

# Über das Geschlecht von Knoten.

Von

H. Seifert in Dresden.

---

Im dreidimensionalen euklidischen Raum liege ein Knoten  $\mathfrak{k}$ , das ist ein aus endlich vielen geradlinigen Strecken bestehender doppel­punkt­freier geschlossener Streckenzug. Bekanntlich kann man in  $\mathfrak{k}$  eine singularitätenfreie orientierbare Fläche  $\mathfrak{F}$  einspannen, d. h. es gibt eine Fläche  $\mathfrak{F}$ , die der Kugel mit  $h$  Henkeln und einem Loch homöomorph ist, so daß der Lochrand gerade vom Knoten  $\mathfrak{k}$  gebildet wird. Unter allen Flächen, die sich in  $\mathfrak{k}$  einspannen lassen, betrachten wir die mit einer möglichst kleinen Henkelzahl. Diese minimale Henkelzahl heißt das *Geschlecht des Knotens*, das übrigens nichts zu tun hat mit dem Geschlecht der unverknoteten geschlossenen Flächen, auf die sich  $\mathfrak{k}$  doppel­punkt­frei legen läßt und wonach man die Knoten in Torusknoten, Brezelknoten usw. einteilt (vgl. Satz 4). Dann und nur dann, wenn das Geschlecht 0 ist, ist  $\mathfrak{k}$  in eine Kreislinie deformierbar. Es ist ein ungelöstes Problem der Knotentheorie, das Geschlecht eines beliebig vorgegebenen Knotens zu bestimmen.

Im folgenden sollen nun einige Beziehungen zwischen den Homologiegruppen der Überlagerungen des Knotenaußenraumes und dem Geschlecht des Knotens angegeben werden, die wenigstens untere Schranken für das Geschlecht des Knotens liefern (§ 1), und die in vielen Fällen, z. B. bei den Torusknoten sowie bei allen Knoten der Alexander-Briggsschen Knotentabelle eine genaue Bestimmung des Geschlechtes ermöglichen (§ 2). Die Methoden des § 1 werden in § 3 zur Untersuchung der Struktur der Alexanderschen Polynom­invariante benutzt. Es wird die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß ein ganzzahliges Polynom die Polynom­invariante eines Knotens ist, und die Aufgabe gelöst, zu vorgegebener Polynom­invariante alle möglichen Knoten zu konstruieren. Insbesondere wird in § 4 ein Knoten angegeben, der in der Polynom­invariante und in den Homologiegruppen der sämtlichen zyklischen Überlagerungs­mannigfaltigkeiten mit der Kreislinie übereinstimmt und doch nicht in die Kreislinie deformierbar ist.

## § 1.

**Untere Schranken für das Geschlecht eines Knotens.**

Zuerst sei eine Methode angegeben, nach der man *in jeden durch seine ebene Projektion gegebenen Knoten eine orientierbare Fläche einspannen kann*<sup>1)</sup>. Wir markieren auf  $\mathfrak{f}$  die Punkte, die den Doppelpunkten (Überkreuzungspunkten) der Projektion entsprechen.  $\mathfrak{f}$  zerfällt hierdurch in  $2d$  „Teilstrecken“, wenn  $d$  die Anzahl der Doppelpunkte der Projektion ist. Die Teilstrecken werden alle mit einer festen Orientierung versehen, die einer bestimmten Durchlaufung von  $\mathfrak{f}$  entspricht. Ferner werden je zwei zugeordnete Teilpunkte auf  $\mathfrak{f}$ , das sind solche Punkte, die über demselben Doppelpunkt der Projektion liegen, durch eine geradlinige „Verbindungsstrecke“ verbunden. Der aus den Teilstrecken und Verbindungsstrecken bestehende Streckenkomplex wird nun auf folgende Weise in „Kreise“ eingeteilt. Man durchläuft eine Teilstrecke, wie es die festgesetzte Orientierung angibt, danach die an den Endpunkt der Teilstrecke angrenzende Verbindungsstrecke, darauf die von dem neuen Knotenpunkt ausgehende Teilstrecke, dann wieder eine Verbindungsstrecke und so fort. Schließlich kommt man einmal zum Ausgangspunkt zurück. Gibt es danach eine noch nicht durchlaufene Teilstrecke, so gibt sie zu einem neuen Kreise Anlaß. So mögen sich im ganzen  $f$  Kreise bilden lassen. Jede Teilstrecke

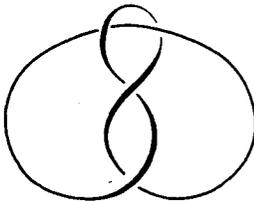


Fig. 1.

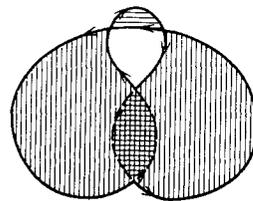


Fig. 2.

kommt in genau einem Kreise vor, jede Verbindungsstrecke dagegen in zweien, von denen sie in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird. Diese Kreise projizieren sich in die Ebene in doppelpunktfreie Polygone, die einander offenbar nicht durchsetzen. Es wird nun in jeden Kreis ein Elementarflächenstück eingespannt, wobei man annehmen kann, daß sich jedes Elementarflächenstück, abgesehen von den Verbindungsstrecken, eindeutig in die Ebene projiziert und daß zwei verschiedene Elementarflächenstücke keinen mittleren Punkt gemeinsam haben. (Im Falle des Knotens der Fig. 1 ist  $f = 3$ , und die Elementarflächenstücke sind in der Fig. 2 in der Projektion angedeutet.)

<sup>1)</sup> Eine andere Methode findet sich bei F. Frankl und L. Pontrjagin, Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie. *Math. Annalen* 102 (1930), S. 785.

Die  $f$  Elementarflächenstücke bilden zusammen eine in den Knoten eingespannte Fläche. Sie ist orientierbar, da jede Verbindungsstrecke von den beiden zugehörigen Kreisen in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird. Die Eulersche Charakteristik der Fläche ist offenbar

$$N = -2d + 3d - f = d - f,$$

ihr Geschlecht (Henkelzahl) also, da es sich um eine Fläche mit einem Loch handelt,

$$h = \frac{N+1}{2} = \frac{d-f+1}{2}.$$

So hat man in dem in der Fig. 1 gezeichneten Knoten  $d = 4$ ,  $f = 3$ , also  $h = 1$ ; die eingespannte Fläche ist somit eine gelochte Ringfläche, und das Geschlecht des Knotens ist, da es nicht  $= 0$  ist,  $= 1$ .

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Knotenüberlagerungen zu. Wir schließen den euklidischen Raum, in dem  $\mathfrak{k}$  liegt, durch einen unendlich fernen Punkt zur 3-Sphäre  $\mathfrak{S}$  und bilden die  $g$ -blättrige zyklische Überlagerung  $\mathfrak{M}_g$  von  $\mathfrak{S}$ , die den Knoten  $\mathfrak{k}$  zur einzigen Verzweigungslinie hat. Über jedem Punkte von  $\mathfrak{S}$  liegen dann  $g$  Punkte von  $\mathfrak{M}_g$ , ausgenommen die Punkte von  $\mathfrak{k}$ , über denen je ein Punkt von  $\mathfrak{M}_g$  liegt. Einem geschlossenen,  $\mathfrak{k}$  nicht treffenden Wege  $w$  von  $\mathfrak{S}$  entspricht dann und nur dann ein geschlossener Weg in  $\mathfrak{M}_g$ , wenn die Verschlingungszahl von  $w$  mit  $\mathfrak{k}$  durch  $g$  teilbar ist. Durch diese Eigenschaften ist  $\mathfrak{M}_g$  eindeutig bestimmt<sup>2)</sup>. Offenbar gestattet  $\mathfrak{M}_g$  eine zyklische Deckbewegungsgruppe der Ordnung  $g$ , bei der sich die über einem Punkt von  $\mathfrak{S}$  liegenden Punkte zyklisch vertauschen. Wir zeichnen eine bestimmte Umschlingung des Knotens als die positive aus und bezeichnen die erzeugende Deckbewegung, die einen Punkt in den nächsten überführt, mit  $x$  und dementsprechend die über einem Punkte von  $\mathfrak{S}$  liegenden Punkte mit

$$P, xP, \dots, x^{g-1}P.$$

Spannt man nun in den Knoten  $\mathfrak{k}$  eine orientierbare Fläche vom Geschlecht  $h$  (das größer als das Geschlecht des Knotens sein kann) ein, so entsprechen ihr in  $\mathfrak{M}_g$   $g$  homöomorphe Flächen

$$\mathfrak{F}, x\mathfrak{F}, \dots, x^{g-1}\mathfrak{F},$$

<sup>2)</sup> Vergl. H. Seifert u. W. Threlfall, Topologie (Leipzig 1934), § 77. Dort wird die *unverzweigte* Überlagerung des „Knotenaußenraumes“ betrachtet; hier handelt es sich um die *verzweigte* Überlagerung, bei der der Knoten Verzweigungslinie ist. Die Homologiegruppen der beiden Räume unterscheiden sich durch eine freie Erzeugende. — Die  $g$ -blättrige unverzweigte zyklische Überlagerung, und daher auch die hier benutzte verzweigte, läßt sich ebenso gut wie mit Hilfe der Verschlingungszahlen dadurch charakterisieren, daß die Deckbewegungsgruppe zyklisch von der Ordnung  $g$  ist. Vgl. das angeführte Buch S. 281.

die als gemeinsamen Rand die über  $\mathfrak{f}$  liegende Kurve haben, die wiederum mit  $\mathfrak{f}$  bezeichnet sei.  $\mathfrak{M}_g$  zerfällt durch diese Flächen in  $g$  Teile, sog. Blätter,

$$\overline{\mathfrak{M}}, x\overline{\mathfrak{M}}, \dots, x^{g-1}\overline{\mathfrak{M}},$$

das sind berandete Mannigfaltigkeiten, die der Reihe nach von  $\mathfrak{F}$  und  $x\mathfrak{F}$ ,  $x\mathfrak{F}$  und  $x^2\mathfrak{F}$ , ...,  $x^{g-1}\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{F}$  berandet werden. Ein einzelnes Blatt wird offenbar auch dadurch erhalten, daß man  $\mathfrak{S}$  längs der in  $\mathfrak{f}$  eingespannten Fläche „aufschneidet“.

