Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke.

Von

Wilhelm Ackermann in Göttingen.

Die Herren Bernays und Schönfinkel haben in einer kürzlich erschienenen Abhandlung[1]) einige einfache Fälle der Entscheidungsprobleme für die Relationslogik behandelt und erledigt. Es wurden dabei logische Ausdrücke betrachtet, die außer den logischen Grundverknüpfungen „und", „oder", „nicht", „wenn — so", Prädikaten- und Relationsvariable und ferner All- und Seinszeichen für Individuen enthielten. Derartige Ausdrücke bezeichnet man nach Löwenheim auch als Zählausdrücke. Die Lösung des Entscheidungsproblems im Bereiche der Zählausdrücke bedeutet die Auffindung eines Verfahrens, durch das man imstande ist, festzustellen, ob ein vorgelegter Zählausdruck bei bestimmten Einsetzungen für die variablen Prädikate und Relationen stets eine richtige Aussage darstellt oder nicht. Die so definierte Allgemeingültigkeit eines Zählausdrucks kann noch von der Anzahl der Elemente des Individuenbereichs abhängen, für den man sich die Prädikate und Relationen definiert denkt. Die vollständigste Lösung des Entscheidungsproblems ist die, in der die Abhängigkeit der Allgemeingültigkeit von der Individuenanzahl genau angegeben ist.

Man kann sich bei den Zählausdrücken auf diejenigen beschränken, die die sogenannte „Normalform" haben, d. h. bei denen die All- und Seinszeichen alle am Anfang der Formel stehen, und man wird die Zählausdrücke zweckmäßig nach der Art der zu ihnen gehörenden Kombinationen von All- und Seinszeichen klassifizieren.

In der Bernays-Schönfinkelschen Arbeit wurde die Frage nach der Allgemeingültigkeit für die folgenden Klassen von Formeln beantwortet:

---

[1]) P. Bernays und M. Schönfinkel, Zum Entscheidungsproblem der math. Logik, Math. Annalen 99 (1928).

Zunächst für diejenigen Formeln, bei denen jedes vorkommende Allzeichen jedem vorkommenden Existenzialzeichen vorangeht. Die allgemeinste Gestalt dieser Formeln ist

$$(1)\qquad (x_1)(x_2)\ldots(x_k)(E\,y_1)\ldots(E\,y_l)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_l).\ ^{2})$$

Die Fälle, daß kein Existenzialzeichen oder kein Allzeichen vorkommt, sind dabei eingeschlossen. Dieser Fall (1) läßt sich sehr einfach behandeln.

Besondere Schwierigkeiten bieten die Fälle, in denen Existenzialzeichen auch vor Allzeichen stehen. Der einfachste Fall ist hier

$$(2)\qquad (E\,x)(y)\mathfrak{A}(x,y).$$

Für diesen wurde in der genannten Arbeit ebenfalls ein Entscheidungsverfahren angegeben.

In der vorliegenden Arbeit will ich zunächst allgemein den Fall behandeln, daß auf ein Existenzialzeichen lauter Allzeichen folgen. Es handelt sich also um den Fall:

$$(3)\qquad (E\,x)(y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(x,y_1,\ldots,y_l).$$

Weiter sollen überhaupt die Ausdrücke betrachtet werden, bei denen nur ein Existenzialzeichen vorkommt. Der allgemeinste Fall ist hier:

$$(4)\qquad (x_1)\ldots(x_k)(E\,y)(z_1)\ldots(z_l)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k,y,z_1,\ldots,z_l).$$

Übrigens beschränke ich mich bei meinen Überlegungen der Einfachheit halber auf zweigliedrige Relationen. Die Ausdehnung auf mehrgliedrige Relationen macht aber keine sachlichen Schwierigkeiten.

§ 1.

Vorbereitungen und Angabe der Methode.

Statt die Allgemeingültigkeit von Zählausdrücken zu betrachten, kann man auch nach ihrer *Erfüllbarkeit* fragen. Ein Zählausdruck heißt *erfüllbar*, wenn es überhaupt eine bestimmte Einsetzung für die variablen Prädikate und Relationen gibt, so daß der Zählausdruck in eine richtige Behauptung übergeht. Die Allgemeingültigkeit eines Zählausdrucks ist gleichbedeutend mit der Nichterfüllbarkeit des entgegengesetzten, d. h. aus dem ursprünglichen durch Negation entstehenden Zählausdrucks. Für unsere Überlegungen ist es bequemer, uns mit der Erfüllbarkeit zu beschäftigen. Statt nach der Allgemeingültigkeit von Ausdrücken des Typs (3) und (4), fragen wir daher nach der Erfüllbarkeit von Ausdrücken der folgenden Form:

