Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters.

Von

Ludwig Schlesinger in Klausenburg.

Einleitung.

Wenn der Punkt $x = \infty$ eine isolierte Unbestimmtheitsstelle der Lösungen einer linearen Differentialgleichung (oder eines Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung) mit der unabhängigen Variabeln x ist, so kommt — wie Herr Poincaré gezeigt hat*) — den nach fallenden Potenzen von x fortschreitenden Normalreihen des Herrn Thomé, die den Differentialgleichungen formell genügen, aber im allgemeinen divergent sind, die Bedeutung zu, daß sie für große Werte von x gewisse Integrale asymptotisch darstellen. Hängen die Koeffizienten der Differentialgleichung oder des Differentialsystems von einem Parameter μ so ab, daß der Punkt $\mu = \infty$ eine isolierte Unbestimmtheitsstelle der Integrale ist, so kann man Reihenentwicklungen aufstellen, die in bezug auf μ eine ähnliche Struktur aufweisen, wie die Thoméschen Normalreihen in bezug auf x, und denen die Eigenschaft zukommt, daß sie gewisse Lösungssysteme für große Werte von μ asymptotisch darstellen. — Herr Horn, der ja auch zur Theorie der durch die Thoméschen Normalreihen vermittelten asymptotischen Darstellungen so wertvolle Beiträge geliefert hat, betrachtet in zwei in diesen Annalen**) veröffentlichten Arbeiten für gewisse lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung die nach einem Parameter fortschreitenden formalen Entwicklungen, und weist ihre Eigenschaft, für reale Werte der unabhängigen Variabeln und für große Werte des Parameters die asymptotische Darstellung gewisser Lösungssysteme zu liefern, mit Hilfe der Methode der sukzessiven Annäherungen nach. — Ich nehme in dieser Arbeit die

---

*) American Journal Bd. VII (1885), S. 203 ff. Acta Mathem. Bd. VIII (1885), S. 275 ff.

**) Bd. 52, S. 271 ff. und S. 340 ff.

Untersuchung für ein beliebiges lineares Differentialsystem und für beliebige komplexe Werte der unabhängigen Variabeln in Angriff. Als mir bemerkenswert erscheinende Ergebnisse hebe ich die folgenden hervor. Der Nachweis der asymptotischen Darstellung läßt sich durch vorübergehende Verschmelzung des Parameters mit der unabhängigen Variabeln auf das fundamentale Lemma des Herrn Poincaré*) gründen, in ähnlicher Weise, wie es Herr Horn**) für den Fall der Thoméschen Normalreihen durchgeführt hat. — Wenn die Koeffizienten des Differentialsystems rationale Funktionen der unabhängigen Variabeln sind, so spielen gewisse algebraische Funktionen und die zu diesen gehörigen Abelschen Integrale eine bedeutsame Rolle, die letzteren reduzieren sich in einem besonders wichtigen Spezialfalle auf Integrale erster Gattung. — Die gefundenen asymptotischen Darstellungen gewähren vollständige Einsicht in die Natur der Grenzfälle, die auftreten, wenn man sich***) der Kontinuitätsmethode bedient, um die Existenz der durch das Riemannsche Problem postulierten Funktionssysteme zu erweisen, und ich möchte bemerken, daß die hier mitzuteilenden Untersuchungen aus dem Streben nach dieser Einsicht erwachsen sind. Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in den Comptes rendus der Pariser Akademie†) erschienen.

I.

Formale Aufstellung der nach fallenden Potenzen des Parameters fortschreitenden Reihen. Ihr Charakter als asymptotische Darstellungen gewisser Integralsysteme.

Die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ des homogenen linearen Differentialsystems

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n),$$

mögen von einem Parameter μ dergestalt abhängen, daß sie in der Form von Reihen

$$\text{(1)} \qquad a_{i\varkappa} = \mu^\tau \left(a_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu} a_{i\varkappa}^{(1)} + \cdots \text{ in inf.} \right) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

dargestellt werden können, wo τ eine positive ganze Zahl, die $a_{i\varkappa}^{(0)}, a_{i\varkappa}^{(1)}, \cdots$ Funktionen von x bedeuten, und die Reihen (1) in einer von x unabhängigen Umgebung von $\mu = \infty$

$$\text{(2)} \qquad |\mu| > R,$$

konvergieren. Die $a_{i\varkappa}$ werden, um die Vorstellung zu fixieren, als rationale

*) American Journal Bd. VII, S. 204—209.

**) Acta Mathem. Bd. XXIV, S. 289 ff.; Sammlung Schubert L (1905), S. 190 ff.

***) Vergl. die vorhergehende Note.

†) Tome CXLII, p. 1031—1033, 7. Mai 1906.

Funktionen von x vorausgesetzt. Eine Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ des Systems (A), die sich für den regulären Wert $x = x_0$ auf die (von x unabhängige) Matrix $(\gamma_{i\varkappa})$ reduziert, wo in der durch (2) bestimmten Umgebung von $\mu = \infty$:

$$\gamma_{i\varkappa} = \mu^{\lambda}\left(\gamma_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{\gamma_{i\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \cdots \text{ in inf.}\right), \tag{3}$$

λ eine positive ganze Zahl, läßt sich bekanntlich*) in der Form

$$y_{i\varkappa} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} y_{i\varkappa}^{(\nu)} \mu^{\nu} \tag{4}$$

darstellen, wo die $y_{i\varkappa}^{(\nu)}$ Funktionen von x bedeuten, und die Reihen für alle regulären Werte von x und für alle endlichen Werte von μ, die der Ungleichung (2) genügen, unbedingt und gleichmäßig konvergieren. Es handelt sich um die Untersuchung der durch die Reihen (4) definierten Funktionen von μ in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle $\mu = \infty$.

Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall $\tau = 1$, $\lambda = 0$, bemerken aber, daß die darzulegende Methode mutatis mutandis auch allgemein anwendbar bleibt.

Wir setzen in das Differentialsystem (A) für $y_\varkappa$ die Ausdrücke

$$y_\varkappa = e^{\mu\omega}\left(y_\varkappa^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_\varkappa^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

ein und suchen die ω, $y_\varkappa^{(0)}$, $y_\varkappa^{(1)}$, $\cdots$ als Funktionen von x so zu bestimmen, daß die Ausdrücke (5) formell das System (A) befriedigen. Nach Division durch $e^{\mu\omega}$ ergibt sich:

$$\frac{dy_\varkappa^{(0)}}{dx} + \frac{1}{\mu}\frac{dy_\varkappa^{(1)}}{dx} + \cdots + \mu\frac{d\omega}{dx}\left(y_\varkappa^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_\varkappa^{(1)} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \mu\left(y_\lambda^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_\lambda^{(1)} + \cdots\right)\left(a_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu} a_{\lambda\varkappa}^{(1)} + \cdots\right)$$

und durch Vergleichung der Koeffizienten der Potenzen von μ auf beiden Seiten:

$$\frac{d\omega}{dx} y_\varkappa^{(0)} = \sum_{\lambda} y_\lambda^{(0)} a_{\lambda\varkappa}^{(0)}, \tag{6}$$

$$\frac{dy_\varkappa^{(0)}}{dx} + \frac{d\omega}{dx} y_\varkappa^{(1)} = \sum_{\lambda}\left(y_\lambda^{(0)} a_{\lambda\varkappa}^{(1)} + y_\lambda^{(1)} a_{\lambda\varkappa}^{(0)}\right), \tag{7}$$

. . . .

$$\frac{dy_\varkappa^{(\nu)}}{dx} + \frac{d\omega}{dx} y_\varkappa^{(\nu+1)} = \sum_{\lambda}\left(y_\lambda^{(0)} a_{\lambda\varkappa}^{(\nu+1)} + y_\lambda^{(1)} a_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} + \cdots + y_\lambda^{(\nu+1)} a_{\lambda\varkappa}^{(0)}\right) \tag{8}$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots).$$

*) Vergl. Horn, Mathem. Annalen Bd. 52, 1899, S. 343.

