Ueber Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien.

Von

Otto Zoll in Göttingen.

Disposition.

Einleitung.

Nach dem Vorgange Poincaré's sucht man in neuerer Zeit die durch Differentialgleichungen definirten Curven nicht bloss in der Umgebung eines Punktes sondern in ihrer ganzen Ausdehnung zu discutiren. Dabei haben sich als besonders interessant diejenigen Differentialgleichungen herausgestellt, welche periodische Lösungen besitzen.

Auch die Aufgabe, mit der wir uns im folgenden beschäftigen wollen und deren Behandlung ich auf Anregung von Herrn Professor Hilbert unternommen habe, nämlich Flächen mit geschlossenen geodätischen Linien zu ermitteln, führt auf gewisse Differentialgleichungen, welche periodische Lösungen besitzen müssen. In der Theorie der Mechanik eines Punktes wird eine geodätische Linie bekanntlich definirt als die Bahncurve eines Punktes, der sich ohne Einwirkung einer äusseren Kraft mit constanter Geschwindigkeit auf einer Fläche bewegt. Soll nun die geodätische Linie geschlossen sein, so muss der Punkt nach einer gewissen Zeit T wieder an die Ausgangsstelle zurückkommen und von da ab dieselbe Bahn von neuem durchlaufen. Von der Fläche, auf der sich die geodätische Linie befinden soll, setzen wir voraus, dass sie sich wenigstens in der Umgebung der Stellen, wo die geodätische Curve verläuft, regulär verhält, so dass also auch die geodätische Linie selbst überall regulär ist. Stellt man die Gleichungen der Curve in der Parameterdarstellung auf:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

indem man etwa die Zeit als Parameter nimmt, so sind demnach φ, ψ, χ mit sammt ihren Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung stetig. Dass die geodätische Curve geschlossen sein soll, drückt sich analytisch dadurch aus, dass φ, ψ, χ periodische Functionen mit derselben Periode T sind.

Durch die Arbeiten von Poincaré angeregt, hat Hadamard interessante Untersuchungen über die Bahncurven eines Punktes angestellt, wobei er im besonderen auch auf geschlossene geodätische Linien zu sprechen kommt. In seiner Abhandlung: „sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique“ beweist Hadamard, dass auf einer Fläche mit durchweg positiver Gauss'scher Krümmung zwei geschlossene geodätische Linien sich nothwendig schneiden. Namentlich aber für die Flächen mit überall negativer Krümmung erhält Hadamard elegante Resultate. Mit Hülfe von Betrachtungen aus der analysis situs zeigt er, dass auf jeder solchen Fläche geschlossene geodätische Linien existiren und dass es zu jeder derselben eine geodätische Linie giebt, welche sich der geschlossenen asymptotisch annähert. (Vergl. Hadamard, Les surfaces à courbures opposées, Liouvilles Journal 1898). Während die Untersuchungen von Hadamard allgemeiner Natur sind, werden unsere Entwickelungen einen specielleren Charakter tragen, indem wir im I. Theile specielle Flächen aufstellen wollen, auf denen es eine Schar von geschlossenen geodätischen Linien giebt; und zwar werden wir dabei meist in der Weise vorgehen, dass wir theils die bekannten Flächengattungen untersuchen, theils von vornherein den geschlossenen geodätischen Linien gewisse Eigenschaften beilegen und zusehen, ob es Flächen giebt, auf denen eine Schar solcher geodätischer Curven existirt. Wir werden dabei erkennen, dass die Mannigfaltigkeit der Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien eine sehr grosse ist. Im II. Theile werden wir uns mit solchen Flächen beschäftigen, auf denen *alle* geodätischen Linien geschlossen sind. Hier sind vor allem die Arbeiten von Darboux zu erwähnen, auf die wir genauer eingehen werden. Die von Darboux aufgestellten Flächen besitzen jedoch alle einen Rand. Es ist daher eine interessante Frage, ob es *singularitätenfreie* Flächen ausser der Kugel giebt, auf denen alle geodätischen Linien geschlossen sind.

I. Theil.

Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien.

§ 1.

Uebergang zur unendlich benachbarten geodätischen Linie.

Man kann sehr leicht solche Flächen construiren, welche eine einzige geschlossene geodätische Linie besitzen. Zu diesem Zwecke braucht man nur eine beliebige geschlossene Raumcurve C zu nehmen und Flächen hindurchzulegen, welche die Hauptnormalen von C als Flächennormalen haben. Man bilde sich also einen Streifen, indem man jedem Punkte von C die durch die Tangente und Binormale bestimmte Ebene zuordnet. Durch einen solchen Streifen kann man dann unendlich viele Flächen hindurchlegen, auf denen allen die Curve C geodätische Linie ist, da in jedem ihrer Punkte die Hauptnormale mit der Flächennormalen zusammenfällt. Wollen wir nun Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien aufstellen, so müssen wir zusehen, unter welcher Bedingung es zu der Curve C benachbarte geodätische Linien giebt, die ebenfalls geschlossen sind. Bei der Untersuchung einer Schar von geodätischen Linien ist es stets vortheilhaft, die Fläche auf diese geodätischen Linien und ihre orthogonalen Trajectorien als krummlinige Coordinaten u, v zu beziehen. Das Linienelement der Fläche nimmt dann die Form an

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + g\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \tag{1}$$

wobei $v =$ const. die geodätischen Linien, $u =$ const. die orthogonalen Trajectorien sind. Aus dieser Gestalt des Linienelementes kann man sofort einen von Gauss aufgestellten wichtigen Satz ablesen: Die Bogen, die auf den geodätischen Linien $v =$ const. von zweien ihrer orthogonalen Trajectorien ausgeschnitten werden, besitzen sämmtlich gleiche Länge. Sind nun die Curven $v =$ const. geschlossen, so brauchen wir bloss mehrere orthogonale Trajectorien zu ziehen, um zu erkennen, dass alle die geschlossenen geodätischen Linien gleiche Länge haben. Zu diesem Satze müssen wir jedoch noch eine einschränkende Bemerkung machen. Es kommt nämlich, wie wir später an Beispielen sehen werden, häufig vor, dass man eine geschlossene geodätische Linie mehrere Mal durchlaufen muss, bis sich die benachbarten schliessen. Dementsprechend sind nicht immer die einfachen Längen der geschlossenen geodätischen Linien einer Schar gleich, vielmehr können wir allgemein nur behaupten, dass die Längen von irgend zweien der geschlossenen geodätischen Linien in einem rationalen Verhältnisse stehen.

Nachdem wir so über die Bogenlänge der geodätischen Linien eine Aussage gemacht haben, wollen wir nunmehr die orthogonalen Trajectorien studiren. Zu diesem Zwecke greifen wir eine Curve C aus den geschlossenen geodätischen Linien $v = \text{const.}$ heraus und bezeichnen die Bogenlänge der orthogonalen Trajectorien gerechnet von einer festen Curve $v = \text{const.}$ an bis zu der Curve C mit n. Es sind dann n und $\frac{\partial n}{\partial v}$, da wir es mit einem System geschlossener geodätischer Linien zu thun haben, periodische Functionen von u, deren Periode die Länge L der Curve C oder ein ganzes Vielfaches davon ist. $\frac{\partial n}{\partial v}$ ist aber, wie man aus Gleichung (1) erkennt, nichts anderes als $\sqrt{g}$. Für das specielle Coordinatensystem, das wir auf der Fläche gewählt haben, nimmt die Gauss'sche Krümmung eine sehr einfache Gestalt an nämlich $K = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u^2}$. Demgemäss genügt unser Ausdruck $y = \frac{\partial n}{\partial v} = \sqrt{g}$ der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{du^2} = - y \cdot K. \tag{2}$$

Wollen wir also entscheiden, ob es zu einer geschlossenen geodätischen Linie C benachbarte ebenfalls geschlossene geodätische Linien giebt, so berechnen wir die Gauss'sche Krümmung K längs C als Function der Bogenlänge u und bilden die Differentialgleichung (2). Soll C das Individuum einer Schar geschlossener geodätischer Linien sein, so ist dazu nothwendig, dass Gleichung (2) eine periodische Lösung besitzt, deren Periode die Länge L von C oder ein ganzes Vielfaches davon ist. Die Curve C wird im allgemeinen von einer benachbarten geschlossenen geodätischen Linie in mehreren Punkten geschnitten. Lassen wir die benachbarte geodätische Linie immer näher an C heranrücken, so nähern sich die Schnittpunkte bestimmten Grenzlagen, die wir als die Schnittpunkte mit einer unendlich benachbarten geschlossenen geodätischen Linie bezeichnen wollen. Für diese Schnittpunkte ist $y = \frac{\partial n}{\partial v} = 0$, sie werden also durch die Nullstellen der periodischen Lösung der Gleichung (2) bestimmt. Bekanntlich spielen die erwähnten Schnittpunkte in der Variationsrechnung eine grosse Rolle; zwei auf einander folgende derselben führen den Namen conjugirte Punkte und geben ein Intervall an, innerhalb dessen die geodätische Linie sicher kürzeste ist.

