Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion.

Von

Andreas Speiser in Zürich.

Um die Werteverteilung einer ganzen transzendenten Funktion $w = f(z)$ in der z-Ebene zu überblicken, genügt es, die Linien in der z-Ebene zu zeichnen, längs deren die Funktion reelle Werte annimmt, falls die wesentlich singulären Stellen der Umkehrfunktion $z = \varphi(w)$ an reellen Stellen der w-Ebene liegen. Für die Exponentialfunktion erhält man horizontale äquidistante Gerade, und die z-Ebene wird durch sie auf die logarithmische Windungsfläche mit Windungspunkten bei 0 und ∞ in der w-Ebene abgebildet. Für die Tangensfunktion dagegen erhielte man bloß die reelle Achse, die keinen Überblick gestattet, weil die Singularitäten der Umkehrfunktion bei $\pm i$ liegen. Die reellen Züge der Cosinusfunktion bestehen aus der reellen Achse und einer Schar vertikaler Gerader, nämlich der imaginären Achse und sämtlicher paralleler Geraden, deren Abstand ein Vielfaches von π ist. Das Bild, das in der w-Ebene entworfen wird, besteht aus folgender Riemannschen Fläche: Man denke sich an einem Exemplar der w-Ebene die reelle Achse von $+1$ nach $+\infty$ und von -1 nach $-\infty$ aufgeschnitten. An diese beiden Schnitte hänge man je ein neues kongruentes Exemplar der w-Ebene an, indem man die Ufer kreuzweise verheftet, so daß man Verzweigungspunkte erster Ordnung erhält. An die beiden noch frei bleibenden Schnitte der neuen Blätter hänge man wieder neue Exemplare an und so weiter in infinitum. Man erkennt sofort, daß der Punkt ∞ doppelt zählt; denn umläuft man einen Kreis mit großem Radius unendlich oft, so erhält man zwei verschiedene Schraubenlinien, falls man alle Blätter benutzt.

Daß die Methode der reellen Züge immer dann Erfolg hat, wenn das Schwarzsche Spiegelungsprinzip zum Aufbau der Funktion benutzt wird, also bei den automorphen Funktionen, ist unmittelbar klar. Im folgenden soll für die in der Funktionentheorie noch isoliert dastehenden Funktionen $\Gamma(z)$ und $\zeta(z)$, deren wichtigste Eigenschaften schon von Euler entdeckt wurden, das Problem der Werteverteilung und der Riemannschen Fläche in der w-Ebene im angegebenen Sinne behandelt werden. Es wird sich dabei herausstellen, daß die Alternative der Riemannschen Vermutung über die Lage der Nullstellen schon in diesen qualitativen Betrachtungen sich scharf ausprägt. Für einen Teil der folgenden Beweise vergleiche man die Dissertation des Herrn A. Utzinger (Über die reellen

Züge der Riemannschen Zetafunktion, Zürich 1934), Tafeln und Figuren enthalten außer dieser Arbeit auch die Funktionentafeln von Jahnke-Emde, 2. Auflage 1933 [1]). Über das Kurvenbild der reellen Züge läßt sich allgemein sagen, daß es sich nicht ändert, wenn man zur reziproken Funktion übergeht oder irgendeine reelle lineare gebrochene Substitution vornimmt. Wenn ferner die Funktion einen reellen Wert ausläßt, z. B. den Wert ∞ bei den ganzen transzendenten Funktionen, so ist es nicht möglich, daß im Kurvenbild ein ganz im Endlichen liegendes Gebiet von reellen Zügen begrenzt wird. Denn umläuft man dieses Gebiet in geeignetem Sinn, so werden die auf der Begrenzung durch die Funktion angenommenen reellen Werte monoton wachsen und nach vollständiger Umlaufung wieder in den Anfangswert zurückkommen. Dabei werden offenbar alle reellen Zahlenwerte angenommen.

Die Gammafunktion ist eine Verbindung der Cosinus- und der Exponentialfunktion. Man erhält die Riemannsche Fläche von $w = \frac{1}{\Gamma(z)}$ in der w-Ebene, indem man die logarithmische Windungsfläche mit den Windungspunkten bei 0 und ∞ betrachtet und in *einem* Blatt die positive reelle Achse von 1,129 ... bis $+\infty$ aufschneidet. An diesem Schnitt heftet man ein Ende der Arcuscosinusfläche an, indem man lauter Blätter mit zwei Einschnitten verwendet, die allerdings nicht bei $+1$ oder -1 beginnen, sondern in immer weiterer Distanz vom Nullpunkt ihren Anfang nehmen.

Entsprechend dieser Riemannschen Fläche zerfällt auch die z-Ebene hinsichtlich der Werteverteilung in zwei getrennte Gebiete, ein Cosinusfeld und ein Exponentialfeld. Das erstere füllt das Innere einer parabