Über die Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

§ 1.

$f(x)$ sei eine integrierbare Funktion mit der Fourierschen Reihe

$$(1) \qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x);$$

ferner sei

$$s_0 = \frac{a_0}{2}, \quad s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Vor einigen Jahren hatte ich den Satz bewiesen[1]):

Es sei $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$ und

$$(\mathrm{L}) \qquad \int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2 dx \leqq \lambda t^{2\alpha} \quad \text{für} \quad t > 0,$$

dann ist die Reihe $\sum\limits_1^\infty (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{1}{2}k}$ für $k > \frac{2}{2\alpha+1}$ konvergent; dagegen gibt es der Bedingung (L) genügende Funktionen, für die $\sum (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{1}{2\alpha+1}}$ divergiert $\left(\text{also } k = \frac{1}{2\alpha+1}\right)$.

---

[1]) Szász, 1, insbes. § 3. — (L) ist offenbar eine Verallgemeinerung der Lipschitzbedingung vom Grade α auf quadratische Integralmittelwerte. Vor kurzem erhielt ich die Korrekturbogen einer Arbeit von Hardy und Littlewood (2), worin über solche Funktionenklassen (vgl. Lp) interessante Sätze bewiesen werden. — Die Nummern beziehen sich auf die am Schlusse angeführte Literatur.

Der Beweis beruhte auf der Ungleichung

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} [\sigma_n(x) - f(x)]^2 dx < \frac{\lambda \varrho_1}{n^{2\alpha}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),^{2)}$$

die aus (L) hergeleitet wurde.

Im folgenden verallgemeinere ich dieses Resultat; der Beweisgang bedeutet auch für den eben zitierten Satz eine Vereinfachung. Ich beweise zunächst den

Satz 1. *Es sei* $\lambda > 0$, $p > 1$, $-\frac{1}{p} < \alpha < 1$ *und*

$$(\mathrm{Lp}) \qquad \int_0^{2\pi} |f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)|^p dx \leqq \lambda t^{\alpha p}, \qquad t > 0;$$

dann ist

$$(2\mathrm{p}) \qquad \int_0^{2\pi} |\sigma_n(x) - f(x)|^p dx < \varrho_2 \lambda n^{-\alpha p} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x) = \varphi(t, x) = \varphi,$$

so ist bekanntlich

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 \varphi(t, x)\, dt;$$

ferner ist[3])

$$\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 < \left(\frac{\pi n}{1+nt}\right)^2, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2},$$

also

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqq \pi n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+nt)^{-2} |\varphi(t, x)|\, dt,$$

oder für irgendein reelles β

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqq \pi n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+nt)^{\beta-1} |\varphi(t, x)| \cdot (1+nt)^{-\beta-1} dt.$$

---

[2]) ϱ_1 hängt nur von α ab; die später auftretenden $\varrho_2, \ldots$ hängen von α und einem Parameter p ab.

[3]) Infolge einer Bemerkung des Herrn Fejér ist nämlich

$$|\sin nt| \leqq n \sin t \quad \text{und} \quad nt\,|\sin nt| \leqq nt \leqq \frac{\pi}{2} n \sin t,$$

laso

$$(1+nt)\,|\sin nt| \leqq \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) n \sin t < \pi n \sin t.$$

Wir wenden nun die bekannte Ungleichung an:

$$\left|\int_a^b g(t)\,h(t)\,dt\right|^p \leqq \int_a^b |g(t)|^p dt \cdot \left(\int_a^b |h(t)|^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{p-1}, \qquad p > 1;$$

dann wird

$$|\sigma_n(x) - f(x)|^p \leqq (\pi n)^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+nt)^{p(\beta-1)} |\varphi|^p dt \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+nt)^{-\frac{p(\beta+1)}{p-1}} dt\right)^{p-1},$$

und wegen (Lp)

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x) - f(x)|^p dx \\ (3) \qquad &\leqq \lambda (\pi n)^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+nt)^{p(\beta-1)} \cdot t^{\alpha p} dt \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+nt)^{-\frac{p(\beta+1)}{p-1}} dt\right)^{p-1}, \\ &\alpha p > -1. \end{aligned}$$

Nun sei (man beachte, daß $\alpha < 1$)

$$-\frac{1}{p} < \beta < 1 - \alpha - \frac{1}{p}, \quad \text{z. B. } \beta = \frac{1-\alpha}{2} - \frac{1}{p};$$

dann ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+nt)^{p(\beta-1)} \cdot t^{\alpha p} dt = n^{-1-\alpha p} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} (1+\tau)^{p(\beta-1)} \cdot \tau^{\alpha p} d\tau < \varrho_3 n^{-1-\alpha p}$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+nt)^{-\frac{p(\beta+1)}{p-1}} dt = \frac{1}{n} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} (1+\tau)^{-\frac{p(\beta+1)}{p-1}} d\tau < \frac{\varrho_4}{n},$$

also nach (3)

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x) - f(x)|^p dx < \varrho_2 \lambda n^{-\alpha p}. \quad \text{Qu. e. d.}$$

Je größer p ist, desto schärfer ist die Voraussetzung (Lp), aber auch die Ungleichung (2p); für $p = 2$ ist hierin die Ungleichung (16) meiner Arbeit 1. enthalten. Man beachte, daß allgemein

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(x)|^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leqq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(x)|^\delta dx\right)^{\frac{1}{\delta}}, \qquad 0 < \gamma < \delta.$$

§ 2.