Ein allgemeines Kriterium dafür, wann eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung $\frac{d^2 y}{du^2} = - K \cdot y$ eine periodische Lösung besitzt, ist meines Wissens noch nicht aufgestellt worden; eine nothwendige Bedingung ist, dass K selber periodisch ist, eine Bedingung, die in unserem Falle von selbst erfüllt ist. Es lassen sich indessen sofort specielle Differentialgleichungen (2) angeben, welche periodische Lösungen besitzen, und zwar sind die einfachsten Beispiele diejenigen, wo K constant ist. Betrachten wir zunächst den Fall $K = 0$, indem wir also eine abwickelbare Fläche nehmen, auf der sich eine geschlossene geodätische Linie C befinden möge, so hat die zugehörige Differentialgleichung $\frac{d^2y}{du^2} = 0$ als einzige periodische Lösung $y = \text{const.}$ Die von uns aufgestellte nothwendige Bedingung ist also erfüllt, und wir wollen nun zusehen, ob sich auch wirklich die Curve C als Individuum einer Schar von geschlossenen geodätischen Linien auffassen lässt. Um dies zu entscheiden, denken wir uns die Fläche in die Ebene abgewickelt, wobei die Curve C mit der Abscissenaxe zusammenfallen möge, und beachten, dass die geodätischen Linien in die geraden Linien der Ebene übergehen. Fassen wir nun y als Ordinate auf, so liefert die Gleichung $\frac{d^2y}{du^2} = 0$ die Gesammtheit der geraden Linien in der Ebene, also auch die Gesammtheit der geodätischen Curven auf der Fläche, und unser nothwendiges Kriterium besagt, dass nur die Curven $y = \text{const.}$, d. h. die geodätischen Parallelcurven zu C geschlossen sein können. Diese sind aber auch wirklich, wie die Anschauung lehrt, alle geschlossen, soweit sie nicht an eine Singularität der Fläche stossen. Es fragt sich nun vor allem, wie man solche abwickelbaren Flächen erhält. Zu diesem Zwecke bilden wir uns einen der zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten geschlossenen Streifen, den wir der Kürze halber einen *geodätischen Streifen* nennen wollen. Ist ein solcher Streifen analytisch, so giebt es durch denselben nach dem Cauchy'schen Existenztheorem eine und nur eine abwickelbare Fläche, und auf dieser existirt dann eine Schar von geschlossenen geodätischen Linien.

Wir wenden uns nunmehr zur Untersuchung der Flächen mit durchweg negativem Gauss'schem Krümmungsmass. Nehmen wir an, es sei auf einer solchen Fläche eine geschlossene geodätische Linie C vorhanden, so werden wir zeigen, dass dieselbe stets isolirt ist, d. h. dass sie sich niemals als Individuum einer Schar von geschlossenen geodätischen Linien auffassen lässt. Um uns von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen, brauchen wir bloss nachzuweissen, dass die Differentialgleichung

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{du^2} = B \cdot y \qquad B > 0$$

niemals eine überall endliche periodische Lösung besitzt, und unterscheiden hierbei zwei Fälle. Erstens nehmen wir an, die Differentialgleichung besitze eine Lösung, welche für $u = a$ etwa verschwindet. Man kann dann zeigen, dass diese Lösung nicht noch für einen anderen Werth u verschwinden kann. Angenommen nämlich sie verschwände noch für $u = b$, so bilden wir den Ausdruck

$$\int_a^b y\left(\frac{d^2y}{du^2} - yB\right) du = 0,$$

welcher identisch verschwindet. Durch partielle Integration geht derselbe über in

$$\int_a^b \left[\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + By^2\right] du = 0.$$

Da diese Relation nur durch $y = 0$ befriedigt wird, so sehen wir, dass eine Lösung, welche nicht identisch 0 ist, nur an einer Stelle verschwinden kann; eine solche Lösung ist aber nicht periodisch. Zweitens nehmen wir an, es gäbe eine periodische Lösung y der Gleichung (3), welche an keiner Stelle verschwindet und zwar sei etwa y stets positiv. Dann folgt aus Gleichung (3) $\frac{d^2y}{du^2} > 0$. Es müsste also $\frac{dy}{du}$ mit wachsendem u stets zunehmen. Nach unserer Annahme sollte nun y und daher auch $\frac{dy}{du}$ periodisch sein. Eine überall endliche periodische Function, die stets wächst, ist aber ein Widerspruch. Damit ist gezeigt, dass die geschlossene geodätische Linie C in der That isolirt ist, mit anderen Worten: *Auf einer Fläche mit durchweg negativem Gauss'schem Krümmungsmass existirt niemals eine Schar von geschlossenen geodätischen Linien.* Damit scheiden eine grosse Zahl von Flächen z. B. die grossen Gruppen der Minimalflächen und Regelflächen aus unserer Betrachtung aus.

Der zuletzt behandelte Fall $K < 0$ entspricht dem leichteren Typus der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, wohingegen der Fall $K > 0$ weitaus schwieriger ist. (Vergl. hierüber Picard, traité d'analyse Bd. 3 Kap. VI.) Wir setzen wieder voraus, auf einer Fläche sei bereits eine geschlossene geodätische Linie C von der Länge L vorhanden und beschränken uns auf die Annahme, dass längs C die Gauss'sche Krümmung K constant gleich $\frac{1}{a^2}$ ist, so dass also die zugehörige Differentialgleichung lautet

(4) $$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{a^2}\, y = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$y = A \sin\frac{u}{a} + B \cos\frac{u}{a}$$

und ist nur dann periodisch, wenn eine Relation besteht von der Form

(5) $$k \cdot L = 2h\pi a$$

wo h und k ganze Zahlen sind. Ist die Relation (5) befriedigt, so ist kL die Periode und unser nothwendiges Kriterium ist erfüllt. Im besonderen wollen wir nun annehmen, dass wir es mit einer Fläche constanter Krümmung $\frac{1}{a^2}$ zu thun haben, auf der bereits eine geschlossene geodätische Linie existire; wir erhalten solche Flächen, indem wir durch einen geschlossenen geodätischen Streifen eine Fläche constanter positiver Krümmung hindurchlegen. Da unter Voraussetzung der Gültigkeit der Relation (5) sämmtliche Integrale der Differentialgleichung (4) periodisch sind, so liegt die Vermuthung nahe, dass auf den beschriebenen Flächen constanter Krümmung alle geodätischen Linien geschlossen sind, so weit sie nicht an eine Singularität stossen. Von der Richtigkeit dieser Vermuthung werden wir uns in der That im II. Theile auf ganz anderem Wege überzeugen.

Wir haben in diesem Paragraphen Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien aufgestellt im Anschluss an die Differentialgleichung $\frac{d^2y}{du^2} = -K \cdot y$, welche periodische Lösungen besitzen musste. Wenn wir nun umgekehrt eine solche Schar haben, so können wir eine zugehörige Differentialgleichung aufstellen, welche dann sicher periodische Lösungen besitzt. Nehmen wir z. B. eine geschlossene Rotationsfläche, so wissen wir, dass die Meridiancurven geschlossene geodätische Linien sind. Bilden wir also die Gleichung $\frac{d^2y}{du^2} = -K(u) \cdot y$, wobei jetzt K die Krümmung der Rotationsfläche längs des Meridians als Function der Bogenlänge u des Meridians bedeuten möge, so hat die angegebene Differentialgleichung sicher eine periodische Lösung.

§ 2.