Wir berechnen jetzt die Homologiegruppe von  $\mathfrak{M}_g$  und wählen zu dem Zwecke auf  $\mathfrak{F}$   $2h$  geschlossene Kurven

$$a_1, a_2, \dots, a_{2h},$$

die auf  $\mathfrak{F}$  homolog unabhängig seien, also etwa  $h$  Rückkehrschrittpaare.

$$x^i a_1, x^i a_2, \dots, x^i a_{2h}$$

seien die entsprechenden Kurven auf  $x^i\mathfrak{F}$ . Wir ermitteln nun zuerst die Homologiegruppe des ersten Blattes  $\overline{\mathfrak{M}}$ .  $\overline{\mathfrak{M}}$  wird von den Flächen  $\mathfrak{F}$  und  $x\mathfrak{F}$  berandet, auf denen die  $4h$  Kurven

$$a_1, a_2, \dots, a_{2h}, x a_1, x a_2, \dots, x a_{2h}$$

liegen. Die Fig. 3 zeigt die Oberfläche von  $\overline{\mathfrak{M}}$  für  $h = 1$ . ( $\overline{\mathfrak{M}}$  selbst ist *nicht* mit dargestellt;  $\overline{\mathfrak{M}}$  ist also nicht etwa das Innere oder Äußere

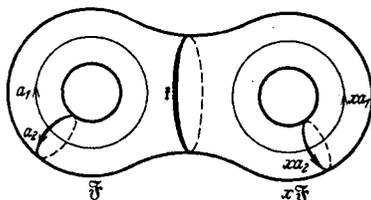


Fig. 3.

der Doppelringfläche). Es ist leicht zu sehen, daß diese  $4h$  Kurven die Homologiegruppe  $\mathfrak{H}$  von  $\overline{\mathfrak{M}}$  erzeugen. Ist nämlich  $C$  eine beliebige geschlossene Kurve in  $\overline{\mathfrak{M}}$ , so ist sie in der 3-Sphäre  $\mathfrak{S}$ , die durch Identifizieren von  $\mathfrak{F}$  mit  $x\mathfrak{F}$  entsteht, nullhomolog, also Rand einer Fläche  $q$ . In  $\overline{\mathfrak{M}}$  erscheint  $q$  als eine Fläche, deren Rand aus  $C$  und einer (unter Umständen aus mehreren oder null Teilen bestehenden) Kurve  $C'$  des Randes von  $\overline{\mathfrak{M}}$  sich zusammensetzt. Also ist  $C \sim -C'$  und somit homolog einer linearen Kombination der  $a_k$  und  $x a_k$ . Da übrigens  $C'$  beim Identifizieren von  $\mathfrak{F}$  und  $x\mathfrak{F}$  verschwindet, so besteht genauer eine Relation der Form

$$C \sim \sum_{k=1}^{2h} \alpha_k (a_k - x a_k).$$

Wendet man diese Überlegung insbesondere auf die Kurven  $a_1, a_2, \dots, a_{2h}$  an, so ergeben sich die Relationen

$$(1) \quad a_i - \sum_{k=1}^{2h} \gamma_{ik} (a_k - x a_k) \sim 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2h).$$

Dafür kann man auch schreiben

$$(\bar{1}) \quad \sum_{k=1}^{2h} \alpha_{ik} a_k + \sum_{k=1}^{2h} \beta_{ik} x a_k \sim 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2h),$$

wobei die Summe der quadratischen Matrizen  $(\alpha_{ik}) = \mathbf{A}$  und  $(\beta_{ik}) = \mathbf{B}$  die Einheitsmatrix

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{E}$$

ist.

Wir behaupten, daß die Relationen (1) bereits ein vollständiges Relationensystem für die Homologiegruppe  $\bar{\mathfrak{H}}$  des Blattes  $\bar{\mathfrak{M}}$  bilden. Es sei nämlich

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{2h} \alpha'_{ik} a_k + \sum_{k=1}^{2h} \beta'_{ik} x a_k \sim 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ein vollständiges System unabhängiger Relationen, unabhängig in dem Sinne, daß keine lineare Beziehung mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten zwischen diesen Relationen besteht, oder was dasselbe ist, daß die  $m$ -zeilige und  $4h$ -spaltige Koeffizientenmatrix  $(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$  den Rang  $m$  hat. Dann muß zunächst  $m \leq 2h$  sein, denn die Homologiegruppe  $\bar{\mathfrak{H}}$  hat mindestens so viele freie Erzeugende wie die Randfläche von  $\bar{\mathfrak{M}}$  Henkel hat, also  $2h^3$ ). Da andererseits die  $2h$  Relationen  $(\bar{1})$  wegen  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{E}$  linear unabhängig sind, so ist  $m \geq 2h$ , also  $m = 2h$ . Wegen der Vollständigkeit des Relationensystems (2) ist  $(\bar{1})$  eine Folge von (2); es gibt also eine quadratische Matrix  $\Xi$ , für die gilt

$$\Xi \mathbf{A}' = \mathbf{A}, \quad \Xi \mathbf{B}' = \mathbf{B},$$

also

$$\Xi (\mathbf{A}' + \mathbf{B}') = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

Geht man zu den Determinanten über, so ergibt sich hieraus

$$|\Xi| = \pm 1.$$

und deshalb ist auch umgekehrt (2) eine Folge von  $(\bar{1})$  und damit von (1).

Um hieraus die Homologiegruppe  $\mathfrak{H}_g$  der  $g$ -blättrigen Überlagerung  $\mathfrak{M}_g$  zu erhalten, benutzen wir den Satz von der Homologiegruppe eines zusammengesetzten Komplexes. Er sagt aus, daß die Homologiegruppe eines Komplexes  $\mathfrak{K}$ , der aus zwei Teilkomplexen  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  mit zusammenhängendem Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  besteht, die direkte Summe der Homologiegruppen von  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  ist, in der man noch je zwei Elemente, die der-

<sup>3)</sup> Vergl. das S. 573 angeführte Topologiebuch, S. 223, Satz IV.

selben Kurve in  $\mathfrak{D}$  entsprechen, zu identifizieren hat. Wendet man diesen Satz  $(g - 1)$ -mal auf die Teilkomplexe  $\overline{\mathfrak{M}}$ ,  $x\overline{\mathfrak{M}}$ , ...,  $x^{g-1}\overline{\mathfrak{M}}$  an, aus denen  $\mathfrak{M}_g$  besteht, so ergeben sich als Erzeugende von  $\mathfrak{S}_g$  die  $2hg$  Kurven

$$a_1, \dots, a_{2h}, \dots, x^{g-1}a_1, \dots, x^{g-1}a_{2h},$$

während die Relationen durch formale Multiplikation der Relationen (1) mit  $x, x^2, \dots, x^{g-1}$  erhalten werden. Dabei ist  $x^g a_v = a_v$  zu setzen. Bezeichnet man in (1) die Matrix  $(\gamma_{ik})$  mit  $\Gamma$ , so ist hiernach die Koeffizientenmatrix des Relationensystems die folgende  $g$ -reihige Matrix, deren Elemente selbst  $2h$ -reihige Matrizen sind (Nullen stehen für  $2h$ -reihige Matrizen aus lauter Nullen):

$$(3) \quad \begin{pmatrix} E - \Gamma & \Gamma & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & E - \Gamma & \Gamma & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & E - \Gamma & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Gamma & 0 & 0 & \cdot & E - \Gamma \end{pmatrix}.$$

Wir werden nun durch Umformungen der Matrix (3) ein äquivalentes Relationensystem zwischen denselben  $2gh$  Erzeugenden  $x^i a_k$  ableiten, aus dem hervorgehen wird, daß bereits die  $2h$  Kurven  $a_1, \dots, a_{2h}$  die Homologiegruppe  $\mathfrak{S}_g$  erzeugen. Dazu betrachten wir zunächst die  $(g - n + 1)$ -reihige Matrix

$$(4^n) \quad \begin{pmatrix} -(y - 1)^n & y^n & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 - y & y & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 - y & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & 0 & 0 & \cdot & 1 - y \end{pmatrix},$$

in der  $y$  eine Unbestimmte bedeutet.

