der entsprechenden Elemente von T'. Durch $\Omega = \mathfrak{S}\Theta \in SS'$ wird also jedes Element s von S auf ein Element s' von S' abgebildet, wenn auch nicht umgekehrt jedes von S' auf eines von S.

Nun sind aber die Komplementärmengen $M' - M_1', N' - N_1', R' - R_1', \cdots$, welche die Elemente einer Menge $T_1' \in \mathfrak{U}S'$ bilden, sämtlich von 0 verschieden, weil wegen $M < M'$ der Fall $M \sim M_1' = M'$ immer ausgeschlossen ist. Somit ist auch das Produkt $\mathfrak{P}T_1' \neq 0$, und es existiert mindestens eine Menge $q \,\varepsilon\, \mathfrak{P}T_1'$ von der Form $q = \{m_0', n_0', r_0', \cdots\} \in S'$, welche mit jeder der Mengen $M' - M_1', N' - N_1', \cdots$ genau ein Element gemein hat und daher auch Element von P' ist.

Ist nun s irgend ein Element von S, und s' das vermöge Ω ihm entsprechende Element von S', so entspricht ihnen beiden noch ein Element s_0 von $q \in S'$ in der Weise, daß s' und s_0' immer einem und demselben Elemente von T' angehören und somit für $s \,\varepsilon\, M$ immer $s_0' = m_0'$ ist usw. Da aber im Falle $s' \varepsilon\, M_1'$ stets $s_0' \varepsilon\, (M' - M_1')$ ist, so sind s' und s_0' immer voneinander verschieden. Bilden wir nun die Menge

$$q_s = q - \{s_0'\} + \{s'\},$$

welche aus q entsteht, indem wir das eine Element s_0' durch das andere s' ersetzen, so erhalten wir wieder ein Element von P', nämlich eine Untermenge von S', welche mit jeder der Mengen $M', N', R', \cdots$ genau ein Element gemein hat. Diese Elemente q_s von P', welche die Elemente einer Untermenge $P_0' \mathrel{-\!\!\!\in} P'$ bilden, sind aber sämtlich voneinander verschieden. Denn sind etwa m_1 und m_2 zwei verschiedene Elemente *derselben* Menge $M \varepsilon T$, so sind auch die entsprechenden Elemente m_1' und m_2' von M_1', welche an die Stelle von s' treten, voneinander verschieden, und somit auch

$$q_{m_1} = q - \{m_0'\} + \{m_1'\} \neq q - \{m_0'\} + \{m_2'\} = q_{m_2},$$

da q außer m_0' kein weiteres Element mit M' gemein hat. Sind aber m und n zwei Elemente von S, welche *verschiedenen* Mengen M und N angehören, so hat $q_m = q - \{m_0'\} + \{m'\}$ mit M' ein Element m' von M_1', dagegen $q_n = q - \{n_0'\} + \{n'\}$ mit M' nur das Element $m_0' \varepsilon (M' - M_1')$ gemeinsam, und beide Mengen sind gleichfalls voneinander verschieden. Somit bilden die Paare $\{s, q_s\}$ die Elemente einer Menge $\Phi \mathrel{-\!\!\!\in} SP_0'$, welche gemäß Nr. 15 den Charakter einer Abbildung besitzt, und es ist in der Tat $S \sim P_0' \mathrel{-\!\!\!\in} P'$.

Andererseits kann aber P' keiner Untermenge S_0 von S äquivalent sein. Wäre dies nämlich der Fall, so müßte vermöge einer Abbildung $\Psi \mathrel{-\!\!\!\in} S_0 P' \mathrel{-\!\!\!\in} SP'$ jedem Elemente $s \varepsilon S_0$ ein Element $p_s \varepsilon P'$ entsprechen. Betrachten wir insbesondere diejenigen Elemente p_m, welche Elementen m des Durchschnittes $M_0 = [M, S_0]$ entsprechen. Jedes dieser p_m enthält dabei ein Element $m'' \varepsilon M'$, nämlich dasjenige, welches p_m als Element von P' mit M' gemeinsam hat; die zu verschiedenen m gehörenden m'' brauchen aber nicht immer verschieden zu sein. Jedenfalls bilden alle m'', die zu den Elementen m von M_0 gehören, die Elemente einer Untermenge M_2' von M', welche von M' selbst verschieden ist, da sonst M' einer Untermenge von $M_0 \mathrel{-\!\!\!\in} M$ äquivalent wäre gegen die Voraussetzung $M < M'$.*) In derselben Weise gehören zu *allen* Elementen $M, N, R, \cdots$ von T gewisse echte Teilmengen $M_2', N_2', R_2', \cdots$ der entsprechenden Elemente $M', N', R', \cdots$ von T'. Die zugehörigen Komplementärmengen $M' - M_2'$, $N' - N_2'$, $R' - R_2'$, $\cdots$ sind also sämtlich von 0 verschieden und bilden die Elemente einer Menge $T_2' \mathrel{-\!\!\!\in} \mathfrak{U} S'$. Ist nun p_0' irgend ein Element von $\mathfrak{P} T_2' \neq 0$, so ist es gleichzeitig auch Element von P', kann aber bei der vorausgesetzten Abbildung Ψ keinem Elemente s von S_0 entsprechen. Wäre nämlich etwa $p_0' = p_m$, entspräche also p_0' einem Elemente von M_0, so müßte es nach der gemachten Annahme mit M' ein Element $m'' \varepsilon M_2'$ gemein haben, während in Wirklichkeit p_0' mit M' kein anderes

*) Auch hier kommt das Auswahlaxiom VI zur Anwendung.

Element als eines von $M' - M_2'$ gemein haben kann. Ebensowenig kann p_0' irgend einem Elemente von $N_0, R_0, \cdots$ entsprechen, entspricht also überhaupt keinem Elemente von $S_0 \prec\!\!\!\in S$, und die Annahme $P' \sim S_0$ führt auf einen Widerspruch, womit der Beweis der Behauptung $S < P'$ vollendet ist.

Das vorstehende (Ende 1904 der Göttinger Mathematischen Gesellschaft von mir mitgeteilte) Theorem ist der allgemeinste bisher bekannte Satz über das Größer und Kleiner der Mächtigkeiten, aus dem alle übrigen sich ableiten lassen. Der Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung des von Herrn J. König für einen speziellen Fall (siehe unten) angewandten Verfahrens.

34$_{\text{VI}}$. Folgerung. (Satz von J. König). Ist eine Menge T, deren Elemente sämtlich Mengen und untereinander elementenfremd sind, in der Weise auf eine Untermenge T' von T abgebildet, daß jedem Elemente M von T ein Element M' von T' von größerer Mächtigkeit ($M < M'$) entspricht, so ist immer $\mathfrak{S}T < \mathfrak{P}T$, sofern $\mathfrak{P}T \neq 0$ ist.*)

Nach dem Theorem Nr. 33 ist in dem betrachteten Falle immer $\mathfrak{S}T < \mathfrak{P}T'$; es bleibt also nur noch zu zeigen, daß hier $\mathfrak{P}T'$ einer Untermenge von $\mathfrak{P}T$ äquivalent ist. Für $T' = T$ ist dies trivial; im anderen Falle ist aber $\mathfrak{P}(T-T') \neq 0$, weil sonst wegen VI die Nullmenge ein Element von $T - T'$ und gegen die Annahme $\mathfrak{P}T = 0$ wäre. Ist aber q irgend ein Element von $\mathfrak{P}(T - T')$ und $p' \varepsilon \mathfrak{P}T'$, so ist $p' + q$ Element von $\mathfrak{P}T$, nämlich eine Untermenge von $\mathfrak{S}T' + \mathfrak{S}(T - T') = \mathfrak{S}T$, welche mit jedem Elemente von T' sowohl als von $T - T'$ genau ein Element gemein hat. Somit entspricht bei festgehaltenem q jedem Element p' von $\mathfrak{P}T'$ ein bestimmtes Element $p' + q$ von $\mathfrak{P}T$, und alle diese $p' + q$ bilden die Elemente einer gewissen Untermenge P_q von $\mathfrak{P}T$, welche $\sim \mathfrak{P}T'$ ist.