Allgemeine Methode zur Aufstellung von Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen mit Hülfe einer speciellen Methode zur Aufstellung von gewissen Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien gelangt sind, wollen wir nunmehr eine allgemeine Methode zu entwickeln suchen und zu diesem Zwecke unser Problem analytisch formuliren. Nehmen wir an, wir hätten eine Fläche mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien, so liegt es nahe, die Fläche auf diese Schar und auf eine andere, etwa die orthogonalen Trajectorien zu beziehen. Die Gleichungen der Flächen mögen dann lauten

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v).$$

Sind $v = \text{const.}$ die geodätischen Linien, so müssen x, y, z periodische

Functionen von u mit derselben Periode sein, welches auch der Werth von v sein möge. Wir können also für x, y, z je eine trigonometrische Reihe ansetzen von der Form

$$a_0(v) + a_1(v) \cos u + \cdots + \alpha_1(v) \sin u + \cdots.$$

Bei einem solchen Ansatze haben wir den grossen Vortheil, von vornherein zu wissen, dass die Curven $v = \text{const.}$ geschlossen sind, und brauchen deshalb nur noch dafür Sorge zu tragen, dass dieselben auch geodätische Linien werden. In unserem Ansatze sind dann die allgemeinsten Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien enthalten. Die Bedingung dafür, dass $v = \text{const.}$ geodätische Linien sind, entnehmen wir aus der Differentialgleichung der geodätischen Linien

$$(6) \qquad -f\frac{\partial e}{\partial u} + 2e\frac{\partial f}{\partial u} - e\frac{\partial e}{\partial v} = 0,$$

wobei e, f, g die Gauss'schen Fundamentalgrössen 1. Ordnung bedeuten. Ist speciell die Fläche auf ein orthogonales System bezogen, so geht Gleichung (6) über in

$$(7) \qquad e = U, \qquad f = 0$$

d. h. e muss eine Function U von u allein sein. Die Coefficienten der trigonometrischen Reihen müssen nun als Functionen von v so bestimmt werden, dass die Bedingung (6) oder (7) erfüllt wird. Dieses Problem allgemein durchzuführen stösst auf grosse Schwierigkeiten; haben wir doch unendlich viele Functionen dabei zu bestimmen. Wenn wir aber nur eine endliche Anzahl von Gliedern der trigonometrischen Reihe nehmen, so können wir thatsächlich zur Aufstellung von Flächen der gewünschten Eigenschaft gelangen. Einige Beispiele dieser Art habe ich in meiner Dissertation durchgeführt, worauf ich hier verweise. Da man bei solchen Ansätzen vorzugsweise zu Flächen mit einer Schar ebener geschlossener geodätischer Linien gelangt, so lässt sich vermuthen, dass die Aufstellung derartiger Flächen besonders einfach sein muss.

§ 3.

Ebene geodätische Linien.

Für die Theorie der ebenen geodätischen Linien ist von fundamentaler Bedeutung ein Satz von Joachimsthal, wonach jede ebene geodätische Linie zugleich Krümmungslinie ist. Aus diesem Satze erkennen wir sofort, dass die Kugel die einzige Fläche ist, auf der alle geodätischen Linien eben sind. Sollen nämlich auf einer Fläche sämmtliche geodätischen Linien eben sein, so müssen durch jeden Punkt der Fläche unendlich viele Krümmungslinien hindurchgehen; dies ist nur dann möglich, wenn die Fläche aus lauter Nabelpunkten besteht, und eine solche Fläche ist nur die Kugel. Die nächste Frage ist nun, giebt es ausser der Kugel noch Flächen, auf denen mehrere Scharen geodätischer Linien eben sind? Man sieht sofort, dass dies höchstens zwei Scharen sein können, da sonst durch jeden Punkt der Fläche mindestens drei Krümmungslinien hindurchgingen, also die Fläche wieder aus lauter Nabelpunkten bestände. Um nun zu untersuchen, ob es ausser der Kugel Flächen giebt, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien eben sind, beziehen wir die Fläche auf diese beiden Scharen, welche als Krümmungslinien ein orthogonales System bilden. Das Linienelement nimmt dann die Form an

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

d. h. die Fläche ist abwickelbar und ihre Krümmungslinien bilden ein Isothermensystem. Die einzige Fläche, welche dieses leistet, ist der Cylinder. Nun giebt es aber Flächen 2. Grades, nämlich das hyperbolische Paraboloïd und das einschalige Hyperboloïd, auf denen zwei Scharen von geraden Linien verlaufen, auf denen es also auch zwei Scharen von ebenen geodätischen Linien giebt. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich daraus, dass der Satz von Joachimsthal für gerade Linien nicht gilt. Sind doch auf einer Regelfläche die erzeugenden Geraden durchaus nicht Krümmungslinien, dies ist nur dann der Fall, wenn die Fläche abwickelbar ist. Schliessen wir die geraden Linien aus, so haben wir auf dem Cylinder nur noch eine Schar von ebenen geodätischen Linien, so dass wir den Satz aussprechen können: *Die Kugel ist die einzige Fläche, auf der es mehr als eine Schar von ebenen geodätischen Linien giebt, falls man die geraden Linien ausschliesst.* Wir sind hiernach dazu geführt, die Flächen mit einer Schar ebener geodätischer Linien zu untersuchen, und wollen am Schluss dieser Betrachtung zusehen, wann diese ebenen geodätischen Linien geschlossen sind. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Fläche auf das System der ebenen geodätischen Curven und ihre orthogonalen Trajectorien bezogen. Sind $v = \text{const.}$ die ebenen geodätischen Linien, so lässt sich das Linienelement in die Form bringen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + g\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Da die Curven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ Krümmungslinien sind, so muss die Gauss'sche Fundamentalgrösse 2. Ordnung F verschwinden. Durch die drei Gleichungen $e = 1$, $f = 0$, $F = 0$ ist dann unser krummliniges Coordinatensystem auf der Fläche vollständig charakterisirt. Führen wir dieselben in die Formeln von Mainardi-Codazzi (Vergl. Bianchi-Lukat, Differentialgeometrie pag. 91) ein, so ergiebt sich, dass E nur von u

abhängig sein darf. Weil nun E mit dem Krümmungsradius r_2 der Curven $v = \text{const.}$ durch die Relation $E = -\frac{e}{r_2}$ verbunden ist, so ergiebt sich, dass auch r_2 nur von u abhängig ist, mit anderen Worten: die Krümmung der ebenen geodätischen Linien $v = \text{const.}$ ist in allen Punkten, welche auf derselben orthogonalen Trajectorie liegen, die gleiche. Betrachten wir ferner zwei beliebige orthogonale Trajectorien der Curven $v = \text{const.}$, so haben die Bogen der geodätischen Linien, welche hierdurch ausgeschnitten werden, sämmtlich die gleiche Länge. Daraus folgt, dass eine Schar von ebenen geodätischen Curven aus lauter congruenten Curven besteht.

Wie erhalten wir nun die Gesammtheit der Flächen mit einer Schar ebener geodätischer Linien? Wir bemerken hierzu, dass die orthogonalen Trajectorien dieser geodätischen Linien zugleich die Ebenen, in denen die geodätischen Linien liegen, senkrecht durchsetzen. Sie stehen nämlich senkrecht einerseits zu den Tangenten der ebenen geodätischen Linien, andererseits zu deren Hauptnormalen, welche mit den Flächennormalen zusammenfallen, d. h. also zu zwei Richtungen in den Ebenen der geodätischen Linien. Demgemäss erhalten wir die allgemeinste Fläche mit einer Schar ebener geodätischer Linien in folgender Weise: Wir nehmen eine beliebige einfach unendliche Schar von Ebenen und in einer derselben eine beliebige Curve. Die orthogonalen Trajectorien dieser Ebenen, welche durch die beliebige Curve gehen, erzeugen dann die allgemeinste Fläche mit einer Schar von ebenen geodätischen Linien. Diese Flächen wurden zuerst von Monge auf anderem Wege abgeleitet und führen in der Litteratur den Namen Kanalflächen. Da nun die Curve, welche wir in einer der Ebenen annahmen, vollständig beliebig ist, so können wir dafür auch eine geschlossene Curve nehmen und erhalten somit eine grosse Mannigfaltigkeit von Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien. Besonders interessant ist der Fall, wo wir für die beliebige Curve einen Kreis nehmen; wir erhalten nämlich dann die Röhrenflächen, auf denen bekanntlich eine Schar der geodätischen Linien aus Kreisen besteht. Nachdem wir so gesehen, dass die Aufstellung von Flächen mit einer Schar ebener geschlossener geodätischer Linien keinerlei Schwierigkeiten bietet, müssen wir in der Folge unser Augenmerk darauf richten, solche Flächen zu bekommen, auf denen es eine Schar von nicht ebenen geschlossenen geodätischen Linien giebt. Derartige Flächen werden wir in gewissen Schrauben- und Rotationsflächen bekommen.

§ 4.

Schraubenflächen.

Ueber den Verlauf der geodätischen Linien auf den Schraubenflächen erhält man eine anschauliche Vorstellung, wenn man den Satz von Bour berücksichtigt, wonach jede Schraubenfläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist. Da man die Schraubenfläche unendlich oft um die Rotationsfläche herumwickeln muss, bis sie mit derselben vollständig zusammenfällt, so laufen im allgemeinen sämmtliche geodätischen Linien einer Schraubenfläche in's Unendliche oder stossen an einen Rand. Nur dann wird eine geodätische Linie in sich zurückkehren können, wenn sie die Fläche umwindet, was natürlich nur dann möglich ist, wenn das Meridianprofil selbst geschlossen ist. Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass auf den Schraubenflächen mit einem geschlossenen Meridianprofil, das wir natürlich frei von jeglichen Singularitäten annehmen, stets eine und somit eine ganze Schar geschlossener geodätischer Linien existirt. Es scheint dies plausibel, wenn man die Definition der geodätischen Linie benutzt, wonach ein auf die Fläche gespannter Faden die Gestalt einer geodätischen Linie annimmt. Legt man nämlich einen geschlossenen Gummifaden so um die Fläche, dass er dieselbe einmal umwindet, so wird derselbe sich selbst auf die Fläche aufspannen und die Lage einer geschlossenen geodätischen Linie annehmen.