Die Gleichungen (6) oder

$$\sum_{\lambda}\left(a_{\lambda\varkappa}^{(0)}-\delta_{\lambda\varkappa}\frac{d\omega}{dx}\right)y_{\lambda}^{(0)}=0 \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,n) \tag{6a}$$

erfordern, daß

$$\left|a_{i\varkappa}^{(0)}-\delta_{i\varkappa}\frac{d\omega}{dx}\right|=0 \qquad (i,\varkappa=1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

sei, was eine Differentialgleichung erster Ordnung und n^{ten} Grades für ω ist; bezeichnet man mit $\varpi_1,\cdots,\varpi_n$ die Wurzeln der *charakteristischen Gleichung*

$$\left|a_{i\varkappa}^{(0)}-\delta_{i\varkappa}\varpi\right|=0, \tag{10}$$

die, sofern man die $a_{i\varkappa}^{(0)}$ als rationale Funktionen von x voraussetzt, ϖ als algebraische Funktion von x determiniert, so erhält man

$$\omega_i=\int\varpi_i\,dx \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

und dann vermöge (6a):

$$\sum_{\lambda}\left(a_{\lambda\varkappa}^{(0)}-\delta_{\lambda\varkappa}\varpi_i\right)y_{i\lambda}^{(0)}=0, \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,n) \tag{12}$$

woraus sich, allgemein zu reden, die Verhältnisse

$$y_{i1}^{(0)}:y_{i2}^{(0)}:\cdots:y_{in}^{(0)} \tag{13}$$

als algebraische Funktionen von x bestimmen lassen. Wenn die Diskriminante der Gleichung (10), in bezug auf ϖ, in x nicht identisch verschwindet, so sind die $\varpi_1,\cdots,\varpi_n$ voneinander verschieden; *wir halten vorläufig an dieser Voraussetzung fest.* — Um die Ausnützung der Rekursionsformeln (8) zur Bestimmung des noch unbekannten Proportionalitätsfaktors der $y_{i1}^{(0)},\cdots,y_{in}^{(0)}$ und der folgenden Koeffizienten in den aus (5) für $\omega=\omega_i$ hervorgehenden Reihenentwicklungen übersichtlich zu gestalten, verfahren wir wie folgt.

Es bedeute $u_{i\lambda}^{(0)}$ irgend ein Lösungssystem der Gleichungen (12). Dann ist

$$\left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right)\left(a_{i\varkappa}^{(0)}\right)\left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right)^{-1}=\left(\varpi_i\delta_{i\varkappa}\right). \tag{14}$$

Setzen wir nun

$$y_{\varkappa}=\sum_{\lambda=1}^{n}z_{\lambda}u_{\lambda\varkappa}^{(0)}, \tag{15}$$

so genügen die $z_1,\cdots,z_n$ dem Differentialsysteme

$$\frac{dz_{\varkappa}}{dx}=\sum_{\lambda=1}^{n}b_{\lambda\varkappa}z_{\lambda}, \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,n) \tag{B}$$

wo*) zwischen den $(b_{i\varkappa})$ und den $(a_{i\varkappa})$ die Beziehung:

$$(a_{i\varkappa}) = \left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right)^{-1} (b_{i\varkappa}) \left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right) + \left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right)^{-1} \left(\frac{du_{i\varkappa}^{(0)}}{dx}\right) \tag{16}$$

besteht. Hiernach sind mit Rücksicht auf die Gleichung (14) die $b_{i\varkappa}$ in der Form

$$b_{i\varkappa} = \mu \left(\delta_{i\varkappa}\varpi_i + \frac{b_{i\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \frac{b_{i\varkappa}^{(2)}}{\mu^2} + \cdots\right) \tag{17}$$

als für $|\mu| > R$ konvergente Reihen darstellbar, worin

$$\begin{cases} \left(b_{i\varkappa}^{(1)}\right) = \left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right)\left(a_{i\varkappa}^{(1)}\right)\left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right)^{-1} - \left(\dfrac{du_{i\varkappa}^{(0)}}{dx}\right)\left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right)^{-1}, \\ \left(b_{i\varkappa}^{(\nu)}\right) = \left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right)\left(a_{i\varkappa}^{(\nu)}\right)\left(u_{i\lambda}^{(0)}\right)^{-1}. \qquad (\nu = 2, 3, \cdots) \end{cases} \tag{18}$$

Setzen wir nun gleich

$$z_{i\varkappa} = e^{\mu\,\omega_i}\left(z_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu} z_{i\varkappa}^{(1)} + \cdots\right), \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{19}$$

so lauten die der Gleichung (8) analog gebildeten Rekursionsformeln für die $z_{i\varkappa}^{(\nu)}$:

$$\frac{dz_{i\varkappa}^{(\nu)}}{dx} + \varpi_i z_{i\varkappa}^{(\nu+1)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(z_{i\lambda}^{(0)} b_{\lambda\varkappa}^{(\nu+1)} + \cdots + z_{i\lambda}^{(\nu)} b_{\lambda\varkappa}^{(1)} + z_{i\lambda}^{(\nu+1)}\delta_{\lambda\varkappa}\varpi_\lambda\right), \tag{20}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

während sich aus der der Gleichung (6) entsprechenden Gleichung:

$$\begin{gathered} \varpi_i z_{i\varkappa}^{(0)} = z_{i\varkappa}^{(0)} \varpi_\varkappa, \\ z_{i\varkappa}^{(0)} = 0, \qquad i \neq \varkappa \end{gathered} \tag{21}$$

ergibt. Die Gleichung (20) liefert nun für $\nu = 0$ und $i = \varkappa$

$$\frac{dz_{ii}^{(0)}}{dx} = z_{ii}^{(0)} b_{ii}^{(1)}, \quad z_{ii}^{(0)} = \text{const.}\, e^{\int b_{ii}^{(1)} dx}, \tag{22}$$

und für $i \neq \varkappa$

$$\varpi_i z_{i\varkappa}^{(1)} = z_{ii}^{(0)} b_{i\varkappa}^{(1)} + \varpi_\varkappa z_{i\varkappa}^{(1)}, \tag{22a}$$

woraus sich die $z_{i\varkappa}^{(1)}$ $(i \neq \varkappa)$ bestimmen. Die $z_{ii}^{(1)}$ ergeben sich dann aus (20) für $\nu = 1$, $i = \varkappa$ mittels Quadraturen**) usw. Gehen wir von den

---

*) Vergl. z. B. die Formel (III.) meiner Arbeit, Crelles Journal, Bd. 128, S. 267.

**) Man findet:

$$\frac{dz_{ii}^{(1)}}{dx} = c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx}\left[b_{ii}^{(2)} + \sum_{\lambda \neq i} \frac{b_{i\lambda}^{(1)} b_{\lambda i}^{(1)}}{\varpi_i - \varpi_\lambda}\right] + z_{ii}^{(1)} b_{ii}^{(1)}, \quad (c_i = \text{const.}).$$

Ausdrücken (19) zu den das Differentialsystem (A) befriedigenden Ausdrücken

$$(23)\qquad y_{i\varkappa} = e^{\mu\omega_i}\left(y_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu}\, y_{i\varkappa}^{(1)} + \cdots\right)$$

zurück, so ist

$$(24)\qquad (y_{i\varkappa}) = (z_{i\varkappa})(u_{i\varkappa}^{(0)}),$$

also nach (21), (22):

$$(25)\qquad y_{i\varkappa}^{(0)} = c_i\, e^{\int b_{ii}^{(1)}\,dx}\, u_{i\varkappa}^{(0)}$$

usw. — Wir haben somit unter der Voraussetzung, daß die Diskriminante der charakteristischen Gleichung (10) nicht identisch verschwindet, n Systeme von Reihen der Form (5) gefunden, die dem Differentialsystem (A) formell genügen. Wenn die n Wurzeln $\varpi_1, \cdots, \varpi_n$ nicht voneinander verschieden sind, so treten möglicherweise an die Stelle einiger der Reihen (23) solche von der Form

$$e^{\mu\,\omega_i^{(0)} + \mu^{\frac{m-1}{m}}\,\omega_i^{(1)} + \cdots + \mu^{\frac{1}{m}}\,\omega_i^{(m)}}\left(y_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu^{\frac{1}{m}}}\, y_{i\varkappa}^{(1)} + \cdots\right),$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet, die nicht größer ist, als der Grad der Vielfachheit der betreffenden Wurzel ϖ_i. Die Behandlung dieses Falles, der bekannten Verhältnissen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen entspricht (den sogenannten *anormalen* Reihen des Herrn Fabry*)), lassen wir der Einfachheit wegen beiseite.

Natürlich sind die Reihen (23) im allgemeinen für keinen Wert von μ konvergent; ohne auf die an sich und für die Anwendungen nicht uninteressante Frage nach den Bedingungen, unter denen jene Reihen konvergieren können, einzugehen, wenden wir uns gleich zur Erörterung der Bedeutung der in Rede stehenden Reihen als *asymptotischer Darstellungen* gewisser Lösungssysteme des Differentialsystems (A) für große Werte des Parameters μ.

Wir schreiben das Differentialsystem (B) in der Form

$$(\mathrm{B\,a})\qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \mu\varpi_\varkappa z_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda Q_{\lambda\varkappa},$$

wo also die $Q_{\lambda\varkappa}$ Funktionen von x und μ bedeuten, für die

$$(26)\qquad \lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu}\, Q_{\lambda\varkappa} = 0$$

ist. Es sei $x = a$ ein *regulärer* Punkt, d. h. ein Punkt, der weder zu den

*) Thèses de la Faculté des Sciences, Paris, 1885, vergl. Poincaré, Acta Mathematica VIII (1886), S. 304.

