Über die Separation komplexer Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Von

Aubrey J. Kempner in Urbana (U. S. A.).

I. Allgemeines.

§ 1.

Zur Trennung der komplexen Wurzeln einer algebraischen Gleichung kann man, wie wir zeigen wollen, in einfacher Weise die Argumente der Koeffizienten systematisch heranziehen. Als praktisch wichtigen Fall schließt dies ein, daß für Gleichungen mit reellen Koeffizienten bereits die Vorzeichen in gewissem Umfange Aussagen über die Verteilung der komplexen Wurzeln zu machen gestatten.

Sei die vorgelegte Gleichung mit ganzzahligen positiven Exponenten

$$(1)\qquad \begin{gathered} f(z) = a_{n_1} z^{n_1} + a_{n_2} z^{n_2} + \ldots + a_0 = 0; \qquad n_1 > n_2 > \ldots; \\ a_n = r_{n_j} e^{i\Theta_{n_j}},\ 0 \leqq \Theta_{n_j} < 2\pi,\ r_{n_i} > 0; \quad z = \varrho\, e^{i\varphi},\ 0 \leqq \varphi < 2\pi,\ \varrho > 0. \end{gathered}$$

In der Ebene der komplexen Zahlen denken wir uns vom Nullpunkte aus die Halbstrahlen oder Vektoren Θ_{n_j} markiert. Der Vektor Θ_0 soll seine Richtung beibehalten; der Vektor Θ_1 soll mit konstanter Winkelgeschwindigkeit sich im positiven Sinne drehen, während gleichzeitig der Vektor Θ_j, $j > 1$, sich mit konstanter, j-facher, Winkelgeschwindigkeit im positiven Sinne dreht. In jedem Augenblick repräsentieren dann die Vektoren die Richtungen der die Terme $a_{n_j} z^{n_j} = r_{n_j} \varrho^{n_j} e^{i(\Theta_{n_i} + n_j \varphi)}$, $j = 1, 2, \ldots$, und $a_0 = r_0 e^{i\Theta_0}$ darstellenden Vektoren. Diese Richtungen hängen allein ab von φ und den vorgegebenen Θ_{n_i}. Bis auf einige Spezialfälle sind die abzuleitenden Sätze direkte Folgerungen des Satzes, daß die Summe der von einem Punkte ausgehenden Vektoren bestimmt nicht verschwinden kann, wenn sich durch den Punkt eine Gerade legen läßt, derart, daß alle Vektoren auf einer Seite der Geraden liegen[1]). Dabei dürfen Vektoren in die Gerade selbst fallen, jedoch muß mindestens ein Vektor nicht in der Geraden liegen. Wenn wir daher φ das Intervall $(0, 2\pi)$ durchlaufen lassen, werden in allen Teilintervallen, innerhalb deren alle Vektoren auf einer Seite einer Geraden liegen (falls derartige Intervalle existieren), sicher keine Wurzeln von $f(z) = 0$ vorhanden sein, welches auch die zwischen 0, $+\infty$ liegenden Werte der r_{n_j} sein mögen. Wir werden zeigen, daß auf diese Weise für alle trinomischen Gleichungen eine (im wesentlichen vollständige) Separation aller Wurzeln hergestellt wird (vgl. § 5), und daß wir für k-nomische Gleichungen, $k > 3$, oft wertvolle Auskunft erhalten, obwohl diese Auskunft mit wachsendem k weniger präzis zu werden strebt. Von zwei Gleichungen gleicher Gliederanzahl erhält man oft wertvollere Auskunft für die Gleichung höheren Grades als für die Gleichung niedrigeren Grades. — Die Betrachtungen lassen sich unmittelbar ausdehnen auf Gleichungen mit negativen ganzzahligen Exponenten und, in sinngemäßer Weise, auf Gleichungen mit gebrochenen positiven und negativen Exponenten.

§ 2.