---

[2]) Die Symbolik ist die gleiche wie in: D. Hilbert u. W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik (Springer 1928) [zitiert im folgenden als H.-A.].

$$(3') \qquad (x)(Ey_1)\ldots(Ey_l)\,\mathfrak{A}(x, y_1, \ldots, y_l),$$

$$(4') \qquad (Ex_1)\ldots(Ex_k)(y)(Ez_1)\ldots(Ez_l)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k, y, z_1, \ldots, z_l).$$

Die Erfüllbarkeit oder Nichterfüllbarkeit eines bestimmten Zählausdrucks ist natürlich ebenso eine Funktion der Anzahl der Elemente im zugrunde gelegten Individuenbereich wie die Allgemeingültigkeit. Für einen Bereich mit bestimmter endlicher Anzahl der Elemente ist nun die Entscheidung über die Erfüllbarkeit eines Ausdrucks ohne weiteres zu treffen. Man kann hier die Allzeichen und Existenzialzeichen durch endliche Konjunktionen bzw. Disjunktionen ersetzen, so daß sich das Problem auf ein solches des Aussagenkalküls reduziert, das keine Schwierigkeiten bietet[3]).

Ich werde nun zeigen, daß für die Ausdrücke der Form (3′) und (4′) der folgende Satz gilt:

Ist ein derartiger Zählausdruck überhaupt erfüllbar, so ist er auch schon in einem Individuenbereich von bestimmter endlicher Anzahl der Elemente erfüllbar.

Mit der Angabe dieser zu einem bestimmten Ausdruck gehörigen endlichen Anzahl ist das Entscheidungsverfahren gegeben. Diese Anzahl sei für einen bestimmten Zählausdruck z. B. k. Für einen Individuenbereich der endlichen Anzahl k läßt sich, wie eben angeführt, die Entscheidung über die Erfüllbarkeit treffen. Entweder ist nun der betrachtete Zählausdruck für einen Bereich von k Individuen nicht erfüllbar, dann gilt dasselbe für jeden Individuenbereich. Oder aber er ist für einen Bereich von k Individuen erfüllbar, dann gilt dasselbe für jeden Bereich, der eine größere Anzahl von Individuen enthält[4]). Man braucht dann nur noch die Erfüllbarkeit des betreffenden Ausdrucks für Individuenbereiche der Anzahlen $1, 2, \ldots, k-1$ zu untersuchen, was sich wieder auf ein Problem des Aussagenkalküls reduziert.

Es kommt also darauf an, für jeden Zählausdruck der Form (3′) oder (4′) einen zugehörigen endlichen Individuenbereich anzugeben, für den der Zählausdruck erfüllbar sein muß, falls er nicht einen logischen Widerspruch darstellt. Es sei übrigens bemerkt, daß sich die angegebene Methode nicht für eine allgemeine Lösung des Entscheidungsproblems im Bereich der Zählausdrücke verwenden läßt, da es Zählausdrücke gibt, die für keinen endlichen Individuenbereich erfüllbar sind, wohl aber für den abzählbar unendlichen[5]).

---

[3]) Vgl. H.-A., S. 79.

[4]) Vgl. Bernays und Schönfinkel, S. 3.

[5]) Vgl. H.-A., Seite 80.

§ 2.

Die Behandlung der Zählausdrücke von der Form $(x)(Ey)\mathfrak{A}(x, y)$.

Ich behandle in diesem Paragraphen den Bernays-Schönfinkelschen Fall noch einmal, da an ihm das Wesentliche der von mir benutzten Methode auch für die allgemeineren Fälle klarer werden wird. Ich will zunächst noch die weitere Einschränkung machen, daß die betrachteten Zählausdrücke nur eine einzige variable Relation F enthalten. $\mathfrak{A}(x, y)$ ist dann eine Aussagenverbindung, die aus den Grundaussagen $F(x, x)$, $F(x, y)$, $F(y, x)$, $F(y, y)$ zusammengesetzt ist. Um dies anzudeuten, schreibe ich den Zählausdruck als

$$(x)(Ey)\mathfrak{A}(F(x, x), F(x, y), F(y, x), F(y, y)).$$

Es sei dieser Ausdruck in irgendeinem Individuenbereich erfüllbar. $\Phi_0(x, y)$ möge eine zugehörige erfüllende Relation sein. Zu jedem Element x des Individuenbereichs kann man dann ein anderes y finden, so daß

$$\mathfrak{A}(\Phi_0(x, x), \Phi_0(x, y), \Phi_0(y, x), \Phi_0(y, y))$$

richtig ist. Wir denken uns für jedes x eins der zugehörigen y ausgewählt, und bezeichnen es mit $\alpha(x)$. Es gilt dann allgemein, d. h. für jedes x:

$$\mathfrak{A}(\Phi_0(x, x), \Phi_0(x, \alpha(x)), \Phi_0(\alpha(x), x), \Phi_0(\alpha(x), \alpha(x))).$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir $\alpha(x)$ mit $\alpha_1(x)$, $\alpha\alpha(x)$ mit $\alpha_2(x)$, $\alpha\alpha\alpha(x)$ mit $\alpha_3(x)$ usw. x_0 möge irgendein willkürlich herausgegriffenes Element des Individuenbereichs bedeuten.