Polen der rationalen Funktionen $a_{i\varkappa}$ noch zu den Verzweigungspunkten der durch die Gleichung (10) definierten algebraischen Funktion ϖ von x gehört. Wir denken uns von a aus einen *Strahl* gelegt und auf diesem einen Punkt b fixiert von der Beschaffenheit, daß die zwischen a und b gelegenen x Punkte dieses Strahles (b eingeschlossen) ebenfalls reguläre Punkte sind. Der Parameter μ möge mit einem bestimmten Argumente, also auch in einem Strahle, ins Unendliche rücken. Wir setzen

$$(27) \qquad \mu(x-a) = \xi e^{\theta i}, \quad (i = \sqrt{-1})$$

so daß ξ real positiv, θ konstant ist. Die Bezeichnung sei nun so gewählt, daß für alle Werte von x, die auf unserem x-Strahle zwischen a und b liegen,

$$(28) \qquad \Re(\varpi_1 e^{\theta i}) > \Re(\varpi_2 e^{\theta i}) > \cdots > \Re(\varpi_n e^{\theta i}),$$

wo $\Re$ den realen Teil der in Klammern folgenden Größen andeuten soll. Der Punkt b ist nötigenfalls so zu regulieren, daß die Ungleichungen (28) statthaben. Verbleibt x zwischen a und b, und rückt μ auf seinem Strahle ins Unendliche, so wird ξ als reale positive Variable unendlich groß; indem wir nun dieses ξ in dem Differentialsysteme (Ba) an Stelle von x als unabhängige Variable einführen, erhalten wir:

$$(29) \qquad \frac{dz_\varkappa}{d\xi} = e^{\theta i}\varpi_\varkappa z_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \frac{1}{\mu} Q_{\lambda\varkappa} \cdot e^{\theta i}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

woraus für $\varkappa = 2, 3, \cdots, n$:

$$(30) \qquad \frac{d \log \frac{z_\varkappa}{z_1}}{d\xi} = e^{\theta i}(\varpi_\varkappa - \varpi_1) + \frac{1}{\mu} e^{\theta i}\left(Q_{\varkappa\varkappa} - Q_{11} + \sum_{\lambda \neq \varkappa} Q_{\lambda\varkappa}\frac{z_\lambda}{z_\varkappa} - \sum_{\lambda>1} Q_{\lambda 1}\frac{z_\lambda}{z_1}\right)$$

folgt. Da nun hierin

$$(31) \qquad \Re(e^{\theta i}(\varpi_\varkappa - \varpi_1)) < 0, \qquad \lim_{\xi=+\infty} \frac{1}{\mu} e^{\theta i} Q_{\lambda\nu} = 0$$

ist, läßt sich einerseits eine von x unabhängige negative reale Größe ϱ so angeben, daß in dem betrachteten Intervalle

$$\Re(e^{\theta i}(\varpi_\varkappa - \varpi_1)) \leqq \varrho < 0;$$

andererseits ist für hinreichend große ξ

$$\left|\frac{1}{\mu} e^{\theta i} Q_{\lambda\nu}\right| < \delta,$$

wo δ mit wachsendem ξ gegen Null konvergiert. Wenn nun

$$\left|\frac{z_\lambda}{z_\varkappa}\right|_{\lambda \neq \varkappa} < \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \left|\frac{z_\lambda}{z_1}\right|_{\lambda > 1} < \frac{1}{\varepsilon},$$

so haben wir*) nach (30)

$$\frac{d\log\left|\frac{z_\varkappa}{z_1}\right|}{d\xi} < \varrho + 2\delta + 2(n-1)\,\delta\,\frac{1}{\varepsilon}\cdot$$

Bestimmt man nun für ein gewisses ξ die positive Größe ε aus der Gleichung

$$\varrho + 2\delta + 2(n-1)\,\delta\,\frac{1}{\varepsilon} = -g,$$

wo g eine hinreichend kleine positive Größe bedeutet, so wird ε zugleich mit δ unendlich klein, und man schließt wie Herr Poincaré (a. a. O.), daß ein Integralsystem $z_1, \cdots, z_n$, für welches in einem ξ-Punkte

$$\varepsilon < \left|\frac{z_\varkappa}{z_1}\right| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\varkappa = 2, \cdots, n)$$

ist, die Eigenschaft besitzt, daß

$$\lim_{\xi=+\infty} \frac{z_\varkappa}{z_1} = 0.$$

Solche Integralsysteme sind stets vorhanden. — Dieses Lemma wird nun in ähnlicher Weise weiter benützt, wie das Poincarésche bei Herrn Horn (a. a. O.)

Aus den dem Differentialsysteme (B) formell genügenden Reihen (19) ergeben sich insbesondere für $i = 1$ die Ausdrücke

$$(32)\qquad \frac{z_{1\varkappa}}{z_{11}} = \frac{\frac{1}{\mu}\,z_{1\varkappa}^{(1)} + \frac{1}{\mu^2}\,z_{1\varkappa}^{(2)} + \cdots}{c_1 e^{\int b_{11}^{(1)}\,dx} + \frac{1}{\mu}\,z_{11}^{(1)} + \cdots} = \frac{1}{\mu}\,\zeta_\varkappa^{(1)} + \frac{1}{\mu^2}\,\zeta_\varkappa^{(2)} + \cdots,$$

die dem Differentialsysteme

$$(\mathrm{C})\quad \frac{d\zeta_\varkappa}{dx} + \zeta_\varkappa \sum_{\lambda>1} Q_{\lambda 1}\,\zeta_\lambda = \zeta_\varkappa\,\mu\,(\varpi_\varkappa - \varpi_1) + \sum_{\lambda>1} (Q_{\lambda\varkappa} - \delta_{\lambda\varkappa}\,Q_{11})\,\zeta_\lambda + Q_{1\varkappa},$$
$$(\varkappa = 1, \cdots, n)$$

das sich aus (Ba) für die Quotienten

$$\zeta_2 = \frac{z_2}{z_1},\ \cdots,\ \zeta_n = \frac{z_n}{z_1}$$

ableiten läßt, formell Genüge leisten. Für das Gleichungssystem (C) haben wir den folgenden Satz bewiesen: Wenn x auf das Intervall

*) Vergl. Poincaré, American Journal VII (1885), p. 204 ff., und Horn, Acta Mathem. XXIV (1900), p. 290, oder „Gewöhnliche Differentialgl." (Samml. Schubert L) 1905, S. 190.

$(a \cdots b)$ beschränkt wird und μ so ins Unendliche rückt, daß sein Argument konstant bleibt, wenn ferner die Gleichungen (26) und die Ungleichungen (28) bestehen für

$$\theta = \operatorname{Arg} \mu + \operatorname{Arg}(x - a),$$

so besitzt das Differentialsystem (C) Lösungssysteme $\zeta_2, \cdots, \zeta_n$, die gegen Null konvergieren, wenn μ in der angegebenen Weise dem Unendlichen zustrebt.

Setzt man in dem Gleichungssystem (C) für $\zeta_2, \cdots, \zeta_n$ die Ausdrücke

$$\zeta_\varkappa = \frac{1}{\mu} \zeta_\varkappa^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} \zeta_\varkappa^{(2)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p} \zeta_\varkappa^{(p)} + \frac{Z_\varkappa}{\mu^p} \tag{33}$$

ein, so ergibt sich für $Z_2, \cdots, Z_n$ ein Differentialsystem von ähnlicher Form wie (C), nur sind an die Stelle der $Q_{\lambda\varkappa}$ andere Funktionen getreten, die aber auch die Eigenschaft haben, mit $\frac{1}{\mu}$ multipliziert, für ins Unendliche wachsendes μ zu verschwinden. Nach dem für (C) bewiesenen Satze besitzt also das für die $Z_\varkappa$ gültige Differentialsystem ein Lösungssystem, das gegen Null konvergiert, wenn μ in der angegebenen Weise dem Unendlichen zustrebt, und diesem entspricht demnach, für jedes positive ganzzahlige p, ein bestimmtes Lösungssystem von der Form (33) des Differentialsystems (C). Daraus folgt nun weiter*) die Existenz eines Lösungssystems

$$z_{1\varkappa} = e^{\mu\omega_1}\left(z_{1\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p} z_{1\varkappa}^{(p)} + \frac{Z_{1\varkappa}}{\mu^p}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{34}$$

für das System (B) und eines Lösungssystems

$$y_{1\varkappa} = e^{\mu\omega_1}\left(y_{1\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p} y_{1\varkappa}^{(p)} + \frac{Y_{1\varkappa}}{\mu^p}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{35}$$

für das System (A), wo, wenn μ in der angegebenen Weise ins Unendliche rückt und x zwischen a und b liegt,

$$\lim_{\mu=\infty} Z_{1\varkappa} = 0, \qquad \lim_{\mu=\infty} Y_{1\varkappa} = 0. \tag{36}$$

Man benutzt nun das Lösungssystem (35) zur Reduktion des Differentialsystems mit n Unbekannten (A) auf ein ebensolches Differentialsystem mit

*) Indem man beachtet, daß nach (B)

$$\frac{d \log z_\varkappa}{dx} = \mu \varpi_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{z_\lambda}{z_\varkappa} Q_{\lambda\varkappa} = \mu\varpi_\varkappa + Q_{\varkappa\varkappa} + \sum_{\lambda \neq \varkappa} \frac{\zeta_\lambda}{\zeta_\varkappa} Q_{\lambda\varkappa}$$

$$(\varkappa = 1, 2, \cdots, n;\ \zeta_1 = 1)$$

ist, und dann die Gleichungen (22), (22a), (32) zu Rate zieht.