Wir sagen von einer Gleichung (1), daß sie vom Typus $(\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_0)$ sei. So ist beispielsweise $c_4 z^4 - c_3 z^3 + c_1 z + c_0 = 0$, $c_\nu > 0$, vom Typus $(\Theta_4 = 0, \Theta_3 = \pi, \Theta_1 = 0, \Theta_0 = 0)$. *Das Absolutglied soll immer von Null verschieden sein, außer wenn das Gegenteil ausdrücklich erwähnt wird.* Daher sind alle Wurzeln unserer Gleichungen von Null verschieden. Unsere Aussagen werden sich auf alle Gleichungen beziehen, die zu demselben Typus gehören. — Wir nennen ein Intervall von φ (mit Ausschluß der Grenzwerte), sowie auch das Innere des entsprechenden Sektors in der Ebene der komplexen Zahlen, ein S_-, falls es für jedes φ des Intervalls eine durch den Nullpunkt gehende Gerade gibt, derart, daß alle Vektoren $\Theta_{n_1} + n_1\varphi$, $\Theta_{n_2} + n_2\varphi$, $\ldots$, Θ_0 auf einer Seite der Geraden liegen. *Dann kann S_- keinen Wurzelpunkt von $f(z)$ enthalten.* Die anderen Sektoren, für die es solche Geraden nicht gibt, seien mit S_+ bezeichnet. *Alle Wurzelpunkte von (1) liegen in den S_+ (mit Einschluß der begrenzenden Strahlen).* Des bequemeren Ausdruckes halber sagen wir, daß für alle φ eines S_- die Vektoren $\Theta_{n_1} + n_1\varphi$, $\Theta_{n_2} + n_2\varphi$, $\ldots$, Θ_0 eine „Gesamtöffnung" $< \pi$ haben, während für alle φ eines S_+ die Vektoren eine Gesamtöffnung $> \pi$ haben. Wir treffen alsbald besondere Vereinbarungen für den Übergangsfall einer Gesamtöffnung $= \pi$.

[1]) Bekanntlich wird dieses Prinzip in der Algebra und Funktionentheorie vielfach angewendet bei der Untersuchung der relativen Lage der Nullstellen einer Funktion $f(z)$ und der abgeleiteten Funktion $f'(z)$.

Die φ-Werte, die dem Anfang oder Ende eines S_- oder eines S_+ entsprechen, müssen unter denen enthalten sein, für welche zwei oder mehr der Vektoren gerade einen Winkel π miteinander bilden. Diese letzteren φ-Werte seien *kritische Werte* von φ genannt. Sie sind für einen gegebenen Typus in endlicher Anzahl vorhanden und sofort angebbar: sie sind offenbar diejenigen φ-Werte, für die wenigstens ein Paar von Werten Θ_j, Θ_k $(j, k = n_1, n_2, \ldots, 0)$ die Gleichung erfüllen

$$(2) \qquad (j-k)\varphi + \Theta_j - \Theta_k = (2\lambda+1)\pi, \qquad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Es ist aber im allgemeinen nicht wahr, daß umgekehrt jedem kritischen Wert von φ der Anfang oder das Ende eines Sektors S_+ oder S_- entspricht. Insbesondere ist ein kritischer φ-Wert, für den die Gesamtöffnung $> \pi$ ist, niemals der Anfang oder das Ende eines S_+ oder eines S_-. Eine einfache Überlegung erweist folgende Sachlage:

I. Wenn bei wachsendem φ beim Passieren eines kritischen Wertes die Gesamtöffnung von $> \pi$ zu $< \pi$ übergeht, so repräsentiert dieser φ-Wert den Anfang eines S_- und das Ende eines S_+. Solche Vektoren mögen durch V_{+-} bezeichnet werden.

Beispiel: $\quad z^3 - c_1 z + c_0 = 0, \quad c_0, c_1 > 0,$

d. i. Typus $(\Theta_3 = 0,\ \Theta_1 = \pi,\ \Theta_0 = 0), \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

II. Wenn die Gesamtöffnung von $< \pi$ zu $> \pi$ übergeht, so repräsentiert der φ-Wert das Ende eines S_- und den Anfang eines S_+. Solche Vektoren mögen V_{-+} genannt werden.

Beispiel: Typus $(\Theta_3 = 0,\ \Theta_1 = 0,\ \Theta_0 = \pi), \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$

III. Es kann geschehen, daß beim Passieren eines kritischen φ-Wertes die Gesamtöffnung sowohl vorher als nachher $> \pi$ ist. Solche Vektoren nennen wir V_{++}. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) Für den kritischen φ-Wert selbst sei die Gesamtöffnung $> \pi$. Dieses kann nur eintreten für k-nomische Gleichungen, $k \geqq 4$. Der Vektor ergibt in diesem Falle keinerlei Auskunft über die Verteilung der Wurzeln.

Beispiel: Typus $(\Theta_4 = 0,\ \Theta_3 = 0,\ \Theta_2 = 0,\ \Theta_1 = 0,\ \Theta_0 = 0), \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

b) Für einen kritischen φ-Wert sei die Gesamtöffnung[2]) π, aber nicht alle Vektoren in einer Geraden. Solche Vektoren seien durch V'_{++} bezeichnet. Dann kann kein Nullpunkt von $f(z)$ auf einem V'_{++} liegen, so daß ein solcher Vektor als ein Sektor S_- angesehen werden kann, der sich auf den Vektor reduziert hat; folgerichtig muß man den Sektor S_+,

[2]) D. i., es sind mindestens zwei Vektoren vorhanden, die einen Winkel π miteinander bilden und von denen einer durch Rotation in den anderen übergeführt werden kann, ohne anderen Vektoren des Systems zu begegnen.

innerhalb dessen er liegt, als durch ihn in zwei Sektoren S_+ zerlegt ansehen. Auch dieser Fall tritt erst bei $k \geqq 4$ auf.