35. Auch der Cantorsche Satz Nr. 32 läßt sich als besonderer Fall aus dem allgemeinen Theorem Nr. 33 gewinnen.

Es sei M eine beliebige Menge, M' gemäß Nr. 19 eine M äquivalente und elementenfremde Menge und $\Phi \prec\!\!\!\in MM'$ eine beliebige „Abbildung" von M auf M'. Jedem Element m von M entspricht dann ein bestimmtes Element $\{m, m'\}$ von Φ und es ist immer gemäß Nr. 31e

$$\{m\} < \{m, m'\}.$$

Diese Mengen $\{m\}$ bilden offenbar die Elemente einer weiteren Menge $T \sim M$, und es ist nach dem Theorem Nr. 33

$$M = \mathfrak{S}T < \mathfrak{P}\Phi.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{P}\Phi \sim \mathfrak{U}M$ ist. Nun ist jedes Element von $\mathfrak{P}\Phi$ eine Menge der Form $M_1 + (M' - M_1')$, wo M_1 eine Untermenge von M, und M_1' die entsprechende von M' bedeutet. Somit

*) J. König, Math. Ann. Bd. 60, p. 177 für den besonderen Fall, wo die Elemente von T nach ihrer Mächtigkeit geordnet eine Reihe vom Typus ω bilden.

entspricht in der Tat jedem Elemente M_1 von $\mathfrak{U}M$ ein und nur ein Element von $\mathfrak{P}\Phi$ und umgekehrt, und es ist, wie behauptet,

$$M < \mathfrak{P}\Phi \sim \mathfrak{U}M.$$

36_{VII}. Theorem. Die „Zahlenreihe“ Z_0 (Nr. 14) ist eine „unendliche“ Menge d. h. eine solche, welche einem ihrer Teile äquivalent ist. Umgekehrt enthält auch jede „unendliche“ Menge M einen Bestandteil M_0, welcher „abzählbar unendlich“, d. h. der Zahlenreihe äquivalent ist.

Beweis. Es sei Z eine beliebige Menge, welche gemäß VII das Element 0 und mit jedem ihrer Elemente a auch das entsprechende Element $\{a\}$ enthält, und diese Menge Z sei durch eine Abbildung $\Omega \mathrel{-\!\!\in} ZZ'$ gemäß Nr. 19 abgebildet auf eine ihr äquivalente und elementenfremde Menge Z'. Ist nun $\{z, x'\}$ ein beliebiges Element von ZZ', und $\{x, x'\}$ Element von Ω für dasselbe x', so ist immer definit, ob $z = \{x\}$ ist oder nicht. Alle solchen Elemente $\{\{x\}, x'\}$ von ZZ' bilden also nach III die Elemente einer gewissen Untermenge $\Phi \mathrel{-\!\!\in} ZZ'$, und Φ ist eine „Abbildung“ von Z' auf $Z_1 \mathrel{-\!\!\in} Z$, wo Z_1 alle Elemente der Form $z = \{x\}$ umfaßt. In der Tat entspricht jedem $x' \varepsilon Z'$ ein bestimmtes $\{x\} \varepsilon Z_1$ und umgekehrt, d. h. jedes Element von $Z_1 + Z'$ erscheint in einem und nur einem Elemente von Φ. Es ist also nach Nr. 21 $Z \sim Z' \sim Z_1$, wo Z_1, weil es das Element 0 nicht enthält, nur ein *Teil* von Z ist; und jede wie Z beschaffene Menge, also auch Z_0 ist „unendlich“.