$n-1$ Unbekannten*) und schließt durch vollständige Induktion — genau so wie es Herr Horn**) tut — auf die Existenz von weiteren $n-1$ Lösungssystemen des Systems (A) von der Form

$$(35a)\qquad y_{i\varkappa} = e^{\mu\omega_i}\left(y_{i\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\, y_{i\varkappa}^{(p)} + \frac{Y_{i\varkappa}}{\mu^p}\right), \qquad (i = 2, \cdots n),$$

für die, im selben Sinne wie bei den Gleichungen (36)

$$\lim_{\mu=\infty} Y_{i\varkappa} = 0.$$

Über die in den ω_i, $y_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ enthaltenen willkürlichen Integrationskonstanten denken wir uns auf irgend eine Weise verfügt; die ω_i mögen etwa als

$$(37)\qquad \omega_i = \int_{x_0}^{x} \varpi_i\, dx$$

erklärt sein, wo x_0 einen zwischen a und b gelegenen Wert von x bedeutet. Führen wir in dem Integrale (37), das natürlich den x-Strahl entlang zu nehmen ist, die durch (27) definierte Größe als neue Variabele ein, so ist

$$\mu\omega_i = \int_{\xi_0}^{\xi} \varpi_i\, e^{\theta\sqrt{-1}}\, d\xi,$$

wir haben also, wenn $\xi > \xi_0$, d. h.

$$(38)\qquad |x-a| > |x_0 - a|,$$

gemäß den Ungleichungen (28) die Ungleichungen

$$(39)\qquad \Re(\mu\omega_1) > \Re(\mu\omega_2) > \cdots > \Re(\mu\omega_n).$$

In bezug auf die $y_{i\varkappa}^{(0)}$ können wir z. B. festsetzen, daß (vergl. die Gl. (25))

$$y_{i\varkappa}^{(0)} = e^{\int_{x_0}^{x} b_{ii}^{(1)} dx}\, u_{i\varkappa}^{(0)};$$

dann ist jedenfalls die Determinante

$$(40)\qquad \left|y_{i\varkappa}^{(0)}\right|_{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)} \neq 0.$$

Wir behaupten dann, daß die durch die Formeln (35a) dargestellten n Integralsysteme eine *Integralmatrix* ausmachen, d. h. daß ihre Determinante nicht identisch verschwindet. In der Tat ist:

---

*) Vergl. z. B. Koenigsberger, Lehrbuch d. Theorie d. Differentialgleichungen, (1889) S. 122.

**) Acta Mathematica, XXIV, S. 299.

$$(41)\qquad \underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{|y_{i\varkappa}|} = \Gamma\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x}\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}\,dx},$$

wo Γ eine von x unabhängige Größe bedeutet, von der gezeigt werden muß, daß sie nicht in μ identisch verschwindet. Beachtet man, daß nach (10)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\overline{\omega}_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}^{(0)},$$

so folgt aus (1), (35a), (37), (41) die Gleichung

$$(42)\qquad \left|y_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu}y_{i\varkappa}^{(1)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}y_{i\varkappa}^{(p)} + \frac{1}{\mu^p}Y_{i\varkappa}\right|$$
$$= \Gamma\cdot e^{\sum\limits_{\varkappa}\int\limits_{x_0}^{x} a_{\varkappa\varkappa}^{(1)}dx + \frac{1}{\mu}\sum\limits_{\varkappa}\int\limits_{x_0}^{x} a_{\varkappa\varkappa}^{(2)}dx + \cdots}$$

Hieraus ist Γ jedenfalls in der Form

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{1}{\mu}\Gamma_1 + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\Gamma_p + \frac{1}{\mu^p}\mathrm{E}$$

darstellbar, wo $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_p$ von μ unabhängig, und

$$\lim_{\mu=\infty}\mathrm{E} = 0.$$

Läßt man aber in (42) den Parameter μ in der wiederholt bezeichneten Weise ins Unendliche rücken, so folgt

$$\left|y_{i\varkappa}^{(0)}\right| = \Gamma_0 e^{\sum\limits_{\varkappa}\int\limits_{x_0}^{x} a_{\varkappa\varkappa}^{(1)}dx},$$

es ist also nach (40) Γ_0 von Null verschieden und folglich auch Γ nicht identisch gleich Null.

Es bedeute nun $\overline{y}_{i\varkappa}$ für einen festen Index i und $\varkappa = 1, 2, \cdots, n$ ein Integralsystem von der Form

$$(43)\qquad \overline{y}_{i\varkappa} = e^{\mu\omega_i}\left(\overline{y}_{i\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\overline{y}_{i\varkappa}^{(p)} + \frac{1}{\mu^p}\overline{Y}_{i\varkappa}\right),$$

wo die in den $\overline{y}_{i\varkappa}^{(0)}, \cdots, \overline{y}_{i\varkappa}^{(p)}$ enthaltenen Integrationskonstanten als *willkürliche Konstanten* zu denken sind und

$$\lim_{\mu=\infty}\overline{Y}_{i\varkappa} = 0.$$

Dann lassen sich die $c_1, \cdots, c_n$ als von x unabhängige Größen derart bestimmen, daß

$$(44)\qquad \overline{y}_{i\varkappa} = c_1 y_{1\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa}\qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n).$$

Aus den Gleichungen (44) ergibt sich

$$c_\lambda = e^{\mu(\omega_i - \omega_\lambda)}\left(c_\lambda^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p} c_\lambda^{(p)} + \frac{C_\lambda}{\mu^p}\right), \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n),$$

wo die $c_\lambda^{(0)}, \cdots, c_\lambda^{(p)}$ von μ unabhängig und die

$$\lim_{\mu=\infty} C_\lambda = 0$$

sind. Die Gleichungen

$$\frac{dc_\lambda}{dx} = 0$$

ergeben für $i = \lambda$

$$\frac{dc_i^{(0)}}{dx} = 0, \quad \frac{dc_i^{(1)}}{dx} = 0, \cdots, \frac{dc_i^{(p)}}{dx} = 0, \quad \frac{dC_i}{dx} = 0,$$

und für $i \neq \lambda$

$$c_\lambda^{(0)} = 0, \quad c_\lambda^{(1)} = 0, \cdots, c_\lambda^{(p)} = 0,$$

$$C_\lambda = \text{const.}\, e^{\mu(\omega_\lambda - \omega_i)}.$$

Es ist folglich für $\lambda \neq i$

$$c_\lambda y_{\lambda\varkappa} = e^{\mu\omega_i} \frac{\Gamma_{\lambda\varkappa}}{\mu^p}, \qquad \Gamma_{\lambda\varkappa} = C_\lambda\left(y_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p} y_{\lambda\varkappa}^{(p)} + \frac{1}{\mu^p} Y_{\lambda\varkappa}\right),$$

$$\lim_{\mu=\infty} \Gamma_{\lambda\varkappa} = 0,$$

und somit

$$\overline{y}_{i\varkappa} = \left(c_i^{(0)} + \cdots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{1}{\mu^p} C_i\right) y_{i\varkappa} + e^{\mu\omega_i} \frac{\Gamma_\varkappa}{\mu^p}, \tag{45}$$

$$\lim_{\mu=\infty} \Gamma_\varkappa = \lim_{\mu=\infty} \sum_{\lambda \neq \varkappa} \Gamma_{\lambda\varkappa} = 0,$$

wo die $c_i^{(0)}, \cdots, c_i^{(p)}, C_i$ von x unabhängige Größen bedeuten. Wir erhalten sonach:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{y}_{i\varkappa}^{(0)} = y_{i\varkappa}^{(0)} c_i^{(0)}, \\ \overline{y}_{i\varkappa}^{(1)} = y_{i\varkappa}^{(0)} c_i^{(1)} + y_{i\varkappa}^{(1)} c_i^{(0)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \overline{y}_{i\varkappa}^{(p)} = y_{i\varkappa}^{(0)} c_i^{(p)} + \cdots + y_{i\varkappa}^{(p)} c_i^{(0)}; \end{array}\right. \tag{46}$$

durch diese Gleichungen ist die Art, wie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (6)—(8) von den willkürlichen Konstanten $c_i^{(0)}, \cdots, c_i^{(p)}$ abhängen, in Evidenz gesetzt.