Beispiel: Typus $(\Theta_4 = 0,\ \Theta_2 = 0,\ \Theta_1 = 0,\ \Theta_0 = 0)$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

c) Für einen kritischen φ-Wert liegen alle Vektoren in einer Geraden. In diesem Falle geben zwar die V_{++} (sie seien V''_{++} genannt) keine direkte Auskunft über die Separation der Wurzeln, jedoch erhalten wir Auskunft über Symmetrieverhältnisse der Wurzelverteilung in der Ebene der komplexen Zahlen (vgl. § 3).

Beispiel: Typus $(\Theta_3 = 0,\ \Theta_1 = \pi,\ \Theta_0 = 0)$, $\varphi = 0$.

IV. Es bleibt als letzter Fall die Möglichkeit übrig, daß beim Passieren eines kritischen φ-Wertes die Gesamtöffnung sowohl vorher als nachher $< \pi$ ist. Ein solcher Vektor werde ein V_{--} genannt. Man sieht, daß, wenn dies eintritt, alle Vektoren für den kritischen Wert in dieselbe Gerade fallen müssen. Daher wird man das V_{--} passend als einen auf den Vektor reduzierten Sektor S_+ ansehen, welcher dann den Sektor S_-, innerhalb dessen er liegt, in zwei S_- teilt.

Beispiel: $(\Theta_3 = 0,\ \Theta_1 = \pi,\ \Theta_0 = 0)$, $\varphi = \pi$.

§ 3.

Durch die beschriebenen Operationen wird die Ebene der komplexen Zahlen abwechselnd in Sektoren S_+ und S_- eingeteilt, wobei jedoch manche der S_+ und S_- sich auf einen Vektor reduzieren können. Wir bedenken ferner, daß, da zwei S_+ nur im Nullpunkt zusammenhängen, eine kontinuierliche Änderung der Wurzeln, entsprechend einer kontinuierlichen Änderung der absoluten Beträge der Koeffizienten zwischen beliebigen positiven Grenzen, bei festgehaltenen Argumenten der Koeffizienten, die Gesamtzahl der in jedem Sektor S_+ befindlichen Wurzeln ungeändert läßt, da die Auswanderung aus einem Sektor S_+ in einen anderen bedeuten würde, daß die Wurzel durch den Wert Null hindurchgehen müßte, was nach Voraussetzung ausgeschlossen wurde. *Wenn wir daher für einen gegebenen Typus für irgendeine Gleichung die Anzahl der in jedem Sektor S_+ gelegenen Wurzelpunkte kennen so hat jede Gleichung des Typus dieselbe Verteilung der Wurzelpunkte.*

Wir zeigen ferner, daß in jedem Sektor S_+ mindestens eine Wurzel der Gleichung liegen muß. Die verwendete Schlußweise gilt unverändert für aneinanderstoßende Sektoren S_+ (d. h. Sektoren S_+, die durch einen verschwindenden S_--Sektor voneinander getrennt sind) und für verschwindende S_+. Wir nehmen zunächst an, daß die Gleichung trinomisch sei und φ ein in einem S_+ liegender Wert des Argumentes; dann haben die den drei Termen entsprechenden Strahlen die Eigenschaft, daß, wenn man auf einem von ihnen eine beliebige Länge vom Anfangspunkt aufträgt, dadurch auf den beiden anderen Strahlen Längen bestimmt werden, derart, daß die geometrische Summe der drei Vektoren verschwindet. Dieses besagt, daß, falls für trinomische Gleichungen ein Typus vorgegeben ist, und man in irgendeinem der zugehörigen S_+ einen Punkt beliebig wählt, es sicher eine trinomische Gleichung des gegebenen Typus gibt, für welche der Punkt ein Wurzelpunkt ist. Da aber, wie bemerkt, ein Auswandern eines Wurzelpunktes aus einem Sektor S_+ in einen andern bei Veränderung der Koeffizienten nicht stattfinden kann, solange der Typus unverändert bleibt, ist der Satz für trinomische Gleichungen bewiesen. (Vgl. auch § 5, b)). Für k-nomische Gleichungen, $k > 3$, wählen wir von den k-Strahlen (deren Gesamtöffnung $> \pi$ ist) drei aus, derart, daß die Gesamtöffnung dieser drei Strahlen ebenfalls $> \pi$ ist. Diese drei Strahlen entsprechen gewissen drei Termen der vorgelegten Gleichung. Wenn wir auf einem dieser Strahlen einen Punkt beliebig wählen, so können wir, falls wir auf den $k-3$ nicht ausgezeichneten Strahlen je einen Punkt in *hinreichender Nähe* des Anfangspunktes wählen, immer noch auf den zwei anderen ausgezeichneten Strahlen je einen Punkt wählen, so daß die geometrische Summe der k Punkte verschwindet. Dadurch ist bewiesen, daß es für jeden vorgegebenen Typus Gleichungen gibt, für die ein beliebiger in einem S_+ gelegener Punkt ein Wurzelpunkt ist, und wir schließen wie oben, daß jede k-nomische Gleichung von vorgegebenem Typus in jedem zugehörigen S_+-Sektor wenigstens einen Wurzelpunkt hat. Q. e. d.