Um nun auch die zweite Hälfte des Theorems zu beweisen, betrachten wir eine beliebige „unendliche“ Menge M, die wir aber mit Rücksicht auf Nr. 19 unbeschadet der Allgemeinheit als elementenfremd zu Z_0 annehmen können. Es sei also $M \sim M' = M - R$, r ein beliebiges Element von $R \neq 0$ und $\{\Phi, \Psi\}$ gemäß Nr. 21 eine Abbildung, bei welcher jedem Elemente $m \varepsilon M$ ein Element $m' \varepsilon M'$ entspricht und umgekehrt. Ferner sei A eine Untermenge des Produktes MZ_0, welche die folgenden Eigenschaften besitzt: 1) sie enthält das Element $\{r, 0\}$; und 2), ist $\{m, z\}$ irgend ein Element von A, so enthält A auch das weitere Element $\{m', z'\}$, wo m' das dem m entsprechende Element von M', und $z' = \{z\}$ wegen Nr. 14 gleichfalls Element von Z_0 ist. Ist nun $\mathsf{A}_0 = \mathfrak{D}\mathsf{T}$ der gemeinsame Bestandteil aller wie A beschaffenen Untermengen von MZ_0, welche wegen III, IV die Elemente einer gewissen Menge $\mathsf{T} \mathrel{-\!\!\in} \mathfrak{U}(MZ_0)$ bilden, so besitzt auch A_0, wie man ohne weiteres erkennt, gleichfalls die Eigenschaften 1) und 2), ist also ebenfalls Element von T. Ferner ist, mit alleiniger Ausnahme von $\{r, 0\}$, jedes Element von A_0 auch von der Form $\{m', z'\}$; denn im entgegengesetzten Falle könnten wir es fortlassen, und der Rest von A_0 besäße immer noch die Eigenschaften 1) und 2), ohne doch, wie alle Elemente von T, den Bestandteil A_0 zu enthalten.

Hieraus folgt zunächst, daß das Element $\{r, 0\}$ allen übrigen Elementen von A_0 elementenfremd ist, da weder $r = m' \varepsilon M'$ noch $0 = \{z\} = z'$ sein und somit kein weiteres Element $\{m', z'\}$ eines der Elemente r oder 0 enthalten kann. Ist ferner ein Element $\{m, z\}$ von A_0 allen übrigen elementenfremd, so gilt das gleiche auch von dem entsprechenden Elemente $\{m', z'\}$, da zu jedem Elemente der Form $\{m', z_1'\}$ oder $\{m_1', z'\}$ ein weiteres Element $\{m, z_1\}$ oder $\{m_1, z\}$ gehören müßte. Alle Elemente von A_0, welche allen übrigen elementenfremd sind, bilden also die Elemente einer Untermenge A_0' von A_0, welche die Eigenschaften 1) und 2) besitzt und daher als Element von T umgekehrt A_0 als Untermenge enthält, d. h. mit A_0 identisch ist. Jedes Element von

$$\mathfrak{S}\mathsf{A}_0 = M_0 + Z_{00} \Subset M + Z_0,$$

wo wir mit M_0 und Z_{00} die gemeinsamen Bestandteile von $\mathfrak{S}\mathsf{A}_0$ mit M, bezw. Z_0 bezeichnen, kann also nur in einem einzigen Elemente von A_0 als Element figurieren, und es ist (wegen Nr. 15) $M_0 \sim Z_{00}$. Nun ist aber Z_{00} eine Untermenge von Z_0, welche das Element 0 und mit jedem ihrer Elemente z auch das zugehörige $z' = \{z\}$ enthält; Z_{00} muß also wegen Nr. 14 die ganze Zahlenreihe Z_0 als Bestandteil enthalten, d. h. es ist $Z_{00} = Z_0$ und, wie behauptet, $Z_0 \sim M_0 \Subset M$.

Chesières, den 30. Juli 1907.