Wir nehmen nun einen neuen Individuenbereich, der aus den Elementen $0, 1, 2, \ldots$ besteht. Für diesen Bereich definieren wir eine Relation $\Phi_1(x, y)$ wie folgt:

Für alle i und k soll sein:

$$\Phi_1(i, k) \sim \Phi_0(\alpha_i(x_0), \alpha_k(x_0))$$

($\alpha_0(x_0)$ soll hier x_0 selbst bezeichnen. Das Zeichen $\sim$ bedeutet, daß die links und die rechts stehende Aussage den gleichen Wahrheitswert haben.)

Für den neuen Individuenbereich gilt offenbar:

$$(x)\mathfrak{A}(\Phi_1(x, x), \Phi_1(x, x+1), \Phi_1(x+1, x), \Phi_1(x+1, x+1))$$

Wir beweisen nun den folgenden

Hilfssatz: *Es möge eine ganze Zahl $n \geqq 3$ und ein Element a des zuletzt erwähnten Bereiches geben, so daß*

$$\Phi_1(a, a) \sim \Phi_1(a+n, a+n).$$

Dann ist unser Zählausdruck schon in einem Bereiche von n Individuen erfüllbar.

Beweis. Wir nehmen als Elemente des n-zahligen Bereichs $a, a+1, a+2, \ldots, a+(n-1)$. Die erfüllende Relation $\Phi_2(x,y)$ definieren wir wie folgt. Für die Paare

$$(a+i, a+i),\ (a+i, a+i+1) \quad \text{und} \quad (a+i+1, a+i),$$

wo $0 \leqq i \leqq n-2$, stimmt Φ_2 mit Φ_1 überein. Ferner ist

$$\Phi_2(a+n-1, a) \sim \Phi_1(a+n-1, a+n),$$
$$\Phi_2(a, a+n-1) \sim \Phi_1(a+n, a+n-1).$$

Da $n \geqq 3$, steht diese letzte Festlegung nicht mit den vorigen in Widerspruch. Im übrigen ist Φ_2 beliebig. Wir ordnen nun jedem Element x des Bereiches $a, a+1, \ldots, a+(n-1)$ ein anderes $\beta(x)$ zu. Für $x = a, \ldots, a+(n-2)$, ist das $x+1$, für $a+(n-1){:}\,a$. Aus unserer Definition der Relation Φ_2 ergibt sich dann, daß

$$\mathfrak{A}\Big(\Phi_2(x,x),\ \Phi_2(x,\beta(x)),\ \Phi_2(\beta(x),x),\ \Phi_2(\beta(x),\beta(x))\Big)$$

für alle x eine richtige Aussage darstellt.

Der Zählausdruck

$$(x)\ (Ey)\ \mathfrak{A}(F(x,x),\ F(x,y),\ F(y,x),\ F(y,y))$$

ist also in dem Bereich $a, a+1, \ldots, a+(n-1)$ erfüllbar.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Demnach genügt es, wenn wir in dem Bereich $0, 1, 2, \ldots$ ein Element a und eine ganze Zahl n von der angegebenen Art finden. Nun muß mindestens einer der folgenden drei Fälle zutreffen:

$$\Phi_1(0,0) \sim \Phi_1(3,3),$$
$$\Phi_1(3,3) \sim \Phi_1(6,6),$$
$$\Phi_1(0,0) \sim \Phi_1(6,6).$$

Daraus ergibt sich, daß *der Zählausdruck*

$$(x)\ (Ey)\ \mathfrak{A}(F(x,x),\ F(x,y),\ F(y,x),\ F(y,y)),$$

wenn überhaupt, schon für einen Bereich mit der Individuenanzahl 6 *erfüllbar ist.*

Die Lösung des Entscheidungsproblems ist damit für den betrachteten Fall gegeben.

Ich lege übrigens keinen Wert darauf, daß 6 oder die Zahlen, die ich für die komplizierteren Fälle angeben werde, die kleinsten Zahlen dieser Art sind. Es kommt mir nicht darauf an, ein rechnerisch möglichst einfaches Entscheidungsverfahren zu finden, sondern es soll nur die prinzipielle Möglichkeit der Entscheidung mit möglichst einfachen Mitteln dargetan werden.