Die beiden Fälle III c), V''_{++}, und IV, V_{--}, können nur vorkommen, wenn die Wurzelpunkte von $f(z)$ symmetrisch zu der Geraden φ in der komplexen z-Ebene liegen. Es wird nämlich, wenn φ_0 der Neigungswinkel des betr. V''_{++} oder V_{--} ist, die Gleichung durch die Substitution $z' = z \cdot e^{-i\varphi_0}$ in eine andere übergeführt, in der alle Koeffizienten denselben Wert des Argumentes haben. — Dasselbe findet auch statt für einen Winkel φ, für den alle Vektoren nicht nur in einer Geraden, sondern sogar in derselben Richtung liegen (Gesamtöffnung $= 0$). Umgekehrt muß einer dieser Fälle vorliegen, wenn es eine durch den Nullpunkt gehende Gerade gibt, in bezug auf welche die Wurzeln der Gleichung in der Zahlenebene symmetrisch verteilt sind.

Es verdient, bemerkt zu werden, daß man in Gleichungen mit reellen Koeffizienten zwischen zwei Arten von reellen Wurzeln unterscheiden kann. Eine Wurzel kann reell sein, weil ein Sektor S_+ in einen Vektor V_{--} für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ degeneriert (§ 2, IV), während zu beiden Seiten ein Sektor S_- liegt. In diesem Fall muß die Wurzel reell bleiben, wie auch die (reell vorausgesetzten) Koeffizienten sich stetig ändern mögen, vorausgesetzt, daß sie nicht zu Null werden. Oder, eine Wurzel kann reell sein, weil ein Sektor S_+ sich über den Winkel 0 oder π hinüberstreckt. In diesem Falle können die in dem betreffenden S_+ enthaltenen Wurzelpunkte (oder einige von ihnen) zugleich auf der Achse der reellen Zahlen liegen, und es ist nun nicht möglich, ohne die absoluten Beträge der Koeffizienten heranzuziehen — z. B. durch Verwendung der Diskriminante —, eine definitive Aussage darüber zu machen, ob die betreffenden Wurzeln reell oder komplex sind (vgl. §§ 5, a); 6, a)).

Ein Apparat nach Art eines „Planetariums“, welcher die Vektoren von willkürlich gewählten Anfangslagen und mit Winkelgeschwindigkeiten, die zueinander in den Verhältnissen $1:2:3:\ldots:n$ stehen, rotieren läßt, würde zur mechanischen Bestimmung der Sektoren S_+, S_- für vorgegebene Gleichungstypen geeignet sein. Die Herstellung eines solchen Apparates würde keine Schwierigkeiten bieten. Eine gewöhnliche Taschenuhr ist z. B. geeignet, die Sektoreneinteilung für alle Gleichungen einer der Formen $z^{12} \pm az^\lambda \pm b = 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\lambda = 1{,}11$ durchzuführen.

Wir bemerken noch, daß über die Verteilung der Nullstellen von $df(z)/dz$ das Folgende gilt: *Falls für eine Gleichung von gegebenem Typus die S_+-Sektoren hergestellt werden, so liegen auch alle Wurzelpunkte von $f'(z)$ in diesen S_+, und zwar enthält jeder Sektor S_+ dieselbe Anzahl von Wurzelpunkten von $f(z)$ wie von $f'(z)$, mit Ausnahme eines S_+, das einen Wurzelpunkt weniger von $f'(z)$ enthält als von $f(z)$.*

Zum Beweis genügt es, unter Berücksichtigung des am Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Satzes, darauf hinzuweisen, daß 1. $f'(z) = 0$ und $f'(z)\cdot z = 0$ mit Ausnahme der Wurzel $z = 0$ dieselben Wurzeln haben: 2. falls $f(z)$ vom Typus $(\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_{n_k}, \Theta_0)$ ist, dann $z\cdot f'(z)$ vom Typus $(\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_{n_k})$ ist; 3. jeder Sektor S_+ von $(\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_{n_k})$ innerhalb, oder wenigstens nicht außerhalb, eines S_+ von $(\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_{n_k}, \Theta_0)$ liegt.