Es bedeute nun $y_1, \cdots, y_n$ ein Lösungssystem des Differentialsystems (A), dessen Anfangswerte für $x = x_0$ in der Form

$$y_\varkappa(x_0) = e^{\mu\gamma}\left(\gamma_\varkappa^{(0)} + \frac{1}{\mu}\gamma_\varkappa^{(1)} + \frac{1}{\mu^2}\gamma_\varkappa^{(2)} + \cdots \text{ in inf.}\right) \tag{47}$$

darstellbar sind, wo γ, $\gamma_\varkappa^{(0)}$, $\gamma_\varkappa^{(1)}$, $\cdots$ von μ unabhängige Konstanten bedeuten und die rechter Hand stehenden unendlichen Reihen entweder für $|\mu| > R$ konvergent sind, oder die betreffenden Anfangswerte asymptotisch darstellen, wenn μ seinen Strahl entlang ins Unendliche rückt. Dann lassen sich von x unabhängige Größen $c_1, \cdots, c_n$ so bestimmen, daß

$$(48) \qquad y_\varkappa = c_1 y_{1\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n).$$

Zur Bestimmung dieser Konstanten setzen wir in (48) für x den Wert x_0 ein; dann ergibt sich

$$c_i = e^{\mu\gamma}\left(c_i^{(0)} + \cdots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_i}{\mu^p}\right),$$

wo die $c_i^{(0)}, \cdots, c_i^{(p)}$ von μ unabhängige Größen bedeuten, die sich gemäß den Gleichungen (46) aus den Gleichungen:

$$(49) \qquad \left\{\begin{aligned} \gamma_\varkappa^{(0)} &= \sum_{i=1}^{n} y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0)\, c_i^{(0)}, \\ \gamma_\varkappa^{(0)} &= \sum_{i=1}^{n} \left(y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0)\, c_i^{(1)} + y_{i\varkappa}^{(1)}(x_0)\, c_i^{(0)}\right), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma_\varkappa^{(p)} &= \sum_{i=1}^{n} \left(y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0)\, c_i^{(p)} + \cdots + y_{i\varkappa}^{(p)}(x_0)\, c_i^{(0)}\right) \end{aligned}\right.$$

und zwar — mit Rücksicht darauf, daß die Determinante

$$|y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0)| \neq 0$$

ist — in *eindeutiger* Weise bestimmen; für das noch von μ abhängige C_i ist:

$$\lim_{\mu=\infty} C_i = 0.$$

Setzen wir nunmehr: $\bar{\omega}_i = \omega_i + \gamma$ und ferner

$$(50) \qquad \left\{\begin{aligned} & y_{i\varkappa}^{(0)} c_i^{(0)} = \bar{y}_{i\varkappa}^{(0)}, \\ & y_{i\varkappa}^{(0)} c_i^{(1)} + y_{i\varkappa}^{(1)} c_i^{(0)} = \bar{y}_{i\varkappa}^{(1)}, \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & y_{i\varkappa}^{(0)} c_i^{(p)} + \cdots + y_{i\varkappa}^{(p)} c_i^{(0)} = \bar{y}_{i\varkappa}^{(p)}, \end{aligned}\right.$$

so ergibt sich die Darstellung:

$$\begin{gathered} y_\varkappa = e^{\mu\bar{\omega}_1}\left(\bar{y}_{1\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\bar{y}_{1\varkappa}^{(p)}\right) + \cdots + e^{\mu\bar{\omega}_n}\left(\bar{y}_{n\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\bar{y}_{n\varkappa}^{(p)}\right) \\ + \frac{1}{\mu^p}\left(e^{\mu\bar{\omega}_1}\bar{Y}_{1\varkappa} + \cdots + e^{\mu\bar{\omega}_n}\bar{Y}_{n\varkappa}\right), \\ \lim_{\mu=\infty}\bar{Y}_{1\varkappa} = \cdots = \lim_{\mu=\infty}\bar{Y}_{n\varkappa} = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n), \end{gathered}$$

die für jeden positiven ganzzahligen Wert von p gültig ist.

Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (39) können wir somit das folgende Theorem aussprechen:

Jedes Integralsystem des Differentialsystems (A), *dessen Anfangswerte im Punkte* x_0 *in der Form* (47) *darstellbar sind, läßt für die zwischen* x_0 *und* x *gelegenen Punkte des* x*-Strahls und für ein den* μ*-Strahl entlang ins Unendliche wachsendes* μ *eine asymptotische Darstellung zu, und zwar im allgemeinen, d. h. wenn die sich aus den Gleichungen* (49), (50) *ergebenden* $\bar{y}_{1\varkappa}^{(\nu)}$ *nicht sämtlich identisch verschwinden, in der Form*

$$(51)\qquad y_\varkappa \sim e^{\mu \bar{\omega}_1}\left(\bar{y}_{1\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu}\bar{y}_{1\varkappa}^{(1)} + \frac{1}{\mu^2}\bar{y}_{1\varkappa}^{(2)} + \cdots \text{ in inf.}\right).$$

Für spezielle Wahlen der Anfangswerte (47) kann es sich ereignen, daß gewisse der aus den Gleichungen (49), (50) zu bestimmenden $\bar{y}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ identisch verschwinden. Wenn

$$\bar{y}_{i\varkappa}^{(\nu)} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, \lambda - 1;\ \nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

aber unter den $\bar{y}_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}$ welche vorhanden sind, die nicht identisch verschwinden, so haben wir

$$(52)\qquad y_\varkappa \sim e^{\mu \bar{\omega}_\lambda}\left(\bar{y}_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu}\bar{y}_{\lambda\varkappa}^{(1)} + \cdots\right);$$

dabei ist jedoch zu bemerken, daß für alle Elemente eines Integralsystems, d. h. für alle Werte des Index $\varkappa = 1, 2, \cdots, n$, der Index λ immer derselbe sein muß, wie aus den zur Berechnung der $\bar{y}_{i\varkappa}^{(0)}, \bar{y}_{i\varkappa}^{(1)}, \cdots$ dienenden Formeln (siehe namentlich Gl. (50)) hervorgeht.

II.

Anwendung auf den Fall eines schlechthin kanonischen Differentialsystems, für das die Wurzeln der determinierenden Gleichungen von dem Parameter unabhängig sind.

Es möge nun der Fall besonders behandelt werden, wo das Differentialsystem (A) ein *schlechthin kanonisches* ist, d. h. die Form hat

$$(\text{A})\qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{g_{\lambda\varkappa}(x)}{\varphi(x)}\, y_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n);$$

dabei bedeuten die $g_{\lambda\varkappa}(x)$ ganze rationale Funktionen von nicht höherem als dem $(\sigma - 1)^{\text{ten}}$ Grade in x, während

$$(1)\qquad \varphi(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_\sigma).$$

Die singulären Punkte $a_1, \cdots, a_\sigma$ seien von μ unabhängig, dagegen sei:

$$(2)\qquad g_{i\varkappa}(x) = \mu\left(g_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu} g_{i\varkappa}^{(1)} + \cdots\right).$$

Diese Reihen mögen für $|\mu| > R$ (wo R von x und den $a_1, \cdots, a_\sigma$ unabhängig ist) konvergieren, und der Einfachheit wegen wollen wir auch voraussetzen, daß die Entwickelungskoeffizienten $g_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ $(\lambda = 0, 1, \cdots)$ rationale ganze Funktionen von x sind.

Wir betrachten die algebraische Gleichung n^{ten} Grades*)

$$(3) \qquad \left| \frac{g_{i\varkappa}(x)}{\varphi(x)} - \delta_{i\varkappa}\,\Omega \right| = 0, \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n);$$

sie definiert uns Ω als algebraische Funktion von x und als in der Umgebung von $\mu = \infty$ n-deutige Funktion von μ. Für diese Funktion sind die Punkte $a_1, \cdots, a_\sigma$ einfache Pole; setzt man

$$(4) \qquad \operatorname{Res}_{a_\nu} \frac{g_{i\varkappa}(x)}{\varphi(x)} = A_{i\varkappa}^{(\nu)}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma),$$

so ist

$$(5) \qquad \left| A_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa} \operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega \right| = 0, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n).$$

Bezeichnen wir also die Wurzeln der Gleichung (3) mit $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$, so sind die

$$(6) \qquad \operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i = r_i^{(\nu)}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n; \quad \nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

nichts anderes als die Wurzeln der zu $x = a_\nu$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen des Systems (A), und ebenso sind für $x = \infty$ die

$$(7) \qquad \operatorname{Res}_\infty \Omega_i = r_i^{(\sigma+1)}$$

die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung. Wir setzen im folgenden stets voraus, daß die Differenzen der $r_i^{(\nu)}$ weder verschwinden noch ganze Zahlen sind, so daß also die zu den singulären Punkten $a_1, \cdots, a_\sigma, a_{\sigma+1}\,(=\infty)$ gehörigen Integralmatrizen $\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}$ in der Form

$$(8) \qquad \eta_{i\varkappa}^{(\nu)} = (x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \cdot \varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}$$

darstellbar sind, wo die $\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphe Funktionen bedeuten, deren Determinante $\left|\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}\right|$ für $x = a_\nu$ nicht verschwindet. Für $\nu = \sigma + 1$ ist $x - a_\nu$ durch $\frac{1}{x}$ zu ersetzen. — Aus dieser Annahme folgt, daß die Diskriminante der Gleichung (3) in bezug auf Ω nicht identisch verschwindet, und daß die Punkte $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ nicht zu den Verzweigungspunkten der algebraischen Funktion Ω von x gehören, solange μ einen endlichen Wert besitzt.