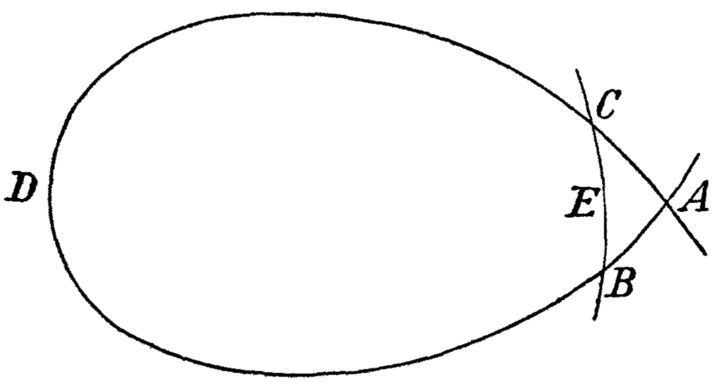

Fig. 1.

Einen exakten Nachweis des erwähnten Satzes kann man etwa in folgender Weise führen: Betrachten wir die Gesammtheit der Curven, welche von einem Punkte A der Fläche ausgehen, die Fläche einmal umwinden und wieder zum Punkte A zurückkehren, so wird es unter diesen nach den Principien der Variationsrechnung eine kürzeste geben, die wir mit k bezeichnen wollen, und diese kürzeste ist eine überall reguläre geodätische Linie. Nur für den Punkt A selbst ist die Regularität von k zunächst noch zweifelhaft. Um uns zu überzeugen, dass auch in A die Curve k keine Ecke haben kann, nehmen wir in der Nachbarschaft von A auf k zwei Punkte an (Vergl. Fig. 1), B und C. Hätte nun k in A eine Ecke, so wäre das Curvenstück BAC sicher nicht die kürzeste Verbindung der Punkte B und C, sondern dies wäre eine andere Curve etwa BEC. Ersetzen wir nun das Stück BAC durch

BEC, so erhalten wir eine neue Curve, $BECDB$, welche kürzer ist als k, und indem wir diese neue Curve eine geeignete Schraubung ausführen lassen, können wir erreichen, dass dieselbe durch den Punkt A geht. Wir hätten also durch A eine Curve, welche kürzer ist als k, was ein Widerspruch ist. Damit ist die Existenz einer geschlossenen geodätischen Linie nachgewiesen, und aus dieser einen erhält man eine ganze Schar, indem man die Fläche in sich verschiebt. Von Wichtigkeit ist noch der Umstand, dass die Curven einer solchen Schar sich nicht gegenseitig schneiden. Um uns hiervon zu überzeugen, nehmen wir einmal an, zwei der geschlossenen geodätischen Linien schnitten sich, dann müssen sich dieselben in mindestens zwei Punkten schneiden. Halten wir nun eine der beiden Curven fest, während wir die andere eine Schraubung ausführen lassen, wobei sie stets geodätische Linie auf der Fläche bleibt, so können wir es erreichen, dass sich die beiden Curven nicht mehr schneiden. Dazwischen müsste es also eine Lage geben, wo sich die beiden geschlossenen Curven berühren. Dies ist jedoch unmöglich, da es durch einen Punkt in einer Richtung nur eine geodätische Linie giebt.

Aus der eben angestellten Ueberlegung geht zugleich hervor, dass es ausser einer Schar geschlossener geodätischer Linien keine weiteren geschlossenen geodätischen Curven auf einer Schraubenfläche geben kann. Demnach können wir zusammenfassend sagen: *Auf jeder regulären Schraubenfläche mit geschlossenem Meridianprofil giebt es eine und nur eine Schar geschlossener geodätischer Linien.*

Ist nun eine Schraubenfläche mit geschlossenem Meridianprofil vorgegeben, so erübrigt noch die Aufgabe, auf dieser die geschlossenen geodätischen Linien analytisch zu bestimmen. Bezüglich dieses Problems verweise ich auf meine Dissertation pg. 19.

§ 5.

Rotationsflächen.

Einen speciellen Fall der Schraubenflächen bilden die Rotationsflächen, bei denen der Parameter der Schraubung $h = 0$ ist. Wir wollen jetzt zusehen, ob und wann es auf einer Rotationsfläche eine Schar geschlossener geodätischer Linien giebt. Der Verlauf der geodätischen Linien auf den Rotationsflächen ist eingehend studirt worden; man findet Ausführliches darüber bei Darboux, t. III, pg. 4; Bianchi pg. 173. Ist

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = f(r)$$

die Gleichung der Rotationsfläche, so ergiebt die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linien

$$\varphi = \int \sqrt{\frac{a^2(1+f'(r)^2)}{r^2(r^2-a^2)}}\, dr + b.$$

Aus der Integrationsconstanten b ersieht man, dass man aus einer geodätischen Linie eine ganze Schar erhält, indem man diese eine rotiren lässt. Setzt man

$$\frac{du}{dr} = \sqrt{1+f'(r)^2},$$

wodurch die Bogenlänge u des Meridians eingeführt wird, so bekommt man

$$(8) \qquad \varphi = \int \frac{a\, du}{\pm r\sqrt{r^2-a^2}}.$$

Betrachten wir nun Rotationsflächen, welche einen Maximalparallelkreis besitzen, so verlaufen auf diesen die geodätischen Linien innerhalb eines Streifens, der von zwei Breitenkreisen mit demselben Radius begrenzt wird, und zwar verläuft die geodätische Linie so, dass sie abwechselnd die beiden Breitenkreise berührt und sich im allgemeinen unendlich oft um die Fläche herumwindet. Hier zeigt sich nun ein charakteristischer Unterschied zwischen einer geschlossenen und einer nicht geschlossenen geodätischen Linie. Eine nicht geschlossene geodätische Linie füllt gleichsam den ganzen Bereich, innerhalb dessen sie verläuft, aus, indem man mit ihr jedem Punkte dieses Bereiches beliebig nahe kommen kann. Bei einer geschlossenen geodätischen Linie ist dies nicht der Fall. Dieselbe Bemerkung gilt übrigens für alle Liouville'schen Flächen, deren Linienelement sich in die Form bringen lässt

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (U-V)\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right).$$

Der Bereich der geodätischen Linien wird hier von zwei Curven $u=$ const., $v=$ const. begrenzt. Betrachten wir nun eine geodätische Linie, welche zwischen zwei Breitenkreisen oscillirt. Wenn ein Punkt, der diese geodätische Linie durchläuft, von einem der beiden Breitenkreise etwa dem oberen ausgeht und bis zum unteren Breitenkreise gelangt, so dreht sich hierbei die Meridianebene, welche den Punkt enthält, um einen bestimmten Winkel Φ. Läuft der Punkt dann auf der geodätischen Curve weiter und zwar jetzt vom unteren bis zum oberen Breitenkreise, so dreht sich die zugehörige Meridianebene wieder um denselben Winkel Φ, wie man aus Symmetriegründen erkennt. Soll nun die geodätische Linie geschlossen sein, so ist dafür nothwendig und hinreichend, dass Φ zu π in einem rationalen Verhältniss steht. Greifen wir nun irgend einen Meridianbogen heraus, so giebt es durch jeden Punkt dieses Meridians eine geodätische Linie, welche denselben rechtwinklig schneidet, also den zugehörigen Breitenkreis berührt. Jede dieser geodätischen Linien ist der Repräsentant einer ganzen Schar, die man durch Rotation erhält. Ferner ist für jede dieser geodätischen Linien ein bestimmter Winkel Φ charakteristisch. Durchwandern wir den herausgegriffenen Meridianbogen, so wird sich hierbei Φ im allgemeinen stetig ändern. Es kommt also unendlich oft vor, dass Φ zu π in einem rationalen Verhältniss steht. Demnach können wir sagen: *Auf jeder Rotationsfläche, welche einen Maximalbreitenkreis besitzt, giebt es im allgemeinen unendlich viele Scharen geschlossener geodätischer Linien und zwar bilden diese Scharen in gewissem Sinne eine überall dichte Menge.* Dieser Satz kann nur dann eine Ausnahme erleiden, wenn der Winkel Φ stets derselbe bleibt. In diesem Falle giebt es entweder überhaupt keine geschlossenen geodätischen Linien oder aber alle sind geschlossen. Wir werden uns hiermit im II. Theile eingehend beschäftigen. An dieser Stelle können wir jedenfalls schon folgendes sagen: Wenn man weiss, dass auf einer Rotationsfläche überhaupt eine geschlossene geodätische Linie existirt (abgesehen natürlich von dem Maximalparallelkreise), so giebt es auf dieser stets unendlich viele Scharen derartiger Curven.