Es sei jetzt $1 < p \leqq 2$; die Anwendung eines Hausdorffschen Satzes[4]) auf die Fouriersche Reihe

$$f(x) - \sigma_n(x) \sim \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\nu}{n}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) + \sum_{\nu=n}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

ergibt unmittelbar

$$\left(n^{\frac{p}{1-p}} \sum_{1}^{n-1} \nu^{\frac{p}{p-1}} |c_\nu|^{\frac{p}{p-1}} + \sum_{n}^{\infty} |c_\nu|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1} < \varrho_5 \int_0^{2\pi} |\sigma_n(x) - f(x)|^p dx,$$

$$c_\nu = a_\nu - i b_\nu;$$

also nach (2p)

$$(4) \qquad n^{\frac{p}{1-p}} \sum_{1}^{n-1} \nu^{\frac{p}{p-1}} |c_\nu|^{\frac{p}{p-1}} + \sum_{n}^{\infty} |c_\nu|^{\frac{p}{p-1}} < \varrho_6 \lambda' n^{-\frac{\alpha p}{p-1}}, \qquad \left(\lambda' = \lambda^{\frac{1}{p-1}}\right),$$

und insbesondere

$$(4') \qquad \sum_{n}^{\infty} |c_\nu|^{\frac{p}{p-1}} < \varrho_6 \lambda' n^{-\frac{\alpha p}{p-1}}.$$

Ich wende nun die bekannte Ungleichung an

$$\frac{1}{k}\sum_{1}^{k} u_\nu \leqq \left(\frac{1}{k}\sum_{1}^{k} u_\nu^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \gamma \geqq 1, \qquad u_\nu \geqq 0;$$

dann ist für $n_2 > n_1$, $\gamma = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{1}{k}$

$$\frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{1+n_1}^{n_2} |c_\nu|^k \leqq \left(\frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{1+n_1}^{n_2} |c_\nu|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)k}{p}}, \qquad k \leqq \frac{p}{p-1},$$

und nach (4′)

$$\frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{1+n_1}^{n_2} |c_\nu|^k < \left[\frac{1}{n_2 - n_1} \varrho_6 \lambda' n_1^{-\frac{\alpha p}{p-1}}\right]^{\frac{(p-1)k}{p}}$$

Es ist also

$$\sum_{1+n_1}^{n_2} |c_\nu|^k < (n_2 - n_1)^{1 - \frac{(p-1)k}{p}} (\varrho_6 \lambda')^{\frac{(p-1)k}{p}} n_1^{-\alpha k};$$

ich setze hier $n_1 = 2^\mu$, $n_2 = 2^{\mu+1}$, dann wird

$$(5) \qquad \sum_{1+2^\mu}^{2^{\mu+1}} |c_\nu|^k < 2^{\mu\left(1 - \frac{p-1}{p}k\right) - \alpha\mu k} (\varrho_6 \lambda')^{\frac{p-1}{p}k} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

4) F. Hausdorff, 3.

Nun sei $\alpha > 0$ und $1 - \frac{p-1}{p} k - \alpha k < 0$, das heißt

$$\frac{p}{p-1+\alpha p} < k;$$

dann folgt aus (5) die Konvergenz der Reihe $\sum |c_\nu|^k$. Somit gilt der

Satz 2. *Es sei* $1 < p \leqq 2$, $0 < \alpha < 1$, *und*

$$\int_0^{2\pi} |f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)|^p \, dx = O(t^{\alpha p});$$

dann ist die mit den Fourierschen Koeffizienten c_ν *gebildete Reihe* $\sum |c_\nu|^k$ *konvergent für* $k > \frac{p}{p(1+\alpha)-1}$. [5])

Für $k = \frac{p}{p(1+\alpha)-1}$ kann die Reihe divergieren; sei z. B.

$$f(x) = |x|^{\alpha - \frac{1}{p}}, \qquad -\pi < x < \pi;$$

dann ist offenbar $\alpha p - 1 > -1$, und [6])

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t, x)|^p \, dx = O(t^{\alpha p}),$$

während die Fourierschen Koeffizienten im Falle $\alpha p \neq 1$ die Größenordnung $\nu^{\frac{1}{p} - \alpha - 1}$ haben, so daß $\sum |c_\nu|^{\frac{p}{(1+\alpha)p-1}}$ divergiert.