---

*) Diese für die Theorie der linearen Differentialsysteme wichtige Gleichung wurde unsere Wissens zuerst von Herrn Volterra (Memorie della Soc. Ital. delle Scienze 1899), allerdings bei Fragen anderer Art, als die, mit denen wir es hier zu tun haben, in Betracht gezogen.

Denkt man sich in (3) für $g_{i\varkappa}$ die Entwickelung (2) eingesetzt, so ist in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen der vorigen Nummer

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu} \Omega = \varpi \tag{9}$$

durch die charakteristische Gleichung

$$\left| \frac{g_{i\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)} - \delta_{i\varkappa} \varpi \right| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

bestimmt. Wenn die Diskriminante dieser Gleichung nicht identisch verschwindet, d. h. wenn ihre Wurzeln $\varpi_1, \cdots, \varpi_n$ für ein unbestimmtes x voneinander verschieden sind, so ist also in der Umgebung von $\mu = \infty$

$$\Omega_i = \mu \left(\varpi_i + \frac{1}{\mu} \Omega_i^{(1)} + \cdots \right), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{11}$$

Wir machen nun die weitere Voraussetzung, *daß die Wurzeln $r_i^{(\nu)}$ der zu den singulären Punkten $a_1, \cdots, a_\sigma$, ∞ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen des Systems* (A) *von dem Parameter μ unabhängig sind.*

Dann ist also nach (6) und (7)

$$\operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i = \operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i^{(1)}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma, \sigma + 1),$$

dagegen

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{a_\nu} \varpi_i &= 0, \\ \operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i^{(\lambda)} &= 0, \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots). \end{aligned} \tag{12}$$

Wir wollen hieraus auf den Charakter der ϖ_i schließen, Analoges gilt dann natürlich auch für die $\Omega_i^{(2)}, \Omega_i^{(3)}, \cdots$.

Die algebraische Funktion ϖ besitzt keine anderen Pole als $a_1, \cdots, a_\sigma$ u. z. kann ϖ in diesen Punkten von nicht höherer als der ersten Ordnung unendlich werden. Zufolge der Gleichungen (12) ist aber ein Unendlichwerden von erster Ordnung auch ausgeschlossen; die $a_1, \cdots, a_\sigma$ und ebenso $x = \infty$ gehören folglich zu den Verzweigungspunkten der algebraischen Gleichung (10) und die ϖ_i werden in diesen Punkten von niedrigerer als der ersten Ordnung unendlich. Hieraus folgt, daß die

$$\omega_i = \int \varpi_i \, dx$$

für keinen endlichen oder unendlich großen Wert von x unendlich werden können, *daß sie also den Charakter von Integralen erster Gattung haben.* *)

---

*) Man überzeugt sich an Beispielen (etwa $n = 2$, $\sigma = 3$), daß die ω_i nicht etwa identisch verschwinden müssen.

Rückwärts ergibt sich aus dieser Tatsache, daß die $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ auch die einzigen Verzweigungspunkte von (10) sind.

Der Koeffizient von ϖ^{n-1} in der Gleichung (10) lautet

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{g_{ii}^{(0)}(x)}{\varphi(x)}; \tag{13}$$

da für diese rationale Funktion von x die Residuen in bezug auf $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ verschwinden müssen und der Zähler von nicht höherem als dem $(\sigma - 1)^{\text{ten}}$ Grade ist, verschwindet die Funktion (13) identisch, wir haben also — in Übereinstimmung mit einem bekannten Theorem *) — die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \varpi_i = 0. \tag{14}$$

Wir definieren durch die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}\left(\frac{g_{\lambda\varkappa}}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda\varkappa}\Omega_i\right) = 0, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{15}$$

Größen $u_{i1}, \cdots, u_{in}$, deren Verhältnisse sich aus (15) als algebraische — mit Ω_i gleichverzweigte — Funktionen von x ergeben. Für ein endliches μ sind folglich die $u_{i\lambda}$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph und die $u_{i\lambda}(a_\nu)$ genügen den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}(a_\nu)(A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{\lambda\varkappa}\, r_i^{(\nu)}) = 0. \tag{16}$$

Aus den Gleichungen (15) ergibt sich, indem man für $g_{\lambda\varkappa}$, Ω_i die Entwickelungen (2), (11) einsetzt, für ein von den $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ verschiedenes x:

$$u_{i\lambda} = u_{i\lambda}^{(0)} + \frac{1}{\mu}\, u_{i\lambda}^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}, \tag{17}$$

wo diese Gleichungen so zu verstehen sind, daß sich ihre beiden Seiten nur durch einen von dem Index λ unabhängigen Proportionalitätsfaktor unterscheiden. Die $u_{i\lambda}^{(0)}$ sind, in Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise des vorigen Abschnittes, durch die Gleichungen

$$\sum_{\lambda} u_{i\lambda}^{(0)}\left(\frac{g_{\lambda\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda\varkappa}\,\varpi_i\right) = 0 \tag{18}$$

---

*) Siehe etwa Appell et Goursat, Théorie des fonctions algébriques (1895), S. 301.

bestimmt. Setzen wir ferner

$$(19)\qquad A_{i\varkappa}^{(\nu)} = \mu\left(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} + \frac{1}{\mu}\,\beta_{i\varkappa}^{(\nu)} + \cdots\right),$$

so daß also

$$(19\text{a})\qquad \alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} = \lim_{x=a_\nu}(x-a_\nu)\,\frac{g_{i\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)} = \operatorname{Res}_{a_\nu}\frac{g_{i\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)},$$

so folgt aus (16), mit Rücksicht auf den Umstand, daß die $r_i^{(\nu)}$ von μ unabhängig sein sollten:

$$(20)\qquad u_{i\lambda}(a_\nu) = u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu) + \frac{1}{\mu}\,u_{i\lambda}^{(1)}(a_\nu) + \cdots \text{ in inf.},$$

wo in Übereinstimmung mit (18)

$$(21)\qquad \sum_\lambda u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu)\,\alpha_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} = 0$$

ist. — Wenn wir die Gleichung (10) in der Form

$$\left|\frac{g_{i\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)}(x-a_\nu) - \delta_{i\varkappa}\varpi\cdot(x-a_\nu)\right| = 0$$

schreiben und darin $x = a_\nu$ setzen, so erkennen wir mit Rücksicht auf (19a) und (12), daß die zu der Matrix $\left(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)}\right)$ gehörige charakteristische Gleichung die n-fache Wurzel Null besitzt, so daß also die aus den Hauptsubdeterminanten dieser Matrix gebildeten Summen sämtlich verschwinden. Insbesondere ist demnach $\left|\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)}\right| = 0$, so daß die Gleichungen

$$(22)\qquad \sum_\lambda v_\lambda^{(\nu)}\,\alpha_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} = 0$$

auflösbar sind. Mit Rücksicht auf (21) haben wir folglich

$$(23)\qquad u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu) = v_\lambda^{(0)},$$

d. h. die Werte der Funktionen $u_{i\lambda}^{(0)}$ im Punkte a_ν sind von dem Index i unabhängig, was mit der Tatsache in Übereinstimmung steht, daß $x = a_\nu$ ein Verzweigungspunkt der algebraischen Funktion ϖ ist. Nach (20) haben wir also

$$(24)\qquad u_{i\lambda}(a_\nu) = v_\lambda^{(\nu)} + \frac{1}{\mu}\,u_{i\lambda}^{(1)}(a_\nu) + \cdots \text{ in inf.},$$

wo diese Gleichungen, ebenso wie (23), (20) in demselben Sinne zu verstehen sind, wie wir es für die Gleichungen (17) festgesetzt haben. Wir bemerken, daß für die durch die Gleichungen (8) erklärten Funktionen $\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}$ die Gleichungen

$$\sum_\lambda \varphi_{i\lambda}^{(\nu)}(a_\nu)\left(A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{\lambda\varkappa}r_i^{(\nu)}\right) = 0$$

bestehen*), so daß also mit Rücksicht auf (16) und (24)

$$\varphi_{i\lambda}^{(\nu)}(a_\nu) = v_\lambda^{(\nu)} + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)}(a_\nu) + \cdots \text{ in inf.} \tag{25}$$

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen wenden wir uns zur asymptotischen Darstellung der Integrale in dem jetzt vorliegenden Falle.