Nachdem wir uns so von der grossen Mannigfaltigkeit der geschlossenen geodätischen Linien auf den Rotationsflächen überzeugt haben, ist es wiederum wünschenswerth, solche Curven analytisch aufzustellen, welche geschlossene geodätische Linien auf einer Rotationsfläche sind. Hinsichtlich dieses Problems verweise ich auf meine Dissertation pg. 24.

II. Theil.

Flächen, auf denen alle geodätischen Linien geschlossen sind.

§ 6.

Allgemeine Methode zur Aufstellung solcher Flächen.

Im zweiten Theile wollen wir solche Flächen aufzustellen suchen, auf denen alle geodätischen Linien geschlossen sind, und zwar bietet hier ein besonders grosses Interesse die Frage, giebt es ausser der Kugel singularitätenfreie Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien?

Eine allgemeine Methode, wie man versuchen kann, sich Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien zu verschaffen, ist folgende: Es sei eine geschlossene Fläche S gegeben, auf der eine zweifach unendliche Schar geschlossener im übrigen aber beliebiger Curven bekannt ist. Gelingt es uns nun, eine andere im Endlichen gelegene Fläche F, bei der wir auch einen Rand zulassen, zu ermitteln, welche so auf die Fläche S abgebildet werden kann, dass den geodätischen Linien auf F die geschlossenen Curven auf S entsprechen, so werden auf F sämmtliche geodätischen

Linien, die nicht an einen Rand stossen, ebenfalls geschlossen sein, vorausgesetzt, dass die Abbildung nicht unendlich vieldeutig ist. Das einfachste Beispiel einer Fläche S ist die Kugel, auf der ja die grössten Kreise eine zweifache Schar geschlossener Curven bilden. Nach dem Satze von Beltrami sind nun die Flächen constanten Gauss'schen Krümmungsmasses die einzigen, die so auf die Kugel abgebildet werden können, dass den geodätischen Linien die grössten Kreise entsprechen. Haben wir eine Fläche F constanter positiver Krümmung, so wird eine derartige Abbildung auf die Kugel durch Abwickelung bewerkstelligt. Wann ist nun diese Abbildung nicht unendlich vieldeutig? Wir nehmen an, es sei auf F bereits eine geschlossene geodätische Linie von der Länge L vorhanden, die bei der Abwickelung mit dem Aequator der Kugel zusammenfallen möge. Man erkennt sofort, dass die Abbildung dann eine nicht unendlich vieldeutige ist, wenn die Länge L zu der Länge des Aequators in einem rationalen Verhältniss steht. Giebt es also auf einer Fläche constanter positiver Krümmung $\frac{1}{a^2}$ eine einzige geschlossene geodätische Linie von der Länge $L = \frac{2h\pi a}{k}$, wobei h und k ganze rationale Zahlen bedeuten sollen, so sind sämmtliche geodätischen Curven geschlossen, welche nicht an einen Rand treffen. Da wir die Bedingung $L = \frac{2h\pi a}{k}$ (s. Gleichung (5) in § 1) auch als nothwendig erkannt haben, so bilden die Flächen, die man erhält, indem man durch einen geschlossenen geodätischen Streifen von der Länge $\frac{2h\pi a}{k}$ eine Fläche von der constanten Krümmung $\frac{1}{a^2}$ legt, auch die Gesammtheit der Flächen constanter Krümmung mit lauter geschlossenen geodätischen Linien. Als einfaches Beispiel führen wir die Rotationsflächen constanter positiver Krümmung vom spindelförmigen Typus an. Erfüllt der Aequator die Bedingung $L = \frac{2h\pi a}{k}$, so sind auf ihr alle geodätischen Linien geschlossen mit Ausnahme des Meridians, der zwei Ecken besitzt.

§ 7.

Singularitätenfreie Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen Flächen mit Rand aufgestellt haben, auf denen alle geodätischen Curven geschlossen sind, welche nicht auf einen Rand stossen, wollen wir nunmehr untersuchen, ob es singularitätenfreie Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien giebt, und hinsichtlich dieser Frage die Rotationsflächen einer eingehenden Betrachtung unterziehen, da sich auf diesen der Verlauf der geodätischen

Linien am leichtesten überblicken lässt. Von vornherein können wir mit Rücksicht auf die Ergebnisse von § 1 sagen: Sollen auf einer singularitätenfreien Rotationsfläche alle geodätischen Linien geschlossen sein, so darf dieselbe keinen Kehlkreis (Minimalparallelkreis) besitzen; die Meridiancurve hat also ein und nur ein Maximum gegen die Rotationsaxe.

Wenn nun auch auf unseren Rotationsflächen kein Kehlkreis vorkommen kann, so ist damit doch durchaus nicht gesagt, dass die Fläche nur positiv gekrümmt ist, vielmehr können in Folge des Auftretens von Wendepunkten bei der Meridiancurve auch negativ gekrümmte Flächentheile vorkommen. Die Rotationsflächen, die wir untersuchen wollen, haben also etwa die in Figur 2 gezeichneten Gestalten, wobei wesentlich ist, dass zu einem Werthe von r nur zwei Werthe z gehören.

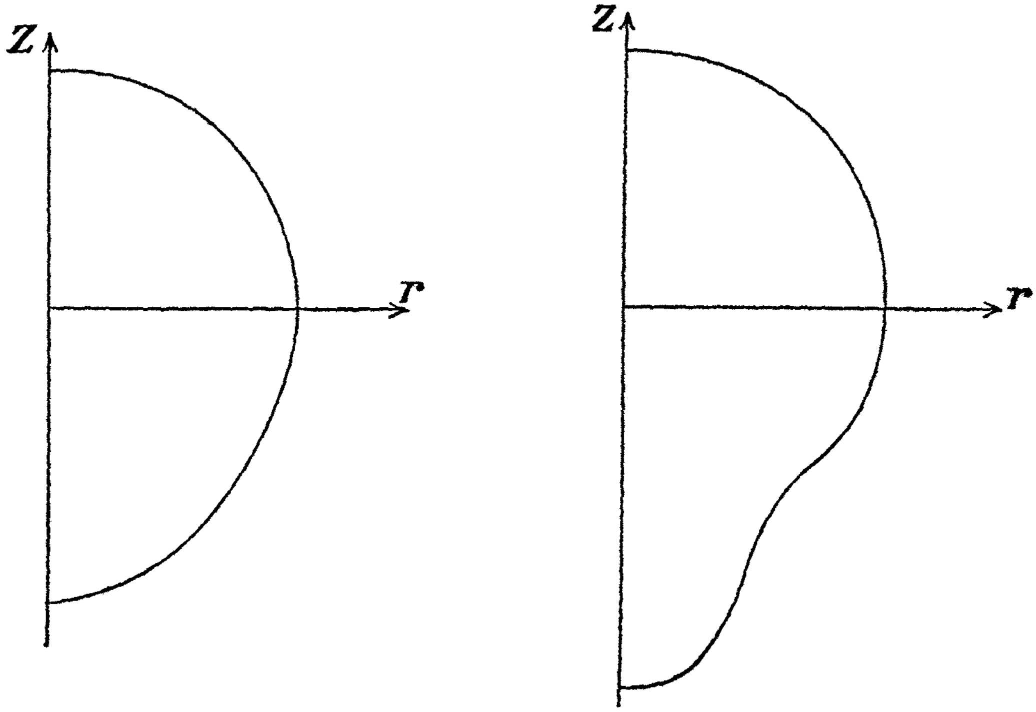

Fig. 2.

Um nun zu untersuchen, wann auf einer solchen Rotationsfläche alle geodätischen Linien geschlossen sind, führen wir die Entwickelungen von § 5 weiter. Als Meridiancurve nehmen wir ein Curvenstück, das ein Maximum M gegen die Rotationsaxe besitzen möge. Erst später werden wir die Bedingung einführen, dass die Meridiancurve mit ihren beiden Enden die Rotationsaxe senkrecht treffen soll, und schliessen uns zunächst an die eleganten Untersuchungen von Darboux an (Vergl. Darboux, Leçons Bd. 3, pg. 5), die wir hier kurz skizziren wollen.