Wir addieren die mit dem Polynom  $Q = 1 + y + \dots + y^{n-1}$  multiplizierte zweite Zeile zur ersten und erhalten:

$$\begin{pmatrix} -(y - 1)^n & 1 & Qy & \cdot & 0 \\ 0 & 1 - y & y & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 - y & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & 0 & 0 & \cdot & 1 - y \end{pmatrix}.$$

Addition der mit  $y - 1$  multiplizierten ersten Zeile zur zweiten und Vertauschung der ersten beiden Spalten liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & -(y - 1)^n & Qy & \cdot & 0 \\ 0 & -(y - 1)^{n+1} & y^{n+1} & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 - y & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & y & 0 & \cdot & 1 - y \end{pmatrix}.$$

Streicht man darin die erste Zeile und die erste Spalte, so ergibt sich gerade die Matrix  $(4^{n+1})$ , auf die man dieselben Umformungen anwenden kann. So gelangt man, von der Matrix  $(4^1)$  ausgehend, schließlich zu der Matrix

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdot & * \\ 0 & 1 & * & \cdot & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -(y-1)^g + y^g \end{pmatrix}.$$

Darin bedeuten die Sterne nicht näher zu bezeichnende Polynome. Jeder elementaren Umformung der Polynommatrix  $(4^1)$  entspricht nun in der ganzzahligen Matrix (3) eine Umformung, die zwar keine elementare Umformung ist, sich aber aus elementaren Umformungen zusammensetzt. Dem Übergang von  $(4^1)$  zu (5) entspricht so der Übergang von (3) zu der Matrix

$$(6) \quad \begin{pmatrix} E & * & * & \cdot & * \\ 0 & E & * & \cdot & * \\ 0 & 0 & E & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -(\Gamma - E)^g + \Gamma^g \end{pmatrix}.$$

Sie läßt sich ebenso wie die Matrix (3) als das Koeffizientenschema eines Relationensystems für die Homologiegruppe  $\mathfrak{S}_g$  auffassen. Da bei dem Übergang von (3) zu (6) neben den Zeilenumformungen nur Spaltenvertauschungen angewendet wurden, so stehen im oberen Eingang der Matrix (6) bis auf die Reihenfolge dieselben Kurven wie in der Matrix (3). Genauer sind es der Reihe nach die Kurven

$$x^i a_1, \dots, x^i a_{2h} \quad (i = 1, \dots, g-1, 0).$$

Aus der Matrix (6) geht hervor, daß die Erzeugenden  $x^i a_1, \dots, x^i a_{2h}$  ( $i = 1, \dots, g-1$ ) sich alle durch  $a_1, \dots, a_{2h}$  ausdrücken lassen und daß die Relationen zwischen den letzteren durch die Koeffizientenmatrix

$$\Gamma^g - (\Gamma - E)^g$$

gegeben sind.

Wir fassen das bisherige Ergebnis zusammen in den

**Satz 1:** *Läßt sich in einen Knoten  $\mathfrak{k}$  eine Fläche vom Geschlecht  $h$  einspannen und ist  $\mathfrak{F}$  eine von den  $g$  darüberliegenden Flächen des  $g$ -blättrigen zyklischen Überlagerungsraumes  $\mathfrak{M}_g$ , so ist eine Homologiebasis  $a_1, \dots, a_{2h}$  von  $\mathfrak{F}$  zugleich ein System von Erzeugenden der Homologiegruppe  $\mathfrak{S}_g$  von  $\mathfrak{M}_g$ . Bezeichnet also  $m_g$  die minimale Erzeugendenanzahl von  $\mathfrak{S}_g$  und ist  $\bar{h}$  das Geschlecht des Knotens  $\mathfrak{k}$ , so gilt die Ungleichung*

$$(7) \quad m_g \leq 2\bar{h}.$$

Die Relationen der Homologiegruppe  $\mathfrak{S}_g$  sind durch eine  $2h$ -reihige quadratische Matrix der Form

$$(8) \quad \Gamma^g - (\Gamma - E)^g$$

gegeben. Die von  $g$  unabhängige Matrix  $\Gamma$  wird dabei aus dem Relationensystem (1) der Homologiegruppe eines einzelnen Blattes erhalten und  $E$  bezeichnet die  $2h$ -reihige Einheitsmatrix.

Da die Minimalzahl  $m_g$  der Erzeugenden gleich der Summe aus der Bettischen Zahl und der Anzahl der Torsionskoeffizienten der Dimension 1 der  $g$ -blättrigen Überlagerungsmannigfaltigkeit ist, so ist die Ungleichung (7) gleichbedeutend mit dem

**Satz 2:** Die Summe aus der Bettischen Zahl und der Anzahl der Torsionskoeffizienten der Dimension 1 einer beliebigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}_g$  eines Knotens ist höchstens gleich dem doppelten Geschlecht des Knotens.

Würde man an Stelle der  $g$ -blättrigen Überlagerung die unendlichblättrige betrachten, so würden sich als Relationen der Homologiegruppe diejenigen ergeben, die aus (1) durch Multiplikation mit einer beliebigen positiven oder negativen Potenz von  $x$  hervorgehen. Faßt man die Homologiegruppe als eine Gruppe mit Operatoren auf, wobei der Operatorenbereich der Integritätsbereich der Polynome in  $x$  und  $x^{-1}$  mit ganzzahligen Koeffizienten ist, so sind  $a_1, \dots, a_{2h}$  die Erzeugenden und (1) die Relationen. Die Determinante der „Koeffizientenmatrix“  $E - \Gamma + x\Gamma$  ist dann (bis auf einen unwesentlichen Faktor  $\pm x^n$ , eine Einheit des Integritätsbereiches) eine Invariante der Gruppe mit Operatoren und daher eine Knoteninvariante. Den Faktor  $\pm x^n$  kann man so wählen, daß keine negativen Potenzen von  $x$  auftreten und das konstante Glied positiv ausfällt. Die so normierte Determinante ist die von Alexander in die Knotentheorie eingeführte „Polynom-invariante“  $\Delta(x)$ . Da die Determinante  $2h$ -reihig ist, so ist der Grad des Polynoms  $\Delta(x)$  höchstens gleich  $2h$ , und man hat den

**Satz 3:** Der Grad der Alexanderschen Polynom-invariante  $\Delta(x)$  ist höchstens gleich dem doppelten Geschlecht des Knotens.

Die in diesem Paragraphen angegebene Ableitung der Homologiegruppe einer  $g$ -blättrigen Überlagerungsmannigfaltigkeit kann auch zur praktischen Ermittlung der Homologiegruppe benutzt werden, was besonders bei Knoten mit hoher Überschneidungszahl, aber niedrigem Geschlecht Vorteile bietet (vgl. § 4).

## § 2.

## Die Geschlechter spezieller Knoten.

Die Polynom invarianten  $\Delta(x)$  sind für die Knoten mit bis zu neun Überkreuzungen ermittelt worden<sup>4)</sup>. Spannt man in diese Knoten nach dem in § 1 angegebenen Verfahren Flächen ein, so zeigt es sich, daß das Geschlecht der eingespannten Fläche bei 77 Knoten gleich dem halben Grad des Polynoms  $\Delta(x)$  ist. Bei den Knoten

$$8_{20}, 8_{21}, 9_{42}, 9_{45}, 9_{46}, 9_{47}, 9_{48}$$

ist dagegen das Geschlecht der eingespannten Fläche bzw.

$$3, 3, 3, 3, 2, 3, 2,$$

während der halbe Grad des Polynoms  $\Delta(x)$

$$2, 2, 2, 2, 1, 2, 3$$

beträgt.

Bei dem Knoten  $9_{48}$  ist also der halbe Grad von  $\Delta(x)$  größer als das Geschlecht der eingespannten Fläche, im Widerspruch zu Satz 3. In der Tat erweist sich der in der Alexanderschen Tabelle verzeichnete Wert von  $\Delta(x)$  als unrichtig für die Knoten  $9_{47}$  und  $9_{48}$ . Die richtigen Werte lauten

$$9_{47}: \Delta(x) = 1 - 4x + 6x^2 - 5x^3 + 6x^4 - 4x^5 + x^6,$$

$$9_{48}: \Delta(x) = 1 - 7x + 11x^2 - 7x^3 + x^4.$$

Es bleiben damit nur die fünf Knoten  $8_{20}, 8_{21}, 9_{42}, 9_{45}, 9_{46}$ , bei denen das Geschlecht der eingespannten Fläche um 1 größer ist als die halbe Gradzahl von  $\Delta(x)$ . In diesen Fällen kann man die Knotenprojektion so abändern, daß sich das Geschlecht der eingespannten Fläche um eine Einheit erniedrigt<sup>5)</sup>. Bei allen Knoten der Alexander-Briggsschen Tabelle ist somit auf Grund von Satz 3 das Knotengeschlecht durch die halbe Gradzahl der Alexanderschen Polynom invarianten  $\Delta(x)$  gegeben.

<sup>4)</sup> Man findet sie bei J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links. Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928), S. 305, und (mit einer Verbesserung versehen) bei K. Reidemeister, Knotentheorie (Berlin 1932), S. 41.