Für den Fall $\alpha p = 1$, also $k = 1$ liefert ein Beispiel die Funktion

$$f(x) = 1 \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi, \qquad f(x) = -1 \quad \text{für} \quad -\pi < x < 0.$$

Jetzt ist offenbar

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t, x)|^p \, dx = O(t),$$

und die Fourierschen Koeffizienten haben die Größenordnung $\frac{1}{\nu}$, somit ist $\sum |c_\nu|$ divergent.

Korollar zu Satz 2. Sei $f(x)$ absolut stetig und $|f'(x)|^p$ integrierbar; dann ist (Lp) mit $\alpha = 1$ erfüllt, so daß $\sum |c_\nu|^k$ für $k > \frac{p}{2p-1}$ konvergiert.

Es ist nämlich

$$\varphi(t, x) = \int_0^{2t} [f'(x+\tau) - f'(x-\tau)] \, d\tau,$$

---

[5]) Unter der weiteren Voraussetzung $\alpha p > 1$ bei Hardy und Littlewood, 2, Theorem 8.

[6]) Vgl. Hardy und Littlewood, 2.

also

$$|\varphi(t,x)|^p \leqq (2t)^{p-1} \int_0^{2t} |f'(x+\tau) - f'(x-\tau)|^p \, d\tau$$

und

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(t,x)|^p dx \leqq (2t)^{p-1} \int_0^{2t} \left(\int_0^{2\pi} |f'(x+\tau) - f'(x-\tau)|^p dx \right) d\tau = O(t^p).$$

Qu. e. d.

Insbesondere ist $\sum |c_\nu|$ konvergent $\left(\text{wegen } \frac{p}{2p-1} < 1\right)$; dies hat schon Herr Tonelli mit Hilfe des Hausdorffschen Satzes bewiesen [7]; auch das obige Korollar kann auf diese Weise gewonnen werden.

Zusatz. Die Bedingung (L) ist gleichbedeutend mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^4 |c_\nu|^2 = \lambda O(n^{4-2\alpha}).$$

Zunächst kann man nämlich für (L) schreiben

$$\text{(L}'\text{)} \qquad 16\pi \sum |c_\nu|^2 \sin^4 \nu t \leqq \lambda t^{2\alpha}, \qquad t > 0;\text{[8]}$$

hieraus folgt für $t = \frac{\pi}{2n}$, $n > 1$,

$$\sum_1^n |c_\nu|^2 \sin^4 \nu \frac{\pi}{2n} < \lambda \varrho_7 n^{-2\alpha},$$

und wegen $\sin x > \frac{2}{\pi} x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\text{(6)} \qquad \sum_1^n \nu^4 |c_\nu|^2 < \lambda \varrho_8 n^{4-2\alpha}, \qquad n > 1.$$

Umgekehrt, wenn (6) gilt, so sei bei gegebenem $0 < t < 1$

$$\frac{1}{t} \leqq n < \frac{1}{t} + 1 < \frac{2}{t};$$

dann ist

$$\sum_1^n |c_\nu|^2 \sin^4 \nu t \leqq \sum_1^n |c_\nu|^2 \nu^4 t^4 < \lambda \varrho_8 t^4 n^4 \cdot n^{-2\alpha} < \lambda \varrho_9 n^{-2\alpha}$$

und

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+s} |c_\nu|^2 \sin^4 \nu t \leqq \sum_{n+1}^{n+s} |c_\nu|^2.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\sum_1^n |c_\nu|^2 \cdot \nu^4 = u_n,$$

---

[7]) Tonelli, 4.

[8]) Vgl. Szász, 1, S. 148.

so ist

$$\sum_{n+1}^{n+s} |c_\nu|^2 = \sum_{n+1}^{n+s} (u_\nu - u_{\nu-1}) \nu^{-4}$$

$$= -\frac{u_n}{(n+1)^4} + \sum_{n+1}^{n+s-1} u_\nu \left(\frac{1}{\nu^4} - \frac{1}{(\nu+1)^4}\right) + \frac{u_{n+s}}{(n+s)^4} < \lambda \varrho_{10} n^{-2\alpha},$$

also

$$\sum_{n+1}^{n+s} |c_\nu|^2 < \lambda \varrho_{10} t^{2\alpha} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Somit ist mit Rücksicht auf (L′) der Zusatz bewiesen.

Literatur.

1. O. Szász, Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen, Sitzungsber. d. Akademie München 1922, S. 135–150.
2. G. H. Hardy und J. E. Littlewood, A convergence criterion for Fourier series, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 612–634.
3. F. Hausdorff, Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen, Math. Zeitschr. **16** (1923), S. 163–169.
4. L. Tonelli, Sulla convergenza assoluta delle serie di Fourier, Atti della Reale Accad. Naz. dei Lincei 1925, serie 6, Rendic. Classe di Scienze fisiche, mat. e nat. 2, p. 145–149.

(Eingegangen am 17. 7. 1928.