In § 5 haben wir jeder geodätischen Linie einen bestimmten Winkel Φ zugeordnet, der im allgemeinen stetig veränderlich ist. Hier interessirt uns nun gerade der Fall, wo Φ für sämmtliche geodätischen Linien einen und denselben Werth hat. Zerlegt man die Meridiancurve (Vergl. Figur 3) in zwei Theile, einen oberen MP oberhalb des Maximums M mit der Gleichung $z = f(r)$ und einen unteren mit der Gleichung $z = g(r)$, so lässt sich der Winkel Φ mit Hülfe der integrirten Differentialgleichung der geodätischen Linien berechnen und zwar erhält man

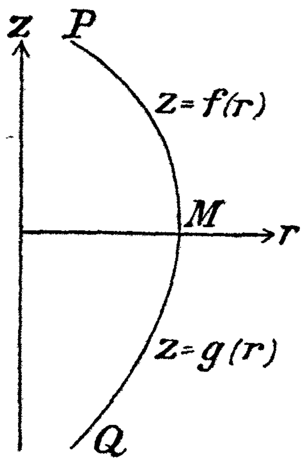

Fig. 3.

$$\Phi = \int_a^R \frac{a\left[\sqrt{1+f'(r)^2} + \sqrt{1+g'(r)^2}\right] dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}}. \tag{9}$$

wo R der Radius des Maximalparallelkreises, a der Radius der beiden Breitenkreise ist, welche von der geodätischen Linie berührt werden. Soll nun Φ für alle geodätischen Linien denselben Werth haben, so muss Φ von a unabhängig sein; es muss also eine Gleichung bestehen von der Form

$$\Phi = \text{const.} = m\pi. \tag{10}$$

Sollen im besonderen sämmtliche geodätischen Curven geschlossen sein, so muss sich für m eine rationale Zahl ergeben. Das Problem ist also darauf zurückgeführt, $f(r)$ und $g(r)$ so zu bestimmen, dass der Ausdruck (9) von a unabhängig wird.

Die Durchführung der Rechnung liefert die Darboux'sche Bedingungsgleichung

$$\sqrt{1+f'(r)^2} + \sqrt{1+g'(r)^2} = \frac{2mR}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \tag{11}$$

Im Anschluss an diese Gleichung hat Tannery eine interessante Fläche aufgestellt, auf der mit Ausnahme des Meridians alle geodätischen Linien nicht nur geschlossen, sondern auch algebraisch sind. Die Tannery'sche Fläche hat eine birnenförmige Gestalt und besitzt eine singuläre Stelle, nämlich einen Knotenpunkt; ein Modell derselben ist im Brill'schen Verlage erschienen.

Wir wenden uns nunmehr zur Entscheidung der Frage: Giebt es singularitätenfreie Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien? In diesem Falle muss die Meridiancurve mit ihren beiden Enden senkrecht auf die Rotationsaxe treffen, was sich analytisch ausdrückt durch $f'(0) = 0$ und $g'(0) = 0$. Die Gleichung (11) liefert dann $m = 1$. Dies besagt geometrisch: *Auf den singularitätenfreien Rotationsflächen, auf denen alle geodätischen Linien geschlossen sind, umwinden diese geodätischen Linien die Fläche nur einmal, besitzen also keine Doppelpunkte.* Greifen wir eine dieser geschlossenen geodätischen Curven heraus, so müssen wir dieselbe gerade einmal durchlaufen, bis sich die unendlich benachbarten geodätischen Linien schliessen. Daraus folgt, dass *auf den singularitätenfreien Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien diese wirklich alle die gleiche Länge besitzen.* Führen wir $m = 1$ in die Gleichung (11) ein, so ergiebt sich

$$(12)\qquad \sqrt{1+f'(r)^2} + \sqrt{1+g'(r)^2} = \frac{2R}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

Wir haben im Anfange dieses Paragraphen darauf aufmerksam gemacht, dass die Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien eventuell auch negativ gekrümmte Flächentheile aufweisen; da es uns jedoch zunächst nicht darauf ankommt, alle möglichen Fälle zu discutiren, so wollen wir uns vorläufig auf die Untersuchung der Rotationsflächen mit überall positiver Krümmung beschränken. Diese Flächen entstehen durch Rotation einer gegen die Axe concaven Meridiancurve; der obere Meridianbogen $f(r)$ hat demnach eine überall negative, der untere eine überall positive Tangente; ferner sind Wendepunkte bei beiden Curvenstücken ausgeschlossen. Soll nun die Fläche singularitätenfrei sein, so müssen sich $f(r)$ und $g(r)$ im Intervalle $0 \leqq r \leqq R$ als eindeutige mit ihren ersten Ableitungen stetige Functionen ergeben und ausserdem müssen die Gleichungen bestehen

$$f'(0) = 0,\ g'(0) = 0;\ f'(R) = \infty,\ g'(R) = \infty.$$

Wenn wir nun $f(r)$ diesen Bedingungen gemäss wählen, so können wir $g(r)$ aus Gleichung (12) berechnen und es bleibt zu untersuchen, ob dann $g(r)$ ebenfalls die erwähnten Bedingungen erfüllt. Aus (12) finden wir zunächst

$$(13)\qquad g'(r) = +\sqrt{\frac{4R^2}{R^2-r^2} - \frac{4R\sqrt{1+f'(r)^2}}{\sqrt{R^2-r^2}} + f'(r)^2}.$$

Bei der grossen Wurzel müssen wir das positive Zeichen nehmen, weil ja der untere Meridianbogen eine überall positive Tangente besitzen soll. Bei dieser Gelegenheit bemerken wir ausdrücklich, dass wir den Sinn einer Wurzel stets durch das Vorzeichen ausdrücken. Da wir $f(r)$ als eine im Intervalle $0 \leqq r \leqq R$ eindeutige Function angenommen haben, so ist auch $g(r)$ in demselben Intervalle eindeutig definirt und zwar ergiebt sich $g(r)$ aus (13) durch Quadratur; die additive Constante bei der Integration ist so zu bestimmen, dass $g(r)$ durch den Punkt $r = R$ der r-Axe hindurchgeht. Aus Gleichung (13) ersehen wir sofort, dass $g'(0) = 0$ wird, da wir $f'(0) = 0$ angenommen haben. Dahingegen ist es schwieriger, aus Gleichung (13) zu erkennen, ob auch die übrigen für $g(r)$ angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Ausserdem ist noch darauf aufmerksam zu machen, dass $g'(r)$ sicher nicht für jedes beliebige $f(r)$ reell ist; es fragt sich daher, ob sich überhaupt eine solche Function $f(r)$ finden lässt, dass $g'(r)$ für alle Werthe $0 \leqq r \leqq R$ reell wird. Um alle Zweifel zu lösen, wenden wir eine symmetrische Behandlungsweise an, indem wir zunächst noch beide Functionen $f(r)$ und $g(r)$ verfügbar halten, und zwar wollen wir setzen

$$(14)\qquad \begin{aligned} \sqrt{1+f'(r)^2} &= \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} + \varphi(r), \\ \sqrt{1+g'(r)^2} &= \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} - \varphi(r). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen, in denen $\varphi(r)$ zunächst völlig beliebig ist, stimmen im wesentlichen mit (12) überein. Man erkennt aus ihnen, dass $|f(r)|$ und $|g(r)|$ nur dann identisch gleich sein können, wenn $\varphi(r) = 0$ genommen wird. In diesem Falle liefert die Integration der Gleichungen (14) als einzige Fläche die Kugel.

Daraus folgt: *Die Kugel ist die einzige singularitätenfreie Rotationsfläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, für welche der Aequator* (Maximalkreis) *eine Symmetrieebene ist.*

Wir wollen nun zusehen, ob wir $f(r)$, $g(r)$, $\varphi(r)$ so wählen können, dass alle die besprochenen Bedingungen erfüllt sind. Soll zunächst $f'(0) = 0$ und $g'(0) = 0$ sein, so muss $\varphi(r)$ für $r = 0$ verschwinden. Wir nehmen der Einfachheit halber $R = 1$ und entwickeln $\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$ in eine Potenzreihe, die für $0 \leqq r < 1$ convergirt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} = 1 + \frac{1}{2} r^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} r^4 + \cdots.$$

Damit nun $f'(r)$ und $g'(r)$ reell werden, muss

$$\sqrt{1+f'(r)^2} > 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{1+g'(r)^2} > 1$$

sein. Wir erkennen sofort, dass wir dies erreichen, falls wir $\varphi(r)$ absolut genommen kleiner wählen als

$$\frac{1}{2} r^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} r^4 + \cdots.$$

Nehmen wir etwa $\varphi(r) = \frac{1}{2} r^2$, so lauten die Gleichungen (14)

$$(15)\qquad \begin{aligned} \sqrt{1+f'(r)^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{2} r^2, \\ \sqrt{1+g'(r)^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{1}{2} r^2. \end{aligned}$$

Hiermit haben wir ein Beispiel gewonnen, für das weder $f(r)$ noch $g(r)$ Wendepunkte haben. Betrachten wir nämlich z. B.