<sup>5)</sup> Hierauf machte mich Herr C. Weber aufmerksam. Die umgeformten Knotenprojektionen sind:

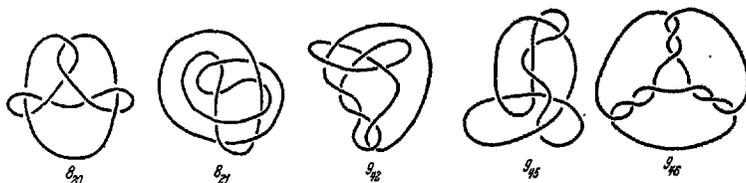


Fig. 4.

Bei den bisher angegebenen Knoten ist das Geschlecht in keinem Falle größer als 4. Knoten beliebigen Geschlechts finden sich dagegen unter den Torusknoten, die wir jetzt untersuchen wollen. Der Torusknoten  $p, q$  ist eine auf einer Rotationsringfläche gelegene, doppelpunktfreie geschlossene Kurve, die einen Meridiankreis der Ringfläche  $p$  mal und einen Breitenkreis  $q$  mal gleichsinnig durchsetzt.  $p$  und  $q$  sind also teilerfremd. In der üblichen Projektion hat der Knoten  $(p-1)q$  Überkreuzungen. (Die Fig. 5 zeigt den Fall  $p=3, q=4$ ).

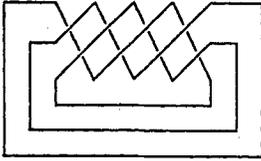


Fig. 5.

Die oben beschriebene Konstruktion einer eingespannten Fläche führt zu einer Zerlegung der Knotenprojektion in  $p$  Kreise und damit zu einer Fläche vom Geschlecht  $\frac{(p-1) \cdot q - p + 1}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ . Wir behaupten, daß sich keine Fläche niedrigeren Geschlechts einspannen läßt, daß also der Satz gilt:

Satz 4: Der Torusknoten  $p, q$  hat das Geschlecht  $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ .

Die Richtigkeit der Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 2 und der folgenden Tatsache:

Die  $pq$ -blättrige zyklische Überlagerung des Torusknotens  $p, q$  hat zur Homologiegruppe die freie Abelsche Gruppe von  $(p-1)(q-1)$  Erzeugenden.

Um die  $pq$ -blättrige Überlagerung des Knotens zu ermitteln, bedenken wir, daß die dreidimensionale Sphäre  $\mathfrak{S}$ , in der der Knoten  $\mathfrak{k}$  liegt, eine Faserung durch Torusknoten gestattet, in der  $\mathfrak{k}$  als gewöhnliche Faser auftritt<sup>6)</sup>. Daher ist auch die  $pq$ -blättrige Überlagerungsmannigfaltigkeit ein gefasertes Raum  $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{M}_{p,q}$ . In  $\mathfrak{S}$  gibt es zwei Ausnahmefasern  $H_p$  und  $H_q$  mit den Vielfachheiten  $p$  und  $q$ .  $H$  bezeichne eine beliebige gewöhnliche, vom Knoten  $\mathfrak{k}$  verschiedene Faser in  $\mathfrak{S}$ . Die Verschlingungszahlen von  $H, H_p$  und  $H_q$  mit  $\mathfrak{k}$  sind  $pq, q, p$  (l. c. S. 211). Somit muß man  $H$  einmal,  $H_p$   $p$  mal,  $H_q$   $q$  mal durchlaufen, um im Überlagerungsraum  $\tilde{\mathfrak{S}}$  einen geschlossenen Weg zu beschreiben. Es liegen daher über  $H, H_p, H_q$  bzw.  $pq, q, p$  Fasern von  $\tilde{\mathfrak{S}}$ , während über dem Knoten  $\mathfrak{k}$ , der ja Verzweigungslinie ist, eine einzige Faser liegt. Da nun die Fasern von  $\mathfrak{S}$  und  $\tilde{\mathfrak{S}}$  eindeutig den Punkten der Zerlegungsflächen  $f$  und  $\tilde{f}$  entsprechen, so ist hiermit  $\tilde{f}$  als eine  $pq$ -blättrige Überlagerungsfläche von  $f$  erkannt. Die den Fasern  $\mathfrak{k}, H_p, H_q$  entsprechenden Punkte von  $f$  sind die drei Verzweigungspunkte. Wir berechnen die Eulersche Charakteristik von  $\tilde{f}$  und wählen zu dem Zweck eine simpliziale Zerlegung von  $f$ , in

<sup>6)</sup> Vgl. H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefasertes Räume, Acta math. 60 (1933), S. 159.

der die drei Verzweigungspunkte als Ecken auftreten. Es seien  $\alpha_0$  Ecken,  $\alpha_1$  Kanten und  $\alpha_2$  Dreiecke vorhanden. Sehen wir zunächst von den drei Verzweigungspunkten ab, so liegen über jedem Stück von  $\mathfrak{f}$   $p q$  Stücke von  $\tilde{\mathfrak{f}}$ . Über den Verzweigungspunkten aber liegen bzw. 1,  $q$ ,  $p$  Punkte von  $\tilde{\mathfrak{f}}$ .  $\tilde{\mathfrak{f}}$  hat daher

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_0 &= p q (\alpha_0 - 3) + 1 + p + q \text{ Ecken,} \\ \tilde{\alpha}_1 &= p q \alpha_1 \text{ Kanten,} \\ \tilde{\alpha}_2 &= p q \alpha_2 \text{ Dreiecke.}\end{aligned}$$

Die Eulersche Charakteristik von  $\tilde{\mathfrak{f}}$  ist also

$$\tilde{N} = -\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2 = p q (-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2) + 3 p q - 1 - p - q.$$

$\mathfrak{f}$  hat als Kugelfläche (l. c. S. 161) die Charakteristik  $-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = -2$ , so daß man erhält

$$\tilde{N} = p q - p - q - 1,$$

und folglich für das Geschlecht von  $\tilde{\mathfrak{f}}$

$$\frac{\tilde{N} + 2}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Die Homologiegruppe von  $\tilde{\mathfrak{S}}$  besitzt nun die Homologiegruppe von  $\tilde{\mathfrak{f}}$  zur Faktorgruppe (l. c. S. 201). Letztere ist eine freie Abelsche Gruppe, und die Zahl der Erzeugenden ist durch das doppelte Geschlecht von  $\tilde{\mathfrak{f}}$ , d. h. durch  $(p-1)(q-1)$  gegeben. Die Homologiegruppe von  $\tilde{\mathfrak{S}}$  besitzt also mindestens  $(p-1)(q-1)$  freie Erzeugende. Weitere Erzeugende kann es nicht geben, da durch Satz 2 die Zahl der Erzeugenden höchstens gleich dem doppelten Geschlecht des Knotens ist, letzteres ist aber höchstens gleich  $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ , da wir eine Fläche von diesem Geschlecht in den Knoten eingespannt haben. Damit ist alles bewiesen.

Bei der  $p q$ -blättrigen Überlagerung des Torusknotens  $p, q$  nimmt die *Bettische Zahl* den durch das Knotengeschlecht gegebenen maximalen Wert an. Es gibt aber auch Knoten beliebig hohen Geschlechts, bei denen die Anzahl der *Torsionskoeffizienten* einer passenden Überlagerung das Maximum erreicht und dementsprechend die Bettische Zahl gleich Null ist. Dies gilt für alle Torusknoten  $2, 2h+1$ . *Es ist nämlich das Geschlecht dieses Knotens*, wie bereits bewiesen wurde, *gleich  $h$* , während die  $(2h+1)$ -blättrige Überlagerung, wie wir zeigen werden,  $2h$  *Torsionskoeffizienten vom Werte 2 besitzt*.

Man kann dies beweisen, indem man die Fundamentalgruppe der Überlagerungsmannigfaltigkeit nach dem Verfahren von Reidemeister berechnet<sup>7)</sup>. Einen besseren Einblick in die Struktur der Überlagerungs-

<sup>7)</sup> K. Reidemeister, Knoten und Gruppen, Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 5 (1926), S. 7-23.

mannigfaltigkeit gewinnt man aber, wenn man sie als gefaserten Raum konstruiert.