Die Methode, die bei dem behandelten Falle angewandt wurde, beruhte darauf, daß gewissermaßen das Element $a+n$ mit a identifiziert und die Definition der Funktion Φ_1 entsprechend abgeändert wurde.

Falls der Ausdruck $(x)\,(Ey)\,\mathfrak{A}(x,y)$ nicht eine, sondern n variable Relationen $F_1(.,.), \ldots, F_n(.,.)$ enthält, so wird ganz ähnlich verfahren. Der Ausdruck $\mathfrak{A}(x,y)$ setzt sich hier durch Verbindung der $4n$ Grundaussagen

$$
\begin{array}{cccc}
F_1(x,x), & F_1(x,y), & F_1(y,x), & F_1(y,y) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
F_n(x,x), & F_n(x,y), & F_n(y,x), & F_n(y,y)
\end{array}
$$

zusammen. Wir denken uns wieder das zu einem x gehörige y mit $\alpha(x)$ bezeichnet, und können in derselben Weise wie früher zu einem Bereich übergehen, der aus den Elementen $0,1,2,\ldots$ besteht und für den $\alpha(x)$ gleich $x+1$ ist. Die n erfüllenden Relationen in diesem Bereich seien

$$\Phi_1(x,y),\ \Phi_2(x,y),\ \ldots,\ \Phi_n(x,y).$$

Entsteht $\mathfrak{A}'(x,y)$ aus $\mathfrak{A}(x,y)$ dadurch, daß für $F_1,\ldots,F_n$ die Relationen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ eingesetzt werden, so gilt $(x)\,\mathfrak{A}'(x, x+1)$.

Betrachten wir nun irgendein Element a dieses Bereiches. Für die Verteilung von Wahrheit, bzw. Falschheit auf die n Aussagen

$$\Phi_1(a,a),\ \Phi_2(a,a),\ \ldots,\ \Phi_n(a,a)$$

gibt es insgesamt 2^n Möglichkeiten; für jedes Element a liegt eine dieser Möglichkeiten vor.

Es gilt nun der folgende

Satz: *Falls m eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist, so sind bei der Folge von Elementen $0,1,\ldots,3(m-1)$ mindestens m Möglichkeiten eingetreten, oder aber der Zählausdruck ist schon in einem Individuenbereich erfüllbar, der nur aus $3\cdot(m-1)$ Elementen besteht.*

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach m. Für $m=1$ ist sie offenbar richtig. Für ein bestimmtes m sei schon alles gezeigt, und wir gehen jetzt zu $(m+1)$ über. Der ungünstigste Fall ist der, daß bis zum Gliede $3(m-1)$ genau m Möglichkeiten vorgekommen sind. Wir nehmen nun die Elemente $3m-2$, $3m-1$, $3m$ hinzu. Kommt hier eine weitere Möglichkeit hinzu, so ist es gut. Andernfalls kommt unter $0, 1, \ldots, 3m-3$ ein Element c vor, so daß

$$
\begin{gathered}
\Phi_1(3m, 3m) \sim \Phi_1(c, c), \\
\Phi_2(3m, 3m) \sim \Phi_2(c, c), \\
\cdots\cdots\cdots \\
\Phi_n(3m, 3m) \sim \Phi_n(c, c).
\end{gathered}
$$

Wir zeigen dann, daß der Zählausdruck in dem Bereich, der aus den Individuen $0, 1, \ldots, 3m-1$ besteht, erfüllbar ist. Zu diesem Zweck definieren wir in diesem Bereich n Relationen $\Phi_1'(x, y), \ldots, \Phi_n'(x, y)$ wie folgt:

Für alle i $(1 \leqq i \leqq n)$ und alle $k (0 \leqq k \leqq 3m-2)$ soll sein

$$\Phi_i'(k, k+1) \sim \Phi_i(k, k+1),$$
$$\Phi_i'(k+1, k) \sim \Phi_i'(k+1, k),$$
$$\Phi_i'(k, k) \sim \Phi_i(k, k).$$

Ferner sei für alle i

$$\Phi_i'(3m-1, c) \sim \Phi_i(3m-1, m),$$
$$\Phi_i'(c, 3m-1) \sim \Phi_i(3m, 3m-1).$$