$$\sqrt{1+g'(r)^2} = \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4} r^4 + \cdots,$$

so sehen wir, dass dieser Ausdruck mit wachsendem r stets wächst. Also nimmt auch $g'(r)^2$ mit wachsendem r stets zu. Die Curve $g(r)$ hat also keine Wendepunkte und da dasselbe für $f(r)$ gilt, so erhalten wir eine Meridiancurve, die gegen die z-Axe überall concav gekrümmt ist. Schliesslich erkennen wir aus den Gleichungen (15) auch sofort, dass bei diesem Beispiele $f'(1) = \infty$ und $g'(1) = \infty$ wird, d. h. beide Curven treffen senkrecht auf die r-Axe auf. Aus (15) ergiebt sich

$$f = -\int \sqrt{\frac{1}{1-r^2} + \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{4} r^4 - 1}\, dr,$$

$$g = \int \sqrt{\frac{1}{1-r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{4} r^4 - 1}\, dr.$$

Statt $\varphi(r) = \frac{1}{2} r^2$ können wir auch nehmen $\varphi(r) = c \cdot r^2$ und es gelten dann genau die Betrachtungen, die wir eben angestellt haben falls $c \leqq \frac{1}{2}$ ist. Da wir c beliebig klein wählen können, so folgt: *Die Kugel lässt sich in stetiger Weise so deformiren* (variiren), *dass alle geodätischen Linien geschlossen bleiben.*

Mit dem Beispiele

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} \sqrt{1+f'(r)^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + cr^2, \\ \sqrt{1+g'(r)^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - cr^2, \end{aligned}$$

wobei $c \leqq \frac{1}{2}$ sein muss, haben wir eine Meridiancurve aufgestellt, welche durch Rotation eine Fläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien liefert. Da die Meridiancurve eine überall stetige Tangente besitzt, so ist diese Fläche singularitätenfrei; aber es bleibt jetzt noch zu untersuchen, ob die Fläche auch analytisch ist. Hierzu ist zu bemerken, dass die beiden Curvenstücke $f(r)$ und $g(r)$ im Intervalle $0 \leqq r < 1$ analytisch sind. Ferner erkennt man sofort, dass die Rotationsfläche an den Polen analytisch ist, da $f(r)$ und $g(r)$ nur von r^2 abhängen. Die einzige Stelle, welche einer besonderen Untersuchung bedarf, ist daher nur der Punkt $z = 0$, $r = 1$. Um zu zeigen, dass auch in diesem Punkte die beiden Curvenstücke sich analytisch verhalten und dass sie analytische Fortsetzungen von einander sind, suchen wir r als Function von z in eine Potenzreihe zu entwickeln. Aus der ersten Gleichung (16) ergiebt sich

$$\frac{dz}{dr} = f'(r) = -\sqrt{\frac{1}{1-r^2} + c^2 r^4 + \frac{2cr^2}{\sqrt{1-r^2}} - 1}\,,$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-r^2} + c^2 r^4 + \frac{2cr^2}{\sqrt{1-r^2}} - 1}}.$$

Machen wir hierin die Substitution $s = \sqrt{1-r^2}$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dz} &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s^2} + c^2(1-s^2)^2 - 1 + \frac{2c(1-s^2)}{s}}}\\ &= -\frac{1}{\frac{1}{s}\sqrt{1 + c^2 s^2(1-s^2)^2 - s^2 - 2cs(1-s^2)}}\\ &= -s(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots).\end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{ds}{dz} \equiv \frac{d\sqrt{1-r^2}}{dz} = -\frac{r}{s}\frac{dr}{dz}$$

also

$$\frac{ds}{dz} = r(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots) = \sqrt{1-s^2}\,(1 + a_1 s + \cdots) = \mathfrak{P}(s).$$

Nach dem Cauchy'schen Existenztheorem giebt es nun von dieser Differentialgleichung eine einzige Lösung $s = \mathfrak{P}_1(z)$, welche für $z = 0$ verschwindet. Aus dieser Lösung $s = \sqrt{1-r^2} = \mathfrak{P}_1(z)$ ergiebt sich

$$r = \sqrt{1 - (\mathfrak{P}_1(z))^2} = \mathfrak{P}_2(z).$$

Eine analoge Entwickelung können wir nun auch für die zweite Gleichung (16) machen. Jetzt ist zunächst

$$\frac{dr}{dz} = +\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-r^2} + c^2 r^4 - \frac{2cr^2}{\sqrt{1-r^2}} - 1}}.$$

Machen wir jetzt die Substitution $s_1 = -\sqrt{1-r^2}$, so ergiebt sich

$$\frac{dr}{dz} = s_1(1 + a_1 s_1 + a_2 {s_1}^2 + \cdots)$$

und da jetzt $\frac{ds_1}{dz} = +\frac{r}{s_1}\frac{dr}{dz}$,

$$\frac{ds_1}{dz} = r\,(1 + a_1 s_1 + a_2 {s_1}^2 + \cdots).$$

Mit Hülfe derselben Ueberlegung, wie wir sie vorhin angestellt haben, erhalten wir demnach

$$s_1 = \mathfrak{P}_1(z),$$

wobei $\mathfrak{P}_1(z)$ dieselbe Potenzreihe ist, die wir vorhin für s erhalten hatten. Aus $s_1 = -\sqrt{1-r^2} = \mathfrak{P}_1(z)$ ergiebt sich wieder

$$r = \sqrt{1-(\mathfrak{P}_1(z))^2} = \mathfrak{P}_2(z).$$

Wir haben also für die beiden Curvenstücke dieselbe Potenzreihenentwickelung bekommen und damit gezeigt, dass sie analytische Fortsetzungen von einander sind. *Demgemäss liefert unser Beispiel* (16) *eine singularitätenfreie überall analytische Fläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.*

Die durch die Gleichungen (16) definirten Meridiancurven sind sämmtlich gegen die z Axe concav gekrümmt, da $c \leqq \frac{1}{2}$ sein muss, so dass also die zugehörigen Rotationsflächen überall convex sind. Es ist interessant zu bemerken, dass es auch singularitätenfreie Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien giebt, welche negativ gekrümmte Flächentheile aufweisen. In diesem Falle muss die Meridiancurve Wendepunkte besitzen. Ein einfaches Beispiel dieser Art ist

$$\sqrt{1+f'(r)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{3}{2} r^4,$$

$$\sqrt{1+g'(r)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{3}{2} r^4.$$

Bei diesem Beispiele besitzt das obere Curvenstück $f(r)$ keinen, das untere $g(r)$ zwei Wendepunkte, welche annähernd bei $r = \frac{1}{2}$ und $r = \frac{3}{4}$ liegen. Die Meridiancurve hat daher die in der zweiten Figur 2 gezeichnete Form und liefert eine singularitätenfreie Fläche von birnenförmiger Gestalt. Bei der Durchführung der Entwickelungen dieses Paragraphen erfreute ich mich der Anregung und des Rathes von Herrn Professor Hilbert.

§ 8.

Eigenschaften von singularitätenfreien Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.