Wir geben gleich das Ergebnis an und verifizieren nachträglich, daß es sich um den  $(2h+1)$ -fachen Überlagerungsraum handelt. Man nehme eine Kugelfläche  $\tilde{K}$  und schneide aus ihr am Äquator in gleichen Abständen  $2h+1$  gleich große kreisförmige Löcher heraus. Ebenso soll ein kleines Loch um den Nordpol ausgeschnitten werden. Die Randkreise der Löcher mögen der Reihe nach

$$\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{2h+1}, \tilde{Q}_{2h+2}$$

heißen und mit gleichartigen Orientierungen versehen sein. Wir betrachten dann das topologische Produkt  $\tilde{X}$  aus dieser  $(2h+2)$ -fach gelochten Kugelfläche und einer Kreislinie  $\tilde{H}$ . Es ist eine dreidimensionale, von  $2h+2$  Ringflächen berandete Mannigfaltigkeit. Auf die  $2h+1$  Ringflächen am Äquator wird je ein Vollring mit seiner Oberfläche aufgesetzt, und zwar so, daß der Meridiankreis des Vollringes

$$\tilde{M}_i \sim 2\tilde{Q}_i + \tilde{H} \quad (i = 1, 2, \dots, 2h+1)$$

wird. Ebenso wird die Ringfläche am Nordpol mit einem Vollring verschlossen, dessen Meridiankreis

$$\tilde{M}_{2h+2} \sim \tilde{Q}_{2h+2} - h\tilde{H}$$

sei. Die Homologiegruppe der entstehenden Mannigfaltigkeit  $\tilde{\mathfrak{S}}$  hat offenbar die Erzeugenden

$$\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{2h+2}, \tilde{H},$$

zwischen denen in  $\tilde{X}$  die Homologie

$$(9) \quad \tilde{Q}_1 + \dots + \tilde{Q}_{2h+2} \sim 0$$

besteht. Hierzu treten durch die Schließung mit den Vollringen die weiteren Homologien

$$(10) \quad 2\tilde{Q}_i + \tilde{H} \sim 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2h+1)$$

$$(11) \quad \tilde{Q}_{2h+2} - h\tilde{H} \sim 0.$$

Wir behaupten, daß  $\tilde{\mathfrak{S}}$  die  $(2h+1)$ -blättrige Überlagerungsmannigfaltigkeit des Torusknotens  $2, 2h+1$  ist.  $\tilde{\mathfrak{S}}$  ist nämlich, wie aus seiner Konstruktion hervorgeht, ein gefasertes Raum mit  $2h+1$  zweifachen Ausnahmefasern und mit der Kugel  $\tilde{K}$  als Zerlegungsfläche.  $\tilde{\mathfrak{S}}$  gestattet eine zyklische Gruppe der Ordnung  $2h+1$  von fasertreuen Selbstabbildungen, bei der sich die  $2h+1$  zweifachen Ausnahmefasern zyklisch vertauschen, während die dem Nordpol und Südpol entsprechenden gewöhnlichen Fasern in sich übergehen, und zwar bleibt die letztere punktweise fest. Um den gefaserten Raum  $\tilde{\mathfrak{M}}$  zu erhalten, der durch Identifizieren äquivalenter Punkte aus  $\tilde{\mathfrak{S}}$  hervorgeht, identifizieren wir zunächst die äquivalenten Punkte in  $\tilde{X}$ . Es ergibt sich das topologische Produkt  $\mathfrak{X}$

aus einem Kreis  $H$  und einer Kugel mit zwei Löchern. Der eine Lochrand ist das gemeinsame Bild der Kreise  $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{2h+1}$  und sei mit  $Q_1$  bezeichnet. Der Rand  $Q_{2h+2}$  des anderen Loches dagegen wird von dem Kreis  $\tilde{Q}_{2h+2}$  ( $2h+1$ ) mal überlagert. Die in  $\tilde{\mathfrak{S}}$  bestehenden Homologien  $(\tilde{10})$  und  $(\tilde{11})$  gehen daher auf  $\mathfrak{M}$  über in die Homologien

$$(10) \quad 2Q_1 + H \sim 0,$$

$$(11) \quad (2h+1)Q_{2h+2} - hH \sim 0.$$

Außerdem hat man offenbar

$$(9) \quad Q_1 + Q_{2h+2} \sim 0.$$

Die Homologie (11) besagt, daß die dem Nordpol entsprechende gewöhnliche Faser von  $\tilde{\mathfrak{S}}$  in eine  $(2h+1)$ -fache Ausnahmefaser von  $\tilde{\mathfrak{M}}$  übergeht.  $\mathfrak{M}$  hat also zwei Ausnahmefasern der Vielfachheiten 2 und  $2h+1$ , und da die Determinante des Relationensystems (9), (10), (11) gleich 1 ist, so liegt die durch Torusknoten 2,  $2h+1$  gefaserte 3-Sphäre vor (l. c. § 11). Da überdies die Deckbewegungsgruppe die dem Südpol von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  entsprechende Faser punktweise festläßt, so ist  $\tilde{\mathfrak{S}}$   $(2h+1)$ -fache verzweigte zyklische Überlagerung von  $\mathfrak{M}$  mit einer gewöhnlichen Faser von  $\mathfrak{M}$  als Verzweigungslinie, was zu beweisen war. (Vgl. Fußnote <sup>2</sup>) auf S. 573.)

Um nun zum Zwecke der Berechnung der Torsionskoeffizienten die Relationen  $(\tilde{9})$ ,  $(\tilde{10})$ ,  $(\tilde{11})$  der Homologiegruppe von  $\tilde{\mathfrak{S}}$  auf die Normalform zu bringen, eliminiert man  $H$  aus der letzten Homologie  $(\tilde{10})$

$$2\tilde{Q}_{2h+1} + \tilde{H} \sim 0.$$

Führt man dann an Stelle von  $\tilde{Q}_i$  die Erzeugende

$$Q'_i \sim \tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{2h+1} \quad (i = 1, 2, \dots, 2h)$$

ein, so ergeben sich gerade die Relationen

$$2Q'_1 \sim 0, \dots, 2Q'_{2h} \sim 0.$$

Es sind also, wie behauptet wurde,  $2h$  Torsionskoeffizienten vom Werte 2 vorhanden.

### § 3.

#### Charakterisierung der Alexanderschen Polynomvariante.

Die Homologiegruppen der Überlagerungsmannigfaltigkeiten eines Knotens  $\mathfrak{k}$  sind, wie wir in § 1 sahen, durch die Matrix  $\Gamma = (\gamma_{ik})$  von S. 576 bestimmt. Wir wollen jetzt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufstellen, daß eine ganzzahlige Matrix die Matrix  $\Gamma$  eines Knotens sein kann. Daraus wird sich dann eine Charakterisierung der Alexanderschen Polynomvariante ergeben.

Wir bedenken zunächst, daß man eine berandete Fläche vom Geschlecht  $h$  auffassen kann als ein Elementarflächenstück  $E$ , an das  $2h$

„Bänder“ angesetzt sind. Diese Darstellung ergibt sich sofort, wenn man im Fundamentalpolygon der geschlossenen Fläche vom Geschlecht  $h$ , das in der „Henkelform“<sup>8)</sup> vorgelegt sei, die Ecken abschneidet, was gleichbedeutend mit einer Lochung der geschlossenen Fläche ist. Die Fig. 6 zeigt die gelochte Fläche vom Geschlecht 2. Man erhält also den allgemeinsten Knoten vom Geschlecht  $h$  oder kleineren Geschlechtes, wenn man ein solches gebändertes Flächenstück auf alle möglichen Weisen in den Raum hineinlegt. Wir werden das gebänderte Flächenstück in der ebenen Projektion betrachten und dürfen annehmen, daß das Elementarflächenstück  $E$  sich als eine Kreisscheibe projiziert und daß die angesetzten Bänder in der Projektion mit  $E$  nur die Ansatzstellen gemein

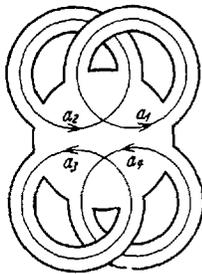


Fig. 6.

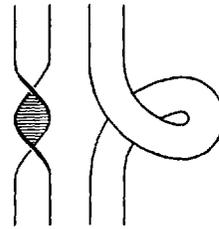


Fig. 7.

haben. Schließlich ist es keine Einschränkung, anzunehmen, daß die Bänder in der Projektion unverdrillt erscheinen, da eine Verdrillung immer durch eine Selbstüberschneidung des Bandes ersetzt werden kann (s. Fig. 7). Es ist somit nur die eine Seite der Fläche, die „Oberseite“ sichtbar. (Beispiele sind die Fig. 6 und 9; in ersterer ist  $\mathfrak{f}$  in die Kreislinie deformierbar.) Schneidet man den Raum längs der Fläche auf, so spaltet sich die Fläche in zwei Exemplare, die längs  $\mathfrak{f}$  aneinanderstoßen. Hebt man sie voneinander ab (wie man etwa ein zusammengefaltetes Luftkissen aufbläst) so entsteht aus dem Elementarflächenstück  $E$  mit den  $2h$  angesetzten Bändern eine Kugel mit  $2h$  angesetzten Henkeln. Der Knoten  $\mathfrak{f}$  ist dann der scheinbare Umriß dieser Fläche vom Geschlecht  $2h$ , und die Fläche selbst wird durch  $\mathfrak{f}$  zerlegt in zwei Teile, die in § 1 mit  $\mathfrak{F}$  und  $x\mathfrak{F}$  bezeichnet wurden, während der Außenraum  $\overline{M}$  hieß. Die aus  $\mathfrak{F}$  und  $x\mathfrak{F}$  bestehende Fläche vom Geschlecht  $2h$  bezeichnen wir auch mit  $\mathfrak{F} + x\mathfrak{F}$ , und wir verstehen unter  $\mathfrak{F}$  immer den sichtbaren (oben liegenden) Teil der Fläche. In der Projektion sind  $\mathfrak{F} + x\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{F}$  nicht zu unterscheiden und können daher durch dieselbe Figur dargestellt werden (s. Fig. 6 und 9).