Es werden also gewissermaßen die Elemente c und $3m$ identifiziert. Die beiden letzten Festlegungen stehen nicht mit den vorhergehenden im Widerspruch, da $3m-1 \neq c+1$. Im übrigen ist die Definition der Relationen $\Phi_1', \ldots, \Phi_n'$ beliebig. — Wir bezeichnen nun den Ausdruck, der aus $\mathfrak{A}(x, y)$ dadurch entsteht, daß für $F_1, \ldots, F_n$ die bestimmten Relationen $\Phi_1', \ldots, \Phi_n'$ eingesetzt werden, mit $\mathfrak{A}''(x, y)$. Es bedeute ferner $\beta(x)$ für ein Element x $(0 \leqq x \leqq 3m-2)$ das Element $x+1$; $\beta(3m-1)$ sei gleich c. Es gilt dann für den aus $0, 1, \ldots, 3m-1$ bestehenden Bereich

$$(x)\mathfrak{A}''(x, \beta(x)).$$

Das folgt aus der Gültigkeit von $(x)\mathfrak{A}'(x, x+1)$ in dem Bereiche $0, 1, 2, \ldots$.

Das Bestehen von $(x)\mathfrak{A}''(x, \beta(x))$ besagt aber, daß der Zählausdruck $(x)(Ey)\mathfrak{A}(x, y)$ in einem aus $3m$, oder $3((m+1)-1)$ Individuen bestehenden Bereich erfüllt ist. Unser Satz ist damit bewiesen.

Wir wenden diesen Satz jetzt an für $m = 2^n + 1$. Da es nur 2^n Möglichkeiten gibt, so erhalten wir:

Unser Zählausdruck $(x)(Ey)\mathfrak{A}(x, y)$ ist schon in einem Bereiche von $3 \cdot 2^n$ Individuen erfüllbar.

Damit ist die Entscheidungsfrage für die Zählausdrücke der Form $(x)(Ey)\mathfrak{A}(x, y)$ vollständig erledigt.

§ 3.

Die Behandlung der Zählausdrücke der Form $(x)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_l)\mathfrak{A}(x, y_1, \ldots, y_l)$.

Wir betrachten jetzt den allgemeineren Fall, daß hinter dem Allzeichen nicht nur ein, sondern allgemeiner l Existenzialzeichen vorkommen. Die Anzahl der vorkommenden Relationen sei wieder n.

Der Ausdruck sei in irgendeinem Bereich durch die Relationen $\Phi_1(x, y), \ldots, \Phi_n(x, y)$ erfüllt. Durch die Einsetzung dieser bestimmten Relationen für die Relationsvariablen gehe $\mathfrak{A}(x, y_1, \ldots, y_l)$ in $\mathfrak{A}'(x, y_1, \ldots, y_l)$ über. Wir können uns jedem Element x eindeutig l andere Elemente $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_l(x)$ zugeordnet denken, so daß

$$(x)(\mathfrak{A}'(x, \alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_l(x))$$

eine richtige Aussage ist. x_0 sei ein willkürlich herausgegriffenes Element. Dem Element x_0 sind dann die l Elemente $\alpha_1(x_0), \alpha_2(x_0), \ldots, \alpha_l(x_0)$ zugeordnet, einem Element $\alpha_i(x_0)$ die l Elemente $\alpha_1 \alpha_i(x_0) \ldots, \alpha_l \alpha_i(x_0)$. Wir können uns diese Zuordnung durch das folgende Schema veranschaulichen.

$$x_0$$

$$\alpha_1(x_0) \qquad \alpha_2(x_0) \qquad \ldots \qquad \alpha_l(x_0)$$

$$\alpha_1 \alpha_1(x_0) \ldots \alpha_l \alpha_1(x_0) \quad \alpha_1 \alpha_2(x_0) \ldots \alpha_l \alpha_2(x_0) \quad \ldots \quad \alpha_1 \alpha_l(x_0) \ldots \alpha_l \alpha_l(x_0)$$

$$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1(x_0) \ldots \alpha_l \alpha_1 \alpha_1(x_0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

In dem oben angeschriebenen Schema brauchen natürlich nicht alle Elemente verschieden zu sein. Wir können sie aber immer als verschieden annehmen, und sie mit

$$0$$

$$(1) \qquad (2) \qquad \ldots \qquad (l)$$

$$(11) \ldots (1\,l) \ldots (21) \ldots (2\,l) \ldots (l\,1) \ldots (l\,l)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

bezeichnen. Wir brauchen nämlich für diesen neuen Bereich nur n Relationen $\Phi_1', \ldots, \Phi_n'$ zu definieren, so daß immer gilt:

$$\Phi_i'\,[(a_1 \ldots a_m), (b_1 \ldots b_k)] \sim \Phi_i(\alpha_{a_m} \ldots \alpha_{a_1}(x_0), \alpha_{b_k} \ldots \alpha_{b_1}(x_0)).$$

Einem beliebigen Element $(a_1, \ldots, a_m)$ sind hier die l Elemente:

$$(a_1, \ldots, a_m, 1), (a_1, \ldots, a_m, 2), \ldots, (a_1, \ldots, a_m, l)$$

zugeordnet. Entsteht $\mathfrak{A}''(x, y_1, \ldots, y_l)$ aus $\mathfrak{A}(x, y_1, \ldots, y_l)$ dadurch, daß für $F_1, \ldots, F_n$ die Relationen $\Phi_1', \ldots, \Phi_n'$ eingesetzt werden, so ist für ein beliebiges Element $(a_1, \ldots, a_m)$:

$$\mathfrak{A}''[(a_1, \ldots, a_m), (a_1, \ldots, a_m 1), \ldots, (a_1, \ldots, a_m l)]$$

eine richtige Behauptung.