II. Anwendung auf spezielle Gleichungstypen.

§ 4.

Binomische Gleichungen ($\Theta_n = 0$, $\Theta_0 =$ beliebig).

Die kritischen φ-Werte sind die n Werte $\varphi = (\Theta_0 + (2\lambda + 1)\pi)/n$, $\lambda = 0, 1, \ldots, n-1$. Den n Vektoren (vgl. § 2, IV) entsprechen n verschwindende Sektoren S_+.

§ 5.

Trinomische Gleichungen.

a) *Reelle Koeffizienten.* Wir übergehen den einfachen Fall quadratischer Gleichungen und betrachten nur reduzierte *kubische Gleichungen* $\Theta_3 = 0$, $\Theta_1 = 0$ oder π, $\Theta_0 = 0$ oder π):

Für Gleichungen mit reellen Koeffizienten, $z^3 + az + b = 0$ und mit Wurzeln $z_j = \varrho_j e^{i\varphi_j}$, $\varrho_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, erhalten wir folgende vollständige Klassifikation[3]):

$$\begin{array}{llll}
a > 0,\ b > 0: & \varphi_1 = \pi; & \pi/3 < \varphi_2 < \pi/2; & 3\pi/2 < \varphi_3 < 5\pi/3.\ ^{4)} \\
a > 0,\ b < 0: & \varphi_1 = 0; & \pi/2 < \varphi_2 < 2\pi/3; & 4\pi/3 < \varphi_3 < 3\pi/2. \\
a < 0,\ b > 0: & \varphi_1 = \pi; & 0 \leqq \varphi_2 < \pi/3; & 5\pi/3 < \varphi_3 \leqq 2\pi. \\
a < 0,\ b < 0: & \varphi_1 = 0; & 2\pi/3 < \varphi_2 \leqq \pi; & \pi \leqq \varphi_3 < 4\pi/3.
\end{array}$$

Für $a < 0$, $b > 0$ und $a < 0$, $b < 0$ haben wir einen in § 3 erwähnten Fall. Wenn z. B. für $a < 0$, $b > 0$ in $0 \leqq \varphi_2 < \pi/3$, $5\pi/3 < \varphi_3 \leqq 2\pi$ die Gleichheitszeichen gelten, haben wir drei reelle Wurzeln, zwei positive, eine negative. Falls das Gleichheitszeichen nicht gilt, haben wir zwei nicht-reelle Wurzeln mit Argumenten in den angegebenen Intervallen. Um zu entscheiden, welcher Fall vorliegt, muß die Diskriminante herangezogen werden.

b) *Komplexe Koeffizienten* (Θ_n = beliebig, Θ_m = beliebig, Θ_0 = beliebig). Für trinomische Gleichungen erhalten wir, wie die obigen Beispiele bereits vermuten lassen, im wesentlichen erschöpfende Auskunft über die Separation der Wurzeln. Wir stellen, ohne in jedem Fall auf die einfachen Beweise einzugehen, die Hauptresultate zusammen.

Die Bestimmung der kritischen φ-Werte durch Auflösung der Gleichungen (2), § 2, ergibt $2n$ Werte, die aber nicht notwendig alle verschieden sind. Wenn alle verschieden sind, erhalten wir n nicht-verschwindende Sektoren S_+, voneinander getrennt durch n nicht-verschwindende Sektoren S_-. Falls dieses stattfindet, sind die Wurzeln getrennt, denn wir haben in § 3 gezeigt, daß jede Gleichung des betreffenden Typus in jedem S_+ *mindestens einen Wurzelpunkt* hat, und, da wir n Sektoren haben, so hat die Gleichung *genau einen Wurzelpunkt* in jedem S_+.

Die Spezialfälle, in denen mehrere der kritischen φ-Werte zusammenfallen können, sind die folgenden:

Die Koeffizienten seien reell.

Für m, n teilerfremd: Von den $2n$ kritischen φ-Werten können dann *entweder* zwei Werte 0 zusammenfallen, *oder* zwei Werte π, *oder* aber zwei Werte 0 können zusammenfallen und auch zwei Werte π. Im ersten und im zweiten Fall kann der entsprechende, auf einen Vektor sich reduzierende Sektor entweder ein V_{--} oder ein V''_{++} sein; im dritten Fall erhalten wir je ein V_{--} und ein V''_{++}. Um ohne Ausnahme von genau

---

[3]) Hierbei würden $a = 0$ oder $b = 0$ Übergangsformen entsprechen, welche nicht ausdrücklich hervorgehoben sind.