Im I. Abschnitte hatten wir einen x-Punkt *regulär* genannt, wenn er weder zu den singulären Punkten des Differentialsystems (A) noch zu den Verzweigungspunkten der algebraischen Funktion ϖ gehörte. Da in dem jetzt behandelten Falle die Punkte $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ die einzigen Verzweigungspunkte von ϖ sind, wird ein *regulärer* Punkt einfach ein solcher sein, in dessen Umgebung sich die Integrale des Systems (A) regulär verhalten. Legen wir also von einem regulären Punkte x_0 aus einen Strahl, und lassen wir μ mit festem Argumente ins Unendliche gehen, so wird ein Integralsystem $y_1, \cdots, y_n$ des Differentialsystems (A), dessen Anfangswerte in x_0 in der Form

$$e^{\mu\gamma}\left(\gamma_\varkappa^{(0)} + \frac{1}{\mu}\gamma_\varkappa^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}\right) \tag{26}$$

asymptotisch (oder für $|\mu| > R$ konvergent) darstellbar sind, allgemein zu reden, in der Form

$$y_\varkappa \sim e^{\mu\omega_1+\gamma}\left(\bar{y}_{1\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu}\bar{y}_{1\varkappa}^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}\right) \tag{27}$$

darstellbar sein, u. z. gilt diese asymptotische Darstellung für alle Punkte des x-Strahles, die zwischen x_0 und dem nächsten auf jenem Strahle befindlichen singulären Punkte liegen. Dabei bedeutet ω_1 dasjenige

$$\omega_i = \int_{x_0}^{x} \varpi_i\,dx, \tag{28}$$

für das, wenn

$$\theta = \operatorname{Arg}\mu + \operatorname{Arg}(x - x_0)$$

gesetzt wird,

$$\Re\left(\varpi_1 e^{\theta\sqrt{-1}}\right) > \Re\left(\varpi_\varkappa e^{\theta\sqrt{-1}}\right), \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n) \tag{29}$$

ist. Da aber nach (14)

$$\sum_{i=1}^{n} \Re\left(\varpi_i e^{\theta\sqrt{-1}}\right) = 0$$

ist, so folgt, daß $\Re\left(\varpi_1 e^{\theta\sqrt{-1}}\right)$ und folglich $\Re(\mu\omega_1)$ *positiv* ist für alle x-Werte, die auf dem x-Strahle zwischen x_0 und dem nächsten singulären Punkte gelegen sind. Eine Veränderung des x-Strahles und des Arguments von μ kann bewirken, daß in der Ungleichung (29) nicht mehr ϖ_1, sondern ein anderes ϖ_i die *erste Stelle* einnimmt; dann werden in der

*) Siehe die vorhergehende Note, Gl. (3), S. 274.

asymptotischen Darstellung (27), allgemein zu reden, ω_i und die entsprechenden $\bar{y}_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ an die Stelle der ω_1, $\bar{y}_{1\varkappa}^{(\lambda)}$ treten, und für die in Betracht kommenden x- und μ-Werte wird $\Re(\mu\omega_i)$ einen positiven Wert haben. Wir erhalten somit das

Theorem I. *Die Elemente eines Integralsystems, dessen Anfangswerte in dem regulären Punkte x_0 in der Form*

$$(26\text{a}) \qquad \gamma_\varkappa^{(0)} + \frac{1}{\mu}\gamma_\varkappa^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}$$

asymptotisch darstellbar sind, werden, wenn der Parameter μ in beliebiger Richtung ins Unendliche geht, allgemein zu reden, für jeden x-Wert, der innerhalb des zum Punkte x_0 gehörigen Mittag-Lefflerschen Sternes) gelegen ist, unendlich. Nur solche Integralsysteme, deren asymptotische Darstellung nicht zu demjenigen ϖ_i gehört, für das $\Re(\mu\varpi_i)$ den größten Wert hat, können dem Grenzwerte Null zustreben, oder auch für spezielle Argumente von μ völlig unbestimmt werden.*

Wir betrachten nun den Fall, daß x sich auf einer von x_0 ausgehenden *gebrochenen Linie* bewegt; es genügt offenbar, den Fall näher zu untersuchen, wo jene Linie nur *einen* Knickpunkt aufweist. Es möge also von x_0 ein erster Strahl ausgehen, an den sich in einem seiner Punkte, etwa x_1, ein zweiter Strahl anschließt; das Argument von μ bleibe ein für alle Male fixiert. Das Integralsystem $y_1, \cdots, y_n$, dessen Anfangswerte in x_0 in der Form (26a) darstellbar sind, besitzt längs des ersten Strahles eine asymptotische Darstellung von der Form (27), wo $\gamma = 0$ zu setzen ist, wir haben also für $x = x_1$

$$(30) \qquad y_\varkappa(x_1) \sim e^{\mu\,\omega_1(x_1)}\left(\bar{y}_{1\varkappa}^{(0)}(x_1) + \frac{1}{\mu}\bar{y}_{1\varkappa}^{(1)}(x_1) + \cdots \text{ in inf.}\right),$$

wo, allgemein zu reden, ω_1 so beschaffen ist, daß längs des ersten Strahles $\Re(\mu\omega_1)$ am größten, also positiv ist. Es sei nun längs des zweiten Strahles

$$\omega_i' = \int_{x_1}^{x} \varpi_i\,dx$$

und ω_2' dasjenige, für welches $\Re(\mu\omega_2')$ den größten Wert unter allen $\Re(\mu\omega_i')$ hat, dann ist, allgemein zu reden, für jeden Punkt x des zweiten Strahles, der zwischen x_1 und dem nächsten singulären Punkte gelegen ist,

$$y_\varkappa(x) \sim e^{\mu\,(\omega_2'(x) + \omega_1(x_1))}\left(\bar{\bar{y}}_{2\varkappa}^{(0)}(x) + \frac{1}{\mu}\bar{\bar{y}}_{2\varkappa}^{(1)}(x) + \cdots \text{ in inf.}\right),$$

wo die $\bar{\bar{y}}_{2\varkappa}^{(\lambda)}$ gemäß den durch (30) gegebenen asymptotischen Darstellungen der Anfangswerte im Punkte x_1 zu bestimmen sind. — Wenn also

*) Siehe Mittag-Leffler, Acta Mathematica, Bd. XXIII, p. 43 ff.

der Punkt x mit dem Punkte x_0 durch eine, keinen singulären Punkt enthaltende gebrochene Linie verbunden ist, so werden diejenigen Werte des Integralsystems $y_1, \cdots, y_n$, die durch analytische Fortsetzung längs dieser Linie im Punkte x zum Vorschein kommen, in der Form

$$y_\varkappa(x) \sim e^{\mu(\omega_i(x)+p)}\left(y_{i\varkappa}^{(0)}(x) + \frac{1}{\mu}\, y_{i\varkappa}^{(1)}(x) + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

asymptotisch darstellbar sein, wo p eine Konstante bedeutet, und wo, allgemein zu reden,

$$\Re[\mu(\omega_i(x)+p)] > 0$$

ist; die $\omega_i(x)$, $y_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ sind so zu bestimmen, daß in einem jeden Knickpunkte der gebrochenen Linie die asymptotische Darstellung für den daselbst *ausgehenden* Strahl denjenigen Anfangswerten gemäß herzustellen ist, die durch die längs des in jenem Knickpunkte *endenden* Strahles gültige asymptotische Darstellung gegeben werden.

Wir sehen also, daß ein Integralsystem, das in *einem* regulären Punkte x_0 einer asymptotischen Darstellung von der Form (26) fähig ist, die Eigenschaft hat, daß jeder Zweig dieses Integralsystems in jedem regulären Punkte x eine asymptotische Darstellung von derselben Form zuläßt, und wir erhalten diese Darstellung, indem wir den von x_0 nach x führenden Fortsetzungsweg durch eine ihm äquivalente gebrochene Linie ersetzen und für diese auf die oben angegebene Weise verfahren. Da eine Funktion nur auf eine Weise asymptotisch dargestellt werden kann, erkennen wir zugleich, daß die in x gültige asymptotische Darstellung von der Wahl der zu ihrer Herstellung benutzten gebrochenen Linie unabhängig ist, vorausgesetzt, daß nur solche gebrochene Linien zugelassen werden, die einander und dem Fortsetzungswege äquivalent sind.