Wir sind im vorigen Paragraphen zu dem merkwürdigen Resultat gelangt, dass es auch ausser der Kugel noch singularitätenfreie Flächen giebt, auf denen sämmtliche geodätischen Linien geschlossen sind, und zwar haben wir Rotationsflächen von dieser Eigenschaft aufgestellt. Insofern man die Erde als Kugel betrachten kann, laufen auf ihr alle kürzesten Linien in sich zurück; wenn man also von einem Punkte der Erde aus in einer bestimmten Richtung auf dem kürzesten Wege wandert, so gelangt man schliesslich wieder mit derselben Richtung an die Ausgangsstelle zurück. Diese Eigenschaft wird in den Lehrbüchern der Geographie gewöhnlich als eine charakteristische Eigenschaft der Erde bezeichnet. Wir sehen jedoch hier, dass dies durchaus nicht der Fall ist; vielmehr giebt es noch unzählig viele andere Flächen, welche in dieser Hinsicht die Erde vertreten könnten. Ausser den Rotationsflächen existiren nun wahrscheinlich noch andere singularitätenfreie Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, die allerdings nur schwer analytisch aufzustellen sein dürften. Unter ihnen interessiren uns besonders diejenigen singularitätenfreien Flächen, die überall positiv gekrümmt sind und auf denen die geschlossenen geodätischen Curven keine Doppelpunkte besitzen. Diese überall convexen Flächen mit der Totalkrümmung 4π wollen wir als G-Flächen bezeichnen und wollen nunmehr die Eigenschaften derselben studiren. Die Resultate, die wir bekommen werden, gelten sicher für die Rotations-G-Flächen. Greifen wir eine der geschlossenen geodätischen Linien heraus, so müssen wir dieselbe gerade einmal durchlaufen, bis sich die unendlich benachbarten geodätischen Curven schliessen, weil ja nach unserer Annahme Doppelpunkte nicht vorkommen sollen. Daraus folgt: *Auf den G-Flächen besitzen wirklich alle geodätischen Linien die gleiche Länge.* Aus der Annahme, dass keine Doppelpunkte vorhanden sein sollen, ergiebt sich ferner, dass jede der geschlossenen geodätischen Curven auf der G-Fläche einen singularitätenfreien Bereich begrenzt. Nehmen wir auf einer der geschlossenen geodätischen Linien drei beliebige Punkte an, so können wir die Curve als ein geodätisches Dreieck auffassen. Nach dem berühmten Satze von Gauss über die curvatura integra ergiebt sich dann die Totalkrümmung des eingeschlossenen Bereiches gleich 2π. Bilden wir also unsere G-Fläche auf die Gauss'sche Kugel ab, wobei einem Punkte der Fläche ein und nur ein Punkt der Kugel entspricht, so geht jede der geschlossenen geodätischen Linien in eine geschlossene Curve auf der Kugel über, welche die Kugel in zwei inhaltsgleiche Theile theilt. Da die G-Fläche überall convex ist, so giebt es zu jeder Normalen eine andere Normale mit entgegengesetzter Richtung. Bezeichnen wir die zugehörigen Punkte als Gegenpunkte, so können wir den eben aufgestellten Satz auch so aussprechen: *Die G Fläche wird durch jede der geschlossenen geodätischen Linien in zwei Theile zerlegt; nehmen wir in dem einen Theile einen beliebigen Punkt an, so liegt sein Gegenpunkt in dem anderen Theile.* Wie in der Einleitung bemerkt, hat Hadamard allgemein den Satz bewiesen: Giebt es auf einer überall convexen Fläche zwei beliebige geschlossene geodätische Linien, so müssen sich dieselben nothwendig schneiden. (Vergl. Liouville's Journal 1897.) Der allgemeine Beweis dieses Satzes ist ziemlich complicirt; indessen können wir seine Richtigkeit in dem uns hier interessirenden Falle, wo wir nur geodätische Linien ohne Doppelpunkte haben, leicht einsehen. Bilden wir nämlich (in ein-eindeutiger Weise) die G Fläche auf die Kugel ab, so theilen die Bildcurven der geodätischen Linien die Kugel in zwei gleiche Theile. Dies ist nur dann möglich, wenn sich die Bildcurven schneiden und demgemäss müssen sich auch auf der G Fläche je zwei der geodätischen Linien schneiden.

Von den Längen der geschlossenen geodätischen Linien haben wir bereits ausgesagt, dass sie alle gleich sind. Wir wollen nun noch diese Länge zu der Krümmung der G Fläche in Beziehung setzen und knüpfen zu diesem Zwecke wieder an die Differentialgleichung $\frac{d^2y}{du^2} + Ky = 0$ an, die uns bereits in § 1 gute Dienste geleistet hat. Im vorliegenden Falle ist nun K nur positiver Werthe fähig. Für eine solche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung hat Sturm einige wichtige Sätze aufgestellt, (Vergl. Liouville's Journal, Bd. 1) die wir hier benutzen wollen. Sei also die Differentialgleichung

$$(17) \qquad \frac{d^2y}{du^2} = -K \cdot y \qquad K(u) > 0$$

vorgelegt und betrachten wir alle Integrale, welche für $u = 0$ verschwinden, so werden diese sämmtlich an ein und derselben Stelle $u = \alpha$ zum ersten Male wieder verschwinden. Nimmt man noch eine zweite Differentialgleichung hinzu,

$$\frac{d^2y}{du^2} + P(u)y = 0 \qquad P(u) > 0,$$

so möge an die Stelle von α der Werth $u = \beta$ treten. Setzen wir nun $K > P$ voraus, so besagt der Sturm'sche Satz, dass $\alpha < \beta$ ist. Welche geometrische Bedeutung hat nun der eben citirte Satz? Die Differentialgleichung (17), in der wir u als die Bogenlänge einer der geschlossenen geodätischen Curven C deuten, steht bekanntlich in innigem Zusammenhange mit der Theorie der conjugirten Punkte. Zwei auf einander folgende Nullstellen eines Integrals von (17) sind zwei conjugirte Punkte oder in dem in § 1 festgesetzten Sinne Schnittpunkte der Curve C mit einer unendlich benachbarten geodätischen Linie. Unter den Integralen von (17) greifen wir nun diejenigen heraus, welche für $u = 0$ verschwinden. Ist $u = \alpha$ die Stelle, wo sie zum ersten Male wieder verschwinden, so sind also $u = 0$ und $u = \alpha$ zwei auf einander folgende Schnittpunkte der Curve C mit einer unendlich benachbarten geodätischen Linie. Wir vergleichen nun (17) mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{b^2}\, y = 0,$$

worin $\frac{1}{b^2}$ die Minimalkrümmung der G-Fläche längs C sei also $K(u) \geqq \frac{1}{b^2}$. Das Integral der letzten Differentialgleichung, welches für $u = 0$ verschwindet, ist $y = C \sin \frac{u}{b}$. Der nächste Werth, für den dieses Integral wieder verschwindet, ist $u = \pi b$. Aus dem Sturm'schen Satze folgt daher $\alpha < \pi b$. Vergleicht man ähnlich (17) mit

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \frac{1}{a^2} y = 0,$$

wo $\frac{1}{a^2}$ die Maximalkrümmung längs C sein möge, so ergiebt sich $\alpha > \pi a$. α ist die Bogenlänge eines Stückes der geschlossenen geodätischen Curve C, welches zwischen zwei auf einander folgenden Schnittpunkten von C mit einer unendlich benachbarten geschlossenen geodätischen Linie liegt. Ist die Anzahl dieser Schnittpunkte $2m$, so haben wir auch $2m$ solcher Stücke und bekommen daher, wenn L die Länge der geschlossenen geodätischen Curve C bedeutet

$$2m\pi b \geq L \geq 2m\pi a.$$

Da m mindestens 1 ist, so ist sicher $L \geq 2\pi a$. Wir haben demnach den Satz: *Auf den G-Flächen besitzen die geschlossenen geodätischen Linien eine Länge $L \geq 2\pi a$, falls $\frac{1}{a^2}$ die Maximalkrümmung der Fläche ist.* Besonders interessant ist nun der Fall, wo längs einer der geschlossenen geodätischen Linien C die G-Fläche constante Gauss'sche Krümmung $\frac{1}{a^2}$ besitzt. Die zugehörige Differentialgleichung (17), die dann

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \frac{1}{a^2} y = 0$$

lautet, hat als allgemeines Integral

$$y = A \sin \frac{u}{a} + B \cos \frac{u}{a}.$$

Da nun auf der G-Fläche alle geodätischen Curven geschlossen sein sollen, so muss nach § 1 y eine periodische Function von u sein. Für die Länge L folgt daher die Relation

$$\frac{kL}{a} = 2h\pi.$$

Es ist hier $k = 1$ zu nehmen, da wir zufolge unserer Annahme eine geschlossene geodätische Linie bloss einmal zu durchlaufen brauchen, bis sich die unendlich benachbarten schliessen. $2h$ ist die Anzahl der Schnittpunkte, die C mit einer unendlich benachbarten ebenfalls geschlossenen geodätischen Linie besitzt. Ist im besonderen $2h = 2$, so erhalten wir $L = 2\pi a$. Der letzte Fall tritt nun gerade bei den singularitätenfreien

Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien ein. Längs des Aequators ist nämlich die Krümmung der Rotationsflächen constant etwa $\frac{1}{a^2}$; ferner hat der Aequator mit einer unendlich benachbarten geodätischen Linie genau zwei Schnittpunkte gemeinsam, da sämmtliche geodätischen Curven die erwähnten Rotationsflächen nur einmal umwinden. Es ist also im vorliegenden Falle $L = 2\pi a$. Bedeutet R den Radius des Aequatorkreises, so ist andererseits $L = 2\pi R$. Es folgt also $a = R$. Wir ziehen daraus den Schluss: *Längs des Aequators einer singularitätenfreien Rotationsfläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien ist die Krümmung der Fläche gerade so gross, wie diejenige der Kugel, die den Aequator als grössten Kreis hat.* Anders ausgedrückt lautet dieser Satz: *Der Schmiegungskreis der Meridiancurve einer singularitätenfreien Rotationsfläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien im Punkte* ($z = 0$, $r = R$) *ist der mit R um den Coordinatenanfang beschriebene Kreis.*

Zum Schlusse möchte ich mir erlauben, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Hilbert, der mich zu der vorliegenden Arbeit angeregt und stets mit förderndem Rathe unterstützt hat, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.