Zu dem „Stammbaum" eines Elementes $(a_1 \ldots a_m)$ in dem zuletzt genannten Schema rechnen wir alle Elemente, deren Bezeichnung mit $(a_1, \ldots, a_m, \ldots)$ beginnt. Es dürfte klar sein, was man unter den l Elementen zu verstehen hat, die zum 1. Gliede des Stammbaumes eines bestimmten Elementes gehören, unter den l^2 Elementen, die zum 2. Gliede des Stammbaumes gehören, usw.

Wir greifen nun irgend l Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_l$ heraus, die einem anderen Elemente zugeordnet sind. Für die Verteilung von Wahrheit bzw. Falschheit auf die $n \cdot l^2$ Aussagen

$$\Phi_i(b_p, b_q)$$

gibt es dann $2^{n \cdot l^2}$ Möglichkeiten.

Sei nun m eine ganze Zahl $\geqq 1$. Wir betrachten die Möglichkeiten der oben genannten Art, die für zusammengehörige l Elemente eintreten. Es gilt dann der folgende Satz: *In dem Stammbaum eines beliebigen Elementes sind bis zum $(3m - 2)$-ten Gliede mindestens m verschiedene Möglichkeiten eingetreten, oder aber der Zählausdruck ist schon in einem Individuenbereich erfüllt, der nur aus $\frac{l^{3m-2} - 1}{l-1}$ Elementen besteht $(l \geqq 2)$.*

Der Beweis geschieht durch Induktion nach m. Für $m = 1$ stimmt die Behauptung. Für ein bestimmtes m sei schon alles gezeigt. Bis zum $(3m - 2)$-ten Gliede sind also ungünstigstenfalls genau m Möglichkeiten eingetreten. Wir nehmen nun weitere Elemente bis zum $(3m + 1)$-ten Gliede. Kommt hier eine neue Möglichkeit vor, so ist es gut. Andernfalls zeigen wir, daß der Zählausdruck schon in dem Bereich erfüllt ist, der aus den Elementen bis zum $3m$-ten Gliede besteht.

Es gilt nämlich folgendes: Jede Möglichkeit, die bei l zusammengehörigen Elementen des $(3m + 1)$-ten Gliedes vorkommt, wurde auch schon bis zum $(3m - 2)$-ten Gliede vertreten, und wir können dort für jede derartige Möglichkeit einen Repräsentanten von l zusammengehörigen Elementen auswählen. Für die Möglichkeit $\mathfrak{M}_i$ seien das $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{il}$. Liegt nun für l zusammengehörige Elemente des $(3m + 1)$-ten Gliedes $b_1, b_2, \ldots, b_l$ die Möglichkeit $\mathfrak{M}_i$ vor, so wird gewissermaßen jedes b_k mit a_{ik} identifiziert, d. h. in dem neuen Bereiche, der nur aus den Elementen bis zum $3m$-ten Gliede besteht, wird einem Element a des $3m$-ten Gliedes, falls ihm vorher $b_1, \ldots, b_l$ entsprach, jetzt $a_{i1}, \ldots, a_{il}$ zugeordnet. Die neuen erfüllenden Funktionen $\Phi_1'', \ldots, \Phi_n''$ werden so festgelegt, daß

$$\Phi_j''(a, a_{ik}) \sim \Phi_j'(a, b_k).$$

Im übrigen bleiben die Relationen unverändert für die Paare, die aus einem Element und seinem zugeordneten bestehen. Da a nicht in dem auf a_{ik} folgenden Glied steht, so ist das möglich. Man erkennt nun leicht, daß auch in dem neuen Bereich der Zählausdruck

$$(x)(Ey_1)\ldots(Ey_l)\mathfrak{A}(x, y_1, \ldots, y_l)$$

erfüllt ist. Da der neue Bereich aus

$$1 + l + l^2 + \ldots + l^{3m} = \frac{l^{3m+1} - 1}{l - 1} \text{ Elementen}$$

besteht, so ist unser Satz bewiesen.