[4]) D. i., eine reelle negative Wurzel, zwei nicht reelle Wurzeln, von denen je eine in jedem der beiden angegebenen 30°-Sektoren liegt.

n Sektoren S_+ reden zu können, müssen wir für trinomische Gleichungen nicht nur, wie in § 2, V_{--} als ein S_+ zählen, sondern wir müssen auch festsetzen, daß ein in einen Sektor S_+ fallendes V''_{++} den Sektor in zwei S_+ zerlegt.

Für m, n nicht teilerfremd, $(m, n) = k > 1$: Wir erhalten wieder genau n Sektoren S_+, indem wir vom Typus $(\Theta_{n/k}, \Theta_{m/k}, \Theta_0)$ ausgehen und dann alle Winkel im Verhältnis $k:1$ gegen Θ_0 hin kontrahieren, so daß durch diese Operationen der Sektor $(\Theta_0, 2\pi/k + \Theta_0)$ ausgefüllt wird, und schließlich die Ebene durch k aneinandergefügte solche Sektoren überdecken.

Die Koeffizienten seien komplex (nicht alle reell). Im allgemeinen Fall haben wir nun n nicht-verschwindende S_+ und n nicht-verschwindende S_-. *Wenn* $(m, n) = 1$, existiert höchstens eine, leicht auffindbare Symmetrieachse durch den Nullpunkt für die Wurzelpunkte, und diese spielt genau die Rolle des 0-Vektors und des π-Vektors in dem eben besprochenen Fall reeller Koeffizienten. *Wenn* $(m, n) = k > 1$, haben wir entweder (allgemeiner Fall) keinen verschwindenden Sektor (nämlich wenn die Gleichung $r_n e^{i\Theta_n} z^{n/k} + r_m e^{i\Theta_m} z^{m/k} + r_0 e^{i\Theta_0} = 0$, $r_n \cdot r_m \cdot r_0 > 0$, keine durch den Nullpunkt gehende Symmetrieachse für die Wurzelpunkte hat) oder wir erhalten eine Figur, die sich nur durch eine gewisse Rotation um den Nullpunkt von der entsprechenden Figur für reelle Koeffizienten unterscheidet. Wir machen daher wieder dieselben Annahmen wie oben behufs Zählung der S_+. Dann gilt:

Im Innern eines jeden Sektors S_+ liegt immer genau ein Wurzelpunkt jeder trinomischen Gleichung des betreffenden Typus. Dabei bedeutet das Innere eines etwa vorhandenen verschwindenden S_+ (d. i. eines V_{--}) die Punkte des Vektors selbst; und es gilt weiter die Beschränkung, daß für ein etwa vorhandenes V''_{++}, längs dessen zwei S_+ aneinanderstoßen, entweder je ein Wurzelpunkt im Innern jedes der beiden Sektoren S_+ liegt, oder aber, daß beide Wurzelpunkte auf der gemeinsamen Begrenzung liegen. Zwischen diesen beiden Möglichkeiten kann ohne Hinzunahme der absoluten Beträge der Koeffizienten nicht entschieden werden[5].

[5]) Eine andere Separation der Wurzeln trinomischer Gleichungen verdankt man P. Nekrassoff, *Über trinomische Gleichungen*, Math. Ann. 29 (1887), S. 413—430. Soweit ein Vergleich mit der gegenwärtigen Arbeit in Betracht kommt, zeigt Nekrassoff, daß die Wurzeln genau separiert sind durch die Zerlegung der Ebene in n (Grad der Gleichung) vom Nullpunkt ausgehende Sektoren je von der Öffnung $2\pi/n$, wobei der Anfang eines Sektors von Θ_n, Θ_m, Θ_0 allein abhängt. Dem Nachteil, daß in dieser Einteilung die Sektoren S_+ bereits für sich allein die ganze Ebene überdecken, steht gegenüber, daß in Nekrassoffs Einteilung bei festgehaltenen Θ_n und Θ_0 anscheinend der Koeffizient des mittleren Gliedes beliebige komplexe Werte annehmen darf, ohne daß die Wurzelpunkte aus den Sektoren heraustreten. — Durch eine

c) Um auch ein Beispiel für komplexe Koeffizienten zu geben, betrachten wir den Typus ($\Theta_5 = 0$, $\Theta_2 = 2\pi/5$, $\Theta_0 = 5\pi/6$). Die kritischen φ-Werte sind gegeben durch $5\varphi - 5\pi/6 = \lambda_1 \pi$, $\lambda_1 = 1, 3, 5, 7, 9$; resp. $5\varphi - (2\varphi + 2\pi/5) = \lambda_2 \pi$, $\lambda_2 = 1, 3, 5$; $2\varphi + 2\pi/5 - 5\pi/6 = \lambda_3 \pi$, $\lambda_3 = 1, 3$. Man findet: $\varphi = 66^0, 84^0, 129^0, 138^0, 204^0, 210^0, 282^0, 309^0, 324^0, 354^0$ und erhält die fünf Sektoren S_+: $66^0 < \varphi_1 < 84^0$, $129^0 < \varphi_2 < 138^0$, $204^0 < \varphi_3 < 210^0$, $282^0 < \varphi_4 < 309^0$, $324^0 < \varphi_5 < 354^0$. Jeder dieser Sektoren enthält genau einen Wurzelpunkt.