<sup>8)</sup> Vgl. das S. 573 angeführte Buch.

Zur Ableitung der Relationen (1) von S. 575 wählen wir auf  $\mathfrak{F}$   $h$  Paare von konjugierten Rückkehrschnitten,  $a_1, a_2; a_3, a_4; \dots; a_{2h-1}, a_{2h}$ , von denen jeder ein angesetztes Band durchläuft (s. Fig. 6). Diese orientieren wir so, daß  $a_{2r+2}$  von  $a_{2r+1}$  in dem gemeinsamen Punkt von links nach rechts überkreuzt wird. Man hat also bei richtiger Orientierung der Fläche  $\mathfrak{F}$  die Schnittzahlen

$$(12) \quad \mathcal{S}(a_{2r+1}, a_{2r+2}) = +1,$$

und daher

$$(13) \quad \mathcal{S}(a_{2r+2}, a_{2r+1}) = -1.$$

Die  $a_i$  bilden zusammen mit den entsprechenden Kurven  $xa_i$  auf der Fläche  $x\mathfrak{F}$  eine Homologiebasis von  $\mathfrak{F} + x\mathfrak{F}$ . Mit  $A_i$  sei der über  $a_i$  errichtete unendliche Halbzylinder bezeichnet, der senkrecht auf der Zeichenebene steht. Er stellt nach Hinzufügung des unendlich fernen Punktes ein in  $a_i$  eingespanntes Elementarflächenstück dar. Wir betrachten nun den im Außenraum  $\mathfrak{M}$  liegenden Teil  $\bar{A}_i$  von  $A_i$ . Der Rand von  $\bar{A}_i$  besteht aus  $a_i$  und einigen „Schnittkreisen“, nämlich denjenigen, in denen  $A_i$  von den Henkeln der Fläche  $\mathfrak{F} + x\mathfrak{F}$  durchsetzt wird. Die Summe dieser richtig orientierten Schnittkreise heiße  $a'_i$ , so daß gilt

$$(14) \quad \text{Rd } \bar{A}_i = a_i - a'_i \text{ (in } \mathfrak{M}\text{)}.$$

Die erwähnten Schnittkreise entsprechen den einzelnen Überkreuzungen von  $a_i$  durch die Kurven  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 2h$ ). Betrachten wir z. B. den Fall, daß  $a_i$  von  $a_k$  an einer bestimmten Stelle von links nach rechts überkreuzt wird (Fig. 8). Der Schnittkreis  $C$  von  $A_i$  mit der überkreuzenden Stelle des zu  $a_k$  gehörenden Henkels durchsetzt dann  $a_k$  von links nach rechts. Also ist

$$(15) \quad \mathcal{S}(C, a_k) = 1, \quad \mathcal{S}(C, a_j) = 0 \quad (j \neq k)$$

und auf  $x\mathfrak{F}$  analog

$$(16) \quad \mathcal{S}(C, xa_k) = 1, \quad \mathcal{S}(C, xa_j) = 0 \quad (j \neq k).$$

Die Vorzeichen der Schnittzahlen kehren sich um, wenn  $a_k$  von rechts nach links über  $a_i$  hinweggeht.

Es bezeichne nun  $v_{ik}$  die „Überkreuzungszahl“ von  $a_i$  und  $a_k$ , d. h. die Anzahl der Überkreuzungen, bei denen  $a_k$  von links nach rechts über  $a_i$  geht, vermindert um die Anzahl der Überkreuzungen, bei denen  $a_k$  von rechts nach links über  $a_i$  geht. Man findet dann durch Addition der sämtlichen Schnittkreise des Halbzylinders  $A_i$  mit dem zu  $a_k$  gehörigen Henkel aus den Formeln (15) und (16)

$$(17) \quad \mathcal{S}(a'_i, a_k) = v_{ik},$$

$$(18) \quad \mathcal{S}(a'_i, xa_k) = v_{ik}.$$

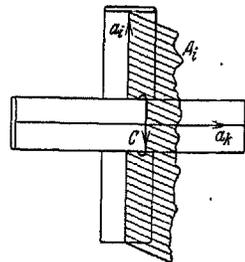


Fig. 8.

Die Relationen (1) von S. 575 ergeben sich nun sofort, wenn man die auf  $\mathfrak{F} + x\mathfrak{F}$  liegenden Kurven (1-Ketten)  $a'_i$  durch die Basisketten  $a_1, \dots, a_{2h}, xa_1, \dots, xa_{2h}$  ausdrückt:

$$a'_i \sim \sum_1^{2h} \gamma_{ik} a_k - \sum_1^{2h} \gamma_{ik} x a_k \text{ (auf } \mathfrak{F} + x\mathfrak{F}\text{)}.$$

Aus (12), (13) und (17) folgt:

$$\gamma_{i, 2r+1} = \mathcal{S}(a'_i, a_{2r+2}) = v_{i, 2r+2},$$

$$\gamma_{i, 2r+2} = -\mathcal{S}(a'_i, a_{2r+1}) = -v_{i, 2r+1}.$$

Das gibt zusammen mit der aus (14) folgenden Homologie  $a_i \sim a'_i$  (in  $\overline{\mathfrak{M}}$ ):

$$(19) \quad a_i \sim v_{i2} a_1 - v_{i1} a_2 + \dots + v_{i, 2h} a_{2h-1} - v_{i, 2h-1} a_{2h} \\ - (v_{i2} x a_1 - v_{i1} x a_2 + \dots + v_{i, 2h} x a_{2h-1} - v_{i, 2h-1} x a_{2h}) \\ \text{(in } \overline{\mathfrak{M}}\text{)}.$$

Die Überkreuzungszahlen  $v_{ik}$  sind nicht unabhängig voneinander. Sind erstens  $a_i$  und  $a_k$  nicht konjugierte Rückkehrschnitte, also punktfremd, so ist  $v_{ik}$  die Verschlingungszahl von  $a_i$  und  $a_k$ ,  $v_{ik} = \mathcal{V}(a_i, a_k)$ , und da für die Verschlingungszahlen die Symmetriebeziehung

$$\mathcal{V}(a_i, a_k) = \mathcal{V}(a_k, a_i)$$

besteht, so gilt

$$(20) \quad v_{ik} = v_{ki} \begin{pmatrix} i & 2r+1 \\ k & 2r+2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} i & 2r+2 \\ k & 2r+1 \end{pmatrix}.$$

$a_i$  und  $a_k$  seien zweitens konjugierte Rückkehrschnitte, etwa  $i = 1, k = 2$ . Dann hat es keinen Sinn, von einer Verschlingungszahl von  $a_1$  und  $a_2$  zu reden, da sich beide Kurven in einem Punkt  $P$  treffen, und zwar wird gemäß unserer Festsetzung  $a_2$  von  $a_1$  von links nach rechts durchgesetzt. Wir denken uns dann  $a_1$  in der Umgebung des Punktes  $P$  etwas von der Fläche  $\mathfrak{F}$  losgelöst und in den Außenraum  $\overline{\mathfrak{M}}$  hinein deformiert. Die so deformierte Kurve sei  $a_1^*$ . Es wird dann die algebraische Summe der Überkreuzungen von  $a_2$  durch  $a_1^*$  — wobei eine Überkreuzung von links nach rechts mit dem Zeichen  $+$ , eine von rechts nach links mit dem Zeichen  $-$  in die Summe eingeht — gleich  $\mathcal{V}(a_2, a_1^*) = v_{21} + 1$ , die algebraische Summe der Überkreuzungen von  $a_1^*$  durch  $a_2$  dagegen  $\mathcal{V}(a_1^*, a_2) = v_{12}$ , so daß man wegen der Symmetrie der Verschlingungszahlen erhält:

$$v_{12} = v_{21} + 1.$$

Allgemein ist

$$(21) \quad v_{2r+1, 2r+2} = v_{2r+2, 2r+1} + 1.$$

Wegen (20) und (21) kann man höchstens die Zahlen  $v_{ik}$  für  $i \leq k$  willkürlich vorgeben. Tatsächlich sind diese Zahlen voneinander unabhängig. Um einen Knoten zu vorgegebenen Zahlen  $v_{ik}$  ( $i \leq k$ ) zu

konstruieren, hefte man der Reihe nach die Bänder an das Elementarflächenstück  $E$  an, so daß der Reihe nach die Zahlen  $v_{12}$ ;  $v_{13}$ ,  $v_{23}$ ;  $v_{14}$ ,  $v_{24}$ ,  $v_{34}$ ; ...;  $v_{1,2h}$ ,  $v_{2,2h}$ , ...,  $v_{2h-1,2h}$  die vorgeschriebenen Werte annehmen. Zuletzt bringe man noch in jedem Band so viele Selbstüberschneidungen (Fig. 7) an, daß auch die Zahlen  $v_{ii}$  ( $i = 1, \dots, 2h$ ) stimmen. Wir fassen das Ergebnis zusammen in dem

Satz 5. *Ist die in den Knoten  $\bar{\Gamma}$  eingespannte Fläche als Elementarflächenstück mit  $2h$  angesetzten Bändern dargestellt (S. 584) und bezeichnet  $v_{ik}$  die Überkreuzungszahl des  $i$ -ten Bandes durch das  $k$ -te, so bestehen zwischen den  $v_{ik}$  die Beziehungen (20) und (21), und die in dem Relationensystem (1) auftretende Matrix  $\Gamma = (\gamma_{ik})$  lautet:*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} v_{12} & -v_{11} & \cdot & v_{1,2h} & -v_{1,2h-1} \\ v_{22} & -v_{21} & \cdot & v_{2,2h} & -v_{2,2h-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{2h-1,2} & -v_{2h-1,1} & \cdot & v_{2h-1,2h} & -v_{2h-1,2h-1} \\ v_{2h,2} & -v_{2h,1} & \cdot & v_{2h,2h} & -v_{2h,2h-1} \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt tritt jede ganzzahlige Matrix, deren Elemente die Bedingungen (20) und (21) erfüllen, als Matrix  $\Gamma$  eines Knotens auf.