Es sei nun die von x_0 ausgehende gebrochene Linie eine *geschlossene*, d. h. also ein geradliniges Polygon, dessen eine Ecke x_0 ist. Es möge im Inneren dieses Polygons ein einziger singulärer Punkt, etwa a_ν, gelegen sein. Dabei verstehen wir unter dem Inneren des Polygons denjenigen Teil der x-Ebene, der, beim Durchlaufen des Polygons in einem bestimmten Sinne, zur Linken bleibt. Die Zahl ν kann dann einen der Werte $1, 2, \cdots, \sigma+1$ annehmen. Es sei ferner $(\mathfrak{y}_{ik})$ diejenige Integralmatrix, die sich für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, so daß also diejenigen Werte der $\mathfrak{y}_{i\varkappa}$, die in x_0 zum Vorschein kommen, wenn wir längs des Polygons analytisch fortsetzen, nichts anderes sind, als die Elemente der einer Umkreisung von a_ν entsprechenden Fundamentalsubstitution $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$. Da die Anfangswerte $\delta_{i\varkappa}$ der $\mathfrak{y}_{i\varkappa}$ im Punkte x_0 von μ unabhängig, also jedenfalls in der Form (26a) darstellbar sind, folgt, daß die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ jedenfalls in der Form

$$(31)\qquad \mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} \sim e^{\mu p_i}\left(\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)} + \frac{1}{\mu}\,\mathfrak{b}_{i\varkappa}^{(\nu)} + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

asymptotisch dargestellt werden können, wo, allgemein zu reden,

$$\Re(\mu p_i) > 0$$

ist, während die $\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ die Werte gewisser $y_{\lambda\varkappa}^{(0)}$ im Punkte x_0 bedeuten, wo der Index λ von i unabhängig ist. Wir erkennen hieraus fürs erste, daß *im allgemeinen die sämtlichen* $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ *unendlich werden, wenn der Parameter* μ *mit einem beliebigen Argumente ins Unendliche rückt.* Des weiteren können wir aus der Darstellung (31) noch einen bemerkenswerten Schluß ziehen.

Bezeichnen wir die Wurzeln der zu a_ν gehörigen Fundamentalgleichung

$$(32)\qquad \left|\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa}\varrho\right| = 0$$

mit

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_i^{(\nu)}} = \varrho_i^{(\nu)},$$

so sind diese Größen von μ unabhängig. Daraus folgt, mit Rücksicht auf (31), daß die durch die linearen Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} v_{i\lambda}^{(\nu)}\left(\mathsf{A}_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{\lambda\varkappa}\varrho_i^{(\nu)}\right) = 0, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

bestimmten Verhältnisse

$$(33)\qquad v_{i1}^{(\nu)} : v_{i2}^{(\nu)} : \cdots : v_{in}^{(\nu)}$$

einer asymptotischen Darstellung von der Form

$$(34)\qquad \alpha_0 + \frac{1}{\mu}\,\alpha_1 + \cdots \text{ in inf.}$$

fähig sind. Diese Verhältnisse sind aber*) nichts anderes, als die Verhältnisse der Werte, die die durch die Gleichungen (8) definierten Funktionen $\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}$ im Punkte x_0 annehmen, wir sehen also, daß diese Verhältnisse oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Verhältnisse

$$(35)\qquad \eta_{i1}^{(\nu)} : \eta_{i2}^{(\nu)} : \cdots : \eta_{in}^{(\nu)}$$

der Elemente der zu a_ν gehörigen Integralmatrix im Punkte x_0 asymptotische Darstellungen von der Form (34) zulassen. Denken wir uns den Punkt x_0 mit a_ν durch einen ganz innerhalb unseres Polygons verlaufenden Strahl, oder, wenn dies nicht möglich ist, durch eine im Inneren des Polygons verbleibende gebrochene Linie verbunden, so sind nach dem Vorhergehenden die Verhältnisse (35) längs jener Linie bis in jede beliebige Nähe des Punktes a_ν asymptotischer Darstellungen fähig, da ja ihre Anfangswerte im Punkte x_0 eine solche Darstellung zulassen. Die längs des in a_ν mündenden Strahles gültigen Darstellungen gehen aber, wenn

*) Vergl. die vorhergehende Note, Gl. (4), S. 274.

x in den Punkt a_ν einrückt, formell in die Verhältnisse der auf der rechten Seite der Gleichungen (25) auftretenden Reihen über; da diese Reihen die Werte $\varphi_{i\lambda}^{(\nu)}(a_\nu)$ — von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen — in einer gewissen Umgebung von $\mu = \infty$ konvergent darstellen, so können wir sagen:

Theorem II. *Die Verhältnisse der Elemente der zu einem singulären Punkte a_ν gehörigen Integralmatrix sind längs eines jeden in diesem Punkte einmündenden Strahles einer asymptotischen Darstellung fähig, und diese Darstellung bleibt in jenem singulären Punkte selbst gültig, indem sie daselbst in eine konvergente Reihenentwicklung übergeht.**)

Wir haben bereits angemerkt, daß *im allgemeinen* die sämtlichen $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ unendlich werden, wenn μ in beliebiger Richtung ins Unendliche rückt. Diese Bemerkung kann noch schärfer gefaßt werden. Denken wir uns in der zum Punkte a_ν gehörigen Fundamentalgleichung (32) für die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ ihre asymptotischen Darstellungen (31) eingesetzt, so folgt, wenn μ mit bestimmtem Argumente ins Unendliche rückt:

$$\left| \mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa}\varrho_\lambda^{(\nu)} \lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} \right| = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n).$$

Es sind nun folgende Fälle denkbar:

1. $\lim\limits_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 0$ für $i = 1, 2, \cdots, n$. In diesem Falle ist also $\lim\limits_{\mu=\infty} \mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} = \infty$, und die Wurzeln der zu der Matrix $(\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörigen charakteristischen Gleichung sind sämtlich gleich Null. Dieser Fall ist der „allgemeine", wo nämlich die asymptotischen Darstellungen aller $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ zu demjenigen ω_1 gehören, für das $\Re(\mu\omega_1)$ am größten, also positiv ist, und wo demnach die

$$\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)} = y_{1\varkappa}^{(0)}(x_0)$$

von dem Index i unabhängige Werte besitzen.

2. $\lim\limits_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = \infty$; dieser Fall ist ausgeschlossen, da die zu der Matrix $(\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörige charakteristische Gleichung keine unendlich große Wurzel besitzen kann.

3. $\lim\limits_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 0$ wenigstens für einen Wert der Index i; dann sind die Grenzwerte der zu diesem Index i gehörigen $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ unendlich groß.

4. $\lim\limits_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 1$, also $p_i = 0$ für jedes $i = 1, 2, \cdots, n$. Wenn dieser Fall für einen oder mehrere der Werte $\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1$ eintritt, aber nicht für alle, so können die entsprechenden $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ den endlichen Grenz-

*) Man vergl. hiermit die von Herrn Bôcher, Encyklopädie der math. Wissensch. II A 7 a, p. 447 angegebenen Bedingungen, unter denen die sogenannten Oszillationstheoreme in einem singulären Punkte, der kein Punkt der Unbestimmtheit ist, bestehen bleiben.

werten $\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ zustreben, und die $\varrho_\lambda^{(\nu)}$ sind die Wurzeln der zu der Matrix $(\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörigen charakteristischen Gleichung

(35) $$\left|\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa}\varrho\right| = 0.$$

In diesem Falle muß also die Determinante $|\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ von Null verschieden sein, die Matrix $(\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ muß folglich mit der Matrix $(y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0))$ übereinstimmen, so daß die asymptotischen Darstellungen der $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ für $i = 1, 2, \cdots, n$ zu den n verschiedenen ω_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ gehören. Dann sind unter denjenigen $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$, für deren oberen Index ν der eben besprochene Fall nicht eintritt, noch immer welche vorhanden, deren Grenzwert unendlich wird. Es bleibt also noch der Fall:

5. Wo die unter 4. besprochenen Verhältnisse für *alle* $n = 1, 2, \cdots, \sigma + 1$ stattfinden. In diesem Falle verschwinden die sämtlichen Periodizitätsmoduln der Integrale erster Gattung ω_i, es sind also die ω_i selbst sämtlich identisch gleich Null.

Wir hatten unsere ganze Untersuchung unter der Voraussetzung geführt, daß die $\varpi_1, \cdots, \varpi_n$ voneinander verschieden sind. Wenn die sämtlichen Wurzeln der Gleichung (10) zusammenfallen, also rational sind, so müssen sie identisch verschwinden. Alsdann wäre die durch die Gleichung (3) definierte Funktion Ω im allgemeinen nicht in der Form (11) nach ganzen, sondern nach gebrochenen Potenzen von μ, nämlich nach ganzen Potenzen von $\mu^{\frac{1}{n}}$ entwickelbar, und auch die Potenzen von μ, die in den formalen, dem Differentialsysteme genügenden Entwicklungen auftreten, würden ganze Potenzen von $\mu^{\frac{1}{n}}$ werden.*)

Sollten diese Entwicklungen doch nach ganzen Potenzen von μ fortschreiten, so müßten die sämtlichen $g_{i\varkappa}^{(0)}$ in Wegfall gebracht werden können, es wäre also $\mu = \infty$ überhaupt kein wesentlich singulärer Punkt der Integrale. Dieser Fall scheidet demnach aus.

Es wird somit allemal wenigstens eines der $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ unendlich, wenn μ mit einem beliebigen Argumente ins Unendliche rückt — nur für spezielle Argumente von μ kann es sich ereignen, daß die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ nicht unendlich, sondern völlig unbestimmt werden — damit ist der in der vorhergehenden Note gemachte Schluß**) erhärtet.

Klausenburg, 26. April 1906.

---

*) Vergl. die Bemerkung in der No. I, S. 282.

**) Siehe S. 276 dieses Annalenbandes.