§ 6.

Quadrinomische Gleichungen und k-nomische Gleichungen, $k > 4$.

Wir betonten bereits, daß bei wachsendem k unser Verfahren rasch an Ergiebigkeit einbüßt. Jedoch erhält man für $k = 4$ gewöhnlich, und für $k > 4$ häufig, wertvolle Auskunft, die in den meisten Fällen durch Berücksichtigung der absoluten Beträge der Koeffizienten leicht wesentlich vervollständigt werden kann.

a) Indem wir den ohne Schwierigkeit vollständig zu behandelnden Fall der reduzierten biquadratischen Gleichung übergehen, behandeln wir nun als Beispiel einer quadrinomischen Gleichung höheren Grades den Typus ($\Theta_{10} = 0$, $\Theta_9 = 0$, $\Theta_5 = 0$, $\Theta_0 = 0$).

Der, verglichen mit der Anzahl der Terme hohe, Grad und die Verteilung der Exponenten lassen erwarten, daß man verhältnismäßig gute Auskunft über die Separation der Wurzeln dieser Gleichung erhalten wird. Die Sektoren S_+ sind $18^0 < \varphi_1 < 36^0$, $36^0 < \varphi_2 < 60^0$, $90^0 < \varphi_3 < 108^0$, $108^0 < \varphi_4 < 140^0$, $162^0 < \varphi_5 \leqq 180^0$, $180^0 \leqq \varphi_6 < 198^0$, $220^0 < \varphi_7 < 252^0$, $252^0 < \varphi_8 < 270^0$, $300^0 < \varphi_9 < 324^0$, $324^0 < \varphi_{10} < 342^0$. Die kritischen Werte $\varphi = 36^0$, 108^0, 252^0, 324^0 ergeben je ein V'_{++}, so daß kein Wurzelpunkt auf einem dieser Vektoren liegen kann, und kein Wurzelpunkt bei veränderlichen, positiven Koeffizienten aus einem Sektor S_+ über diese Vektoren hinüber in ein benachbartes S_+ wandern kann[6]). Dagegen ist es möglich, daß auf dem Vektor $\varphi = \pi$ zwei reelle negative Wurzelpunkte liegen, da $\varphi = \pi$ ein V''_{++} ergibt. Da es tatsächlich Glei-

---

leichte Übertragung können wir aus Nekrassoffs Satz III für unsere S_+ das Folgende herauslesen: Falls $z^n + az^m + b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $(m, n) = 1$, die vorgelegte Gleichung ist, so haben wir zwei zusammenstoßende S_+ dann und nur dann, wenn a^n / b^{n-m} reell ist. Je nachdem dann $m^m (m-n)^{n-m} (-a)^n < n^n (-b)^{n-m}$ oder $\geqq n^n (-b)^{n-m}$ ist, liegt je ein Wurzelpunkt im Innern jedes der beiden Sektoren S_+, oder es liegen zwei Wurzelpunkte auf der gemeinsamen Begrenzung, und keine im Innern der beiden Sektoren. Der Fall $(m, n) > 1$ wird unmittelbar auf diesen zurückgeführt. — Wir führen diesen Satz an, obgleich er von den absoluten Beträgen der Koeffizienten Gebrauch macht.

[6]) Vgl. § 3

chungen des gegebenen Typus gibt, welche einen Wurzelpunkt in dem Sektor $18^0 < \varphi_1 < 36^0$ haben (z. B. $z^{10} + \varepsilon_1 z^9 + \varepsilon_2 z^5 + 1 = 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, ε_1, ε_2 hinreichend klein), und da es in ähnlicher Weise Gleichungen unseres Typus gibt, die einen Wurzelpunkt in irgendeinem anderen der Sektoren S_+ haben, können wir sagen, da wir gerade $n = 10$ Sektoren S_+ haben: *In jedem Sektor S_+ liegt genau ein Wurzelpunkt jeder Gleichung* ($\Theta_{10} = 0$, $\Theta_9 = 0$, $\Theta_5 = 0$, $\Theta_0 = 0$), *außer daß die beiden Wurzelpunkte in den beiden Sektoren $162^0 < \varphi \leqq 180^0$, $180^0 \leqq \varphi < 198^0$ beide in den Vektor $\varphi = \pi$ hineinrücken können.* Eine Angabe, wann dieses geschieht, ist ohne Berücksichtigung der absoluten Beträge der Koeffizienten nicht möglich.

b) Falls nicht nur die Argumente der Koeffizienten gegeben sind, sondern die Koeffizienten selbst, kann man oft durch einfache Kunstgriffe viel genauere Auskunft erhalten, als die direkte Anwendung unserer Methode auf den betreffenden Gleichungstypus ergibt. Wir erläutern dieses durch ein Beispiel.