Wir wenden den Satz nun an für $m = 2^{n \cdot l^2} + 1$. Da es nur $2^{n \cdot l^2}$ Möglichkeiten gibt, so erhalten wir das Resultat:

Ein Zählausdruck von der Form $(x)(Ey_1)\ldots(Ey_l)\mathfrak{A}(x, y_1, \ldots, y_l)$ *ist, falls überhaupt, schon in einem Individuenbereich erfüllt, der nur aus* $\frac{l^{3 \cdot 2^{nl^2}+1} - 1}{l - 1}$ *Elementen besteht.*

§ 4.

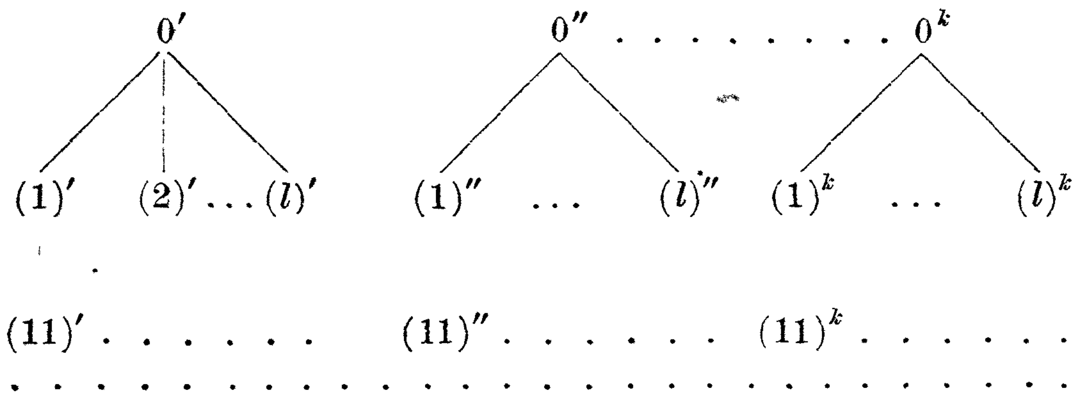
Die Behandlung der Zählausdrücke von der Form $(Ex_1)\ldots(Ex_k)(y)(Ez_1)\ldots(Ez_l)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k, y, z_1, \ldots, z_l)$.

Wir erweitern jetzt unsere Betrachtungen auf diejenigen Zählausdrücke, bei denen einer Kombination von der Form $(y)(Ez_1)\ldots(Ez_l)$ noch eine beliebige endliche Anzahl k von Existenzialzeichen vorangeht. Die erfüllenden Relationen seien $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$.

$\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k, y, z_1, \ldots, z_l)$ gehe nach Einsetzung dieser Relationen in $\mathfrak{A}'(x_1, \ldots, x_k, y, z_1, \ldots, z_l)$ über. Es gibt dann in dem zugrunde gelegten Individuenbereich k Elemente $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0$, so daß

$$(y)(Ez_1)\ldots(Ez_l)\mathfrak{A}'(x_1^0, \ldots, x_k^0, y, z_1, \ldots, z_l)$$

eine richtige Aussage darstellt. Die zu einem bestimmten y gehörigen Elemente können wir uns eindeutig bestimmt denken und bezeichnen sie mit $\alpha_1(y), \ldots, \alpha_l(y)$. Wir dürfen nun annehmen, daß der Individuenbereich die folgende Gestalt hat: Die $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0$ sind alle verschieden, wir bezeichnen sie mit $0', 0'', \ldots, 0^{(k)}$. Zu jedem dieser k Elemente denken wir uns einen sich immer l-fach verzweigenden Stammbaum, wie wir ihn im vorigen Paragraphen hatten.



Die zu einem Element y gehörigen $z_1, z_2, \ldots, z_k$ sind durch das nächste Glied des zu y gehörigen Stammbaumes gegeben. Z. B. gehören zu einem Element $(11)^i$ die l Elemente

$$(111)^i, (112)^i, \ldots, (11l)^i.$$

Und entsprechend ist z. B.

$$\mathfrak{A}'(0', 0'', \ldots, 0^k, (11)^i, (111)^i, (112)^i, \ldots, (11l)^i)$$

eine richtige Aussage. Wir dürfen ferner annehmen, daß die verschiedenen Stammbäume kein Element gemeinsam haben.

Jedem Element des neuen Bereichs ist nämlich ein bestimmtes des alten Bereichs zugeordnet, z. B. ist das für $(123)^i$ das Element $\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 (x_i^0)$, und man definiert in dem neuen Bereich n Relationen so, daß ihr Zutreffen für ein Paar von geordneten Elementen davon abhängt, ob die ursprünglichen Relationen für das entsprechende Paar von Elementen zutrafen oder nicht.