Aus der Matrix  $\Gamma$  ergibt sich die Alexandersche Polynomvariable (S. 578) bis auf einen Faktor  $\pm x^n$  als die Determinante

$$(22) \quad |E - \Gamma + x\Gamma| = c_0 + c_1 x + \dots + c_{2h} x^{2h}.$$

Beispielsweise lautet diese Determinante für  $h = 1$  und 2, wenn man die Überkreuzungszahlen  $v_{ik}$  ( $i > k$ ) vermöge (20) und (21) durch die  $v_{rs}$  ( $r \leq s$ ) ausdrückt, folgendermaßen:

$$(23) \quad \begin{vmatrix} 1 + v_{12}(x-1) & -v_{11}(x-1) \\ v_{22}(x-1) & x - v_{12}(x-1) \end{vmatrix} \quad (h = 1),$$

$$(24) \quad \begin{vmatrix} 1 + v_{12}(x-1) & -v_{11}(x-1) & v_{14}(x-1) & -v_{13}(x-1) \\ v_{22}(x-1) & x - v_{12}(x-1) & v_{24}(x-1) & -v_{23}(x-1) \\ v_{23}(x-1) & -v_{13}(x-1) & 1 + v_{34}(x-1) & -v_{33}(x-1) \\ v_{24}(x-1) & -v_{14}(x-1) & v_{44}(x-1) & x - v_{34}(x-1) \end{vmatrix} \quad (h = 2).$$

Aus dieser Gestalt der Determinante erkennt man leicht, daß das Polynom (22) immer die folgenden beiden Eigenschaften hat:

I. Es ist  $c_0 + c_1 + \dots + c_{2h} = 1$ .

II. Es ist  $c_i = c_{2h-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, h-1$ ).

Die (bereits bekannte) Eigenschaft I der Polynomvariable ergibt sich, wenn man in (22)  $x = 1$  setzt. Um die „Symmetriebedingung“ II zu beweisen, müssen wir zeigen, daß  $c_0 + c_1 x + \dots + c_{2h} x^{2h}$  ungeändert

bleibt bei Ersetzung von  $x$  durch  $x^{-1}$  und nachträgliche Multiplikation des Ausdruckes mit  $x^{2h}$ ; d. h. es muß

$$(25) \quad |E - \Gamma + x\Gamma| = |x(E - \Gamma) + \Gamma|$$

sein. Die Matrix  $x(E - \Gamma) + \Gamma$  geht nun durch die folgenden Transformationen in die Matrix  $E - \Gamma + x\Gamma$  über:

1. Vertauschung der  $(2r + 1)$ -ten mit der  $(2r + 2)$ -ten Zeile und ebenso der  $(2r + 1)$ -ten mit der  $(2r + 2)$ -ten Spalte ( $r = 0, 1, \dots, h-1$ ).

2. Vertauschung von Zeilen und Spalten (Umklappung um die Hauptdiagonale).

3. Multiplikation aller geraden Zeilen und Spalten mit  $-1$ .

Da sich bei diesen Operationen die Determinante nicht ändert, so ist damit die Beziehung (25) bewiesen.

Aus den beiden Eigenschaften I und II folgt, daß man *höchstens* die ersten  $h$  Koeffizienten  $c_0, \dots, c_{h-1}$  willkürlich vorgeben kann. Die Koeffizienten  $c_{h+1}, \dots, c_{2h}$  sind dann durch II bestimmt, während sich der „mittlere“ Koeffizient  $c_h$  aus I ergibt.

Wir zeigen nun, daß  $c_0, \dots, c_{h-1}$  voneinander unabhängig sind, d. h. daß man die Überkreuzungszahlen  $v_{ik}$  ( $i \leq k$ ) so wählen kann, daß die Koeffizienten  $c_0, \dots, c_{h-1}$  willkürlich vorgegebene ganzzahlige Werte erhalten. Man wähle nämlich alle  $v_{ik} = 0$  bis auf

$$v_{14}, v_{36}, v_{58}, \dots, v_{2h-3, 2h} \text{ und } v_{22},$$

die man  $= 1$  setzt, während

$$v_{13}, v_{35}, v_{57}, \dots, v_{2h-3, 2h-1} \text{ und } v_{11}$$

unbestimmt bleiben. Der Wert der so spezialisierten Determinante  $|E - \Gamma + x\Gamma|$  sei  $A_h$ . Aus (23) und (24) erhält man z. B.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_{11}(x-1) \\ x-1 & x \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_{11}(x-1) & x-1 & -v_{13}(x-1) \\ x-1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -v_{13}(x-1) & 1 & 0 \\ 0 & -(x-1) & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Mit  $A'_h$  bezeichnen wir die  $(2h-1)$ -reihige Unterdeterminante, die aus  $A_h$  durch Streichen der letzten Spalte und vorletzten Zeile entsteht. Wir entwickeln  $A'_h$  nach der letzten Zeile, in der nur  $-(x-1)$  als einziges von 0 verschiedenes Element steht, und finden:

$$A'_h = -(x-1)^2 A'_{-1},$$

also wegen  $A'_1 = x-1$

$$(26) \quad A'_h = (-1)^{h-1} (x-1)^{2h-1}.$$

$A_h$  berechnen wir durch Entwicklung nach der letzten Spalte, in der  $-v_{2h-3, 2h-1}(x-1)$  und  $x$  als die einzigen von 0 verschiedenen Elemente stehen:

$$A_h = v_{2h-3, 2h-1}(x-1)[(x-1)A'_{h-1}] \\ + x[A_{h-1} + (x-1)\{-v_{2h-3, 2h-1}(x-1)\}A'_{h-1}],$$

oder mit Benutzung von (26)

$$(27) \quad A_h = xA_{h-1} + (-1)^{h-1}v_{2h-3, 2h-1}(x-1)^{2h}.$$

Unsere Behauptung, daß jedes beliebige Polynom  $c_0 + c_1x + \dots + c_{2h}x^{2h}$  mit den Eigenschaften I und II in der Form einer Determinante  $A_h$  (in der die unbestimmt gebliebenen Koeffizienten noch geeignet zu spezialisieren sind) geschrieben werden kann, ist offenbar richtig für  $h=1$ . Sie sei für den Index  $h-1$  bereits bewiesen. Insbesondere können wir also durch passende Wahl der in  $A_{h-1}$  auftretenden unbestimmten Koeffizienten  $v_{11}, v_{13}, v_{35}, \dots, v_{2h-6, 2h-3}$  es erreichen, daß  $A_{h-1}$  gleich dem Polynom vom formalen Grade  $2h-2$ .

$$\frac{c_0 + c_1x + \dots + c_{2h}x^{2h} - c_0(x-1)^{2h}}{x}$$

wird, dem offenbar die (für den Index  $h-1$  zu formulierenden) Eigenschaften I und II zukommen. Ferner setzen wir  $v_{2h-3, 2h-1}$ , über das noch nicht verfügt wurde, gleich  $(-1)^{h-1}c_0$ . Dann folgt aus (27) sofort:

$$A_h = c_0 + c_1x + \dots + c_{2h}x^{2h}.$$

Damit ist der Induktionsbeweis beendet.

Den willkürlichen Faktor  $\pm x^n$ , mit dem die Alexandersche Polynom-invariante behaftet ist, pflegt man so festzulegen, daß das Absolutglied der Polynom-invariante  $\Delta(x)$  positiv ausfällt (S. 578). Dementsprechend tritt bei  $\Delta(x)$  an Stelle der Eigenschaft I die Eigenschaft I':  $c_0 > 0$ ,  $\sum c_i = \pm 1$ . Wir haben damit die folgende Charakterisierung der Alexanderschen Polynom-invariante:

**Satz 6:** *Ein ganzzahliges Polynom  $c_0 + c_1x + \dots + c_{2h}x^{2h}$  ist dann und nur dann die Polynom-invariante eines Knotens, wenn die Bedingungen  $c_0 > 0$ ,  $c_0 + c_1 + \dots + c_{2h} = \pm 1$ ,  $c_i = c_{2h-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, h-1$ ) erfüllt sind.*

Ist ein solches Polynom  $\Delta(x)$  vorgelegt, so läßt sich die Aufgabe, alle möglichen Knoten mit der Polynom-invariante  $\Delta(x)$  zu konstruieren, folgendermaßen lösen: Man ermittelt ein System von Überkreuzungszahlen  $v_{ik}$ , so daß  $|\mathbf{E} - \mathbf{\Gamma} + x\mathbf{\Gamma}| = \pm x^n \Delta(x)$  wird, und konstruiert nach dem Verfahren von S. 587 eine gelochte Fläche vom Geschlecht  $2h$ , deren Rand ein Knoten von der gewünschten Beschaffenheit sein wird.