$f(z) = z^4 + 3z^3 + 2z^2 + 5z + 4 = 0$. Zunächst erhalten wir nur ($\Theta_4 = 0$, $\Theta_3 = 0$, $\Theta_2 = 0$, $\Theta_1 = 0$, $\Theta_0 = 0$) hat keine Wurzelpunkte in dem Sektor S_-, $315^0 < \varphi < 405^0 (= 45^0)$. — Wir verwenden nun auf folgende Weise die Tatsache, daß die Koeffizienten bekannt sind. Wir bilden $f_1(z) = (z - \alpha) f(z) = z^5 + (3 - \alpha) z^4 + (2 - 3\alpha) z^3 + (5 - 2\alpha) z^2 + (4 - 5\alpha) z - 4\alpha = 0$, wählen für α der Reihe nach Werte, die den Koeffizienten von z^4, von z^3, von z^2, von z zum Verschwinden bringen, und wenden jedesmal auf die so erhaltene Gleichung unser Verfahren an.

$\alpha = 3$: $f_1(z) = z^5 - 7z^3 - z^2 - 11z - 12 = 0$; wir finden, daß diese Gleichung keine Wurzelpunkte hat in den Sektoren S_-, $0^0 < \varphi < 60^0$, $300^0 < \varphi < 360^0$, so daß unser oben erhaltener Sektor, in dem kein Wurzelpunkt von $f(z) = 0$ liegen kann, nach jeder Seite um 15^0 vergrößert worden ist.

$\alpha = 2/3$: $f_1(z) = z^5 + 7/3\, z^4 + 11/3\, z^2 + 2/3\, z - 8/3 = 0$; diese Gleichung hat keine Wurzelpunkte in den Sektoren $0^0 < \varphi < 45^0$, $90^0 < \varphi < 135^0$, $225^0 < \varphi < 270^0$, $315^0 < \varphi < 360^0$.

$\alpha = 5/2$: $f_1(z) = z^5 + 1/2\, z^4 - 11/2\, z^3 - 17/2\, z - 10 = 0$; es sind keine Wurzelpunkte in den Sektoren $0^0 < \varphi < 60^0$, $120^0 < \varphi < 144^0$, $216^0 < \varphi < 240^0$, $300^0 < \varphi < 360^0$.

$\alpha = 4/5$: $f_1(z) = z^5 + 11/5\, z^4 - 2/5\, z^3 + 17/5\, z^2 - 16/5 = 0$ hat keine Wurzelpunkte in den Sektoren $90^0 < \varphi < 144^0$, $216^0 < \varphi < 270^0$.

Vereinigt erhalten wir: die gegebene Gleichung hat alle Wurzelpunkte in den Sektoren S_+: $60^0 < \varphi < 90^0$, $144^0 < \varphi \leqq 180^0$, $180^0 \leqq \varphi < 216^0$, $270^0 < \varphi < 300^0$. In jedem dieser Sektoren liegt je ein Wurzelpunkt, wobei jedoch zweifelhaft bleibt, ob zwei negative reelle Wurzeln auftreten, oder anstatt ihrer zwei nicht-reelle Wurzeln mit negativem reellem Teil. Tatsächlich hat die Gleichung zwei negative Wurzeln, eine im Intervall $(-3, -2)$, eine im Intervall $(-1, 0)$.

In ähnlicher Weise kann man die gegebene Gleichung mit einem Faktor $z^2 + \alpha z + \beta$ multiplizieren, und über die zwei Größen α, β derart verfügen, daß in $(z^2 + \alpha z + \beta) \cdot f(z)$ *zwei* Koeffizienten verschwinden, usw. Auf die oben behandelte Gleichung angewendet, würde dies uns gestatten, die Intervalle $(144^0, 180^0)$ resp. $(180^0, 216^0)$ auf $(150^0, 180^0)$ resp. $(180^0, 210^0)$ zu verkleinern.

Auch Transformationen $z = z' - \gamma$, in denen γ so gewählt wird, daß in $\varphi(z') = f(z' - \gamma) = 0$ einer der Koeffizienten von z' verschwindet, können mit gutem Erfolg verwendet werden, jedoch werden die erhaltenen Gebiete nun von komplizierterer Art sein, da die Sektoren S_+ für die verschiedenen Werte von γ von verschiedenen Punkten ausgehen.

(Eingegangen am 12. 10. 1921.)