Betrachten wir ein geordnetes Paar $(0^i, 0^j)$. Für irgendein Φ_p stellt $\Phi_p(0^i, 0^j)$ eine bestimmte Aussage dar, die wahr oder falsch sein kann. Wir wollen diese Aussage mit Γ_{ij}^p bezeichnen. Die Zuordnungen der Elemente denken wir uns durch $\beta_1(x), \ldots, \beta_l(x)$ gegeben.

$(y)\mathfrak{A}'(0', \ldots, 0^k, y, \beta_1(y), \ldots, \beta_l(y))$ ist eine richtige Aussage. Aus der Richtigkeit der Aussage und der besonderen Natur der β folgt, daß auch

$$\begin{aligned}
&(Ez_1)\ldots(Ez_l)\mathfrak{A}'(0', \ldots, 0^k, 0', z_1, \ldots, z_l) \\
&\quad \& (Ez_1)\ldots(Ez_l)\mathfrak{A}'(0' \ldots 0^k, 0'', z_1, \ldots, z_l) \\
&\quad \& \ldots \& (Ez_1)\ldots(Ez_l)\mathfrak{A}'(0', \ldots, 0^k, 0^k, z_1, \ldots, z_l) \\
&\quad \& (y)(Ez_1)\ldots(Ez_l)\mathfrak{A}'(0', \ldots, 0^k, y, z_1, \ldots, z_k)
\end{aligned}$$

eine richtige Aussage ist, und zwar beziehen sich hier sämtliche All- und Existenzialzeichen nur auf den Bereich, der aus dem ursprünglichen entsteht, wenn man die Elemente $0', \ldots, 0^k$ fortläßt.

Wir können die letzte Aussage auf die Normalform bringen, indem wir das Allzeichen zuerst setzen und die $(k+1)\cdot l$ Existenzialzeichen folgen lassen. Der so entstehende Zählausdruck enthält n Relationen $\Phi_1(x, y), \ldots, \Phi_n(x, y)$, ferner $2kn$ Prädikate

$$\begin{array}{ll} \Phi_1(0', x), \ldots, \Phi_1(0^k, x); & \Phi_1(x, 0'), \ldots, \Phi_1(x, 0^k), \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \Phi_n(0', x), \ldots, \Phi_n(0^k, x); & \Phi_n(x, 0'), \ldots, \Phi_n(x, 0^k). \end{array}$$

Im ganzen kommen $n(1 + 2k)$ Funktionen vor. Außerdem enthält er noch die bestimmten Aussagen Γ_{ik}^p.

Nach dem im § 3 bewiesenen Satz ist der Zählausdruck in einem Bereich erfüllbar, der aus

$$\frac{[(k+1)\,l]^{3\cdot 2^{n\,(1+2k\,(k+1)^2\,l^2}+1}-1}{(k+1)\,l-1}$$

Elementen besteht.

Die erfüllenden Relationen und Prädikate seien

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\Phi_1'(x, y),\ \Phi_2'(x, y),\ \ldots,\ \Phi_n'(x, y);} \\ \Psi_{11}(x), \ldots, \Psi_{1k}(x); & X_{11}(x), \ldots, X_{1k}(x), \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \Psi_{n1}(x), \ldots, \Psi_{nk}(x); & X_{n1}(x), \ldots, X_{nk}(x). \end{array}$$

Wir fügen nun zu dem letzten Bereich wieder die Elemente $0', 0'', \ldots, 0^k$ hinzu und ergänzen die Definition von $\Phi_1', \ldots, \Phi_n'$ für diesen Bereich so, daß

$$\begin{aligned} \Phi_p'(0^i, x) &\sim \Psi_{pi}(x), \\ \Phi_p'(x, 0^i) &\sim X_{pi}(x), \\ \Phi_p'(0^i, 0^j) &\sim \Gamma_{ij}^p. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich dann leicht, daß

$$(Ex_1) \ldots (Ex_k)(y)(Ez_1) \ldots (Ez_l)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k, y, z_1, \ldots, z_k)$$

in diesem Bereich durch die Funktionen $\Phi_1', \ldots, \Phi_n'$ erfüllbar ist.

Wir haben damit das Resultat:

Ist ein Zählausdruck von der Form

$$(Ex_1) \ldots (Ex_k)(y)(Ez_1) \ldots (Ez_l)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k, y, z_1, \ldots, z_k)$$

überhaupt erfüllbar, so gilt das auch schon für einen Bereich von $\dfrac{[(k+1)\,l]^{3\cdot 2^{n\,(1+2k)\,(k+1)^2\,l^2}+1}-1}{(k+1)\,l-1} + k$ *Individuen.*

(Eingegangen am 9. 2. 1928.)