## § 4.

**Beispiel eines Knotens, der sich von der Kreislinie nicht durch die Homologiegruppen der zyklischen Überlagerungen und durch die Alexandersche Polynom-invariante unterscheiden läßt.**

Wir fragen jetzt insbesondere nach den Knoten, deren Polynom-invariante  $\Delta(x) = 1$  ist. Sicher gehört die Kreislinie zu ihnen. Wir werden sehen, daß es außer der Kreislinie noch andere Knoten mit dieser Eigenschaft gibt.

Wir müssen dafür sorgen, daß in dem Polynom  $|E - \Gamma + x\Gamma|$ , dessen formaler Grad  $2h$  ist, alle Koeffizienten verschwinden bis auf den mittleren, der dann nach I, S. 587 gleich 1 sein muß. Die definierenden Relationen (1) S. 575 der Homologiegruppe der unendlichblättrigen Überlagerungsmannigfaltigkeit lassen sich nun als ein homogenes lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten  $a_1, \dots, a_{2h}$  und der Koeffizientenmatrix  $E - \Gamma + x\Gamma$  auffassen. Da die Determinante des Systems gleich  $x^h$ , also eine Einheit des Integritätsbereiches ist, so folgt (Cramersche Regel), daß  $a_1, \dots, a_{2h}$  sämtlich in der unendlichblättrigen Überlagerungsmannigfaltigkeit, also erst recht in jeder endlichblättrigen nullhomolog sind. Sobald sich also  $|E - \Gamma + x\Gamma|$  auf die Potenz  $x^h$  reduziert, reduzieren sich die Homologiegruppen der sämtlichen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeiten des Knotens auf das Nullelement, d. h. die Überlagerungsmannigfaltigkeiten sind entweder die 3-Sphäre oder Poincarésche Räume.

Betrachten wir den einfachsten Fall  $h = 1$ . Es ist zu verlangen, daß in dem Polynom  $|E - \Gamma + x\Gamma|$  vom formalen Grad 2 der Höchstkoeffizient

$$|\Gamma| = \begin{vmatrix} v_{12} & -v_{11} \\ v_{22} & -v_{12} + 1 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Das ist z. B. der Fall für  $v_{12} = -1$ ,  $v_{11} = 1$ ,  $v_{22} = 2$ . Ein Elementarflächenstück mit zwei angesetzten Bändern, die sich diesen Überkreuzungszahlen gemäß überschneiden, ist in Fig. 9 gezeichnet.

Um zu zeigen, daß der Knoten nicht in die Kreislinie deformierbar ist, berechnen wir seine Fundamentalgruppe und bringen zu dem Zwecke den Knoten zunächst in eine übersichtlichere Gestalt. Wir verwandeln die Selbstüberschneidungen der Bänder gemäß der Fig. 7 in Verdrillungen. So entsteht der Knoten der Fig. 10. Schließlich werden die gegenseitigen Überschneidungen der Bänder durch eine Verdrillung des Elementarflächenstückes  $E$  um  $3\pi$  beseitigt. Dabei wird jedes der beiden Bänder noch um  $3\pi$  verdrillt, so daß dann das linke Band im ganzen um  $7\pi$ , das rechte um  $5\pi$  tordiert ist (Fig. 11). Nunmehr bezeichnen wir die

Gebiete, in die die Ebene durch die Knotenprojektion zerlegt wird, mit  $A, B, C, b_1, b_2, \dots, b_{13}$ , so wie es die Fig. 11 zeigt. Mit den gleichen Buchstaben wird ein von einem festen Ausgangspunkt ausgehender geschlossener räumlicher Weg bezeichnet, der das betreffende Gebiet einmal von oben nach unten und das Außengebiet einmal von unten nach oben durchsetzt. Die geschlossenen Wege  $A, B, C, b_1, \dots, b_{13}$  erzeugen dann

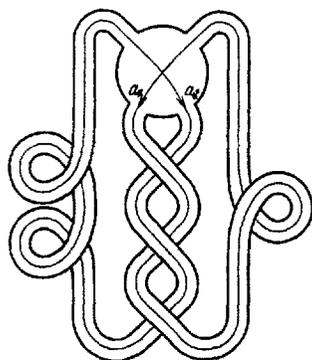


Fig. 9.

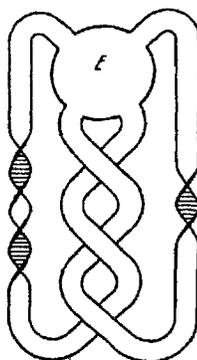


Fig. 10.

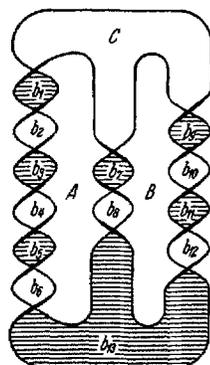


Fig 11.

die Fundamentalgruppe, und die Relationen, die den einzelnen Überschneidungen entsprechen, lauten:

$$\begin{array}{lll}
 AC^{-1} = b_1 & AC^{-1} = b_7 B^{-1} & C = B b_5^{-1} \\
 A b_1^{-1} = b_2 & A b_7^{-1} = b_8 B^{-1} & b_9 = B b_{10}^{-1} \\
 A b_2^{-1} = b_3 & A b_8^{-1} = b_{13} B^{-1} & b_{10} = B b_{11}^{-1} \\
 A b_3^{-1} = b_4 & & b_{11} = B b_{12}^{-1} \\
 A b_4^{-1} = b_5 & & b_{12} = B b_{13}^{-1} \\
 A b_5^{-1} = b_6 & & \\
 A b_6^{-1} = b_{13} & & 
 \end{array}$$

Aus jeder dieser drei Reihen läßt sich  $b_{13}$  durch Elimination der übrigen  $b_k$  berechnen. Es ist z. B.

$$\begin{aligned}
 b_{13} &= A b_6^{-1} = A b_5 A^{-1} = A^2 b_4^{-1} A^{-1} = A^2 b_3 A^{-2} = A^3 b_2^{-1} A^{-2} \\
 &= A^3 b_1 A^{-3} = A^4 C^{-1} A^{-3}.
 \end{aligned}$$

Analog wird

$$b_{13} = A B^{-1} A C^{-1} B A^{-1} B \quad \text{und} \quad b_{13} = B^{-2} C^{-1} B^3,$$

also schließlich

$$(28) \quad A^4 C^{-1} A^{-3} C = A B^{-1} A C^{-1} B A^{-1} B C = B^{-2} C^{-1} B^3 C.$$

Wäre unser Knoten in die Kreislinie deformierbar, so wäre (28) die freie zyklische Gruppe. Das kann nicht sein, da die Relationen (28) von einer nichtzyklischen Gruppe starrer Bewegungen der hyperbolischen Ebene

erfüllt werden. Man konstruiere nämlich in der hyperbolischen Ebene ein Dreieck  $AB\Gamma$  mit den Winkeln  $\pi/7$ ,  $\pi/5$ ,  $\pi/3$  und verstehe unter  $A$  eine Drehung um die Ecke  $A$  durch den Winkel  $-2\pi/7$ , unter  $B$  die Drehung um  $B$  durch den Winkel  $+2\pi/5$ , unter  $C$  die Spiegelung an der Seite  $AB$  (Fig. 12). Dann bedeuten

$$A^4 C^{-1} A^{-3} C = A^4 (C^{-1} A^{-1} C)^3$$

und

$$B^{-2} C^{-1} B^3 C = B^{-2} (C^{-1} B C)^3$$

offenbar die identische Transformation<sup>9)</sup>. Den mittleren Ausdruck in (28) schreiben wir so:

$$[A B^{-1}] [A (C^{-1} B C)] [(C^{-1} A^{-1} C) (C^{-1} B C)].$$

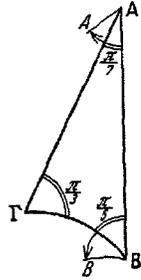


Fig. 12.

Alle drei eckigen Klammern bedeuten dieselbe hyperbolische Bewegung, nämlich die Drehung um  $\Gamma$  durch den Winkel  $2\pi/3$ , so daß der ganze Ausdruck wiederum die identische Transformation ist. Die Gruppe, die von den hyperbolischen Bewegungen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  erzeugt wird, erfüllt also die Relationen (28). Somit gilt

**Satz 7:** *Es gibt Knoten, bei denen sich die Homologiegruppen der sämtlichen zyklischen Überlagerungen auf das Nullelement reduzieren und die sich demgemäß weder durch die Alexandersche Polynom-invariante noch durch die Torsionskoeffizienten und Bettischen Zahlen der zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeiten von der Kreislinie unterscheiden lassen.*

<sup>9)</sup> Das Produkt  $UV$  zweier Abbildungen wird erhalten, wenn man erst  $V$  und dann  $U$  ausübt.

(Eingegangen am 27. 6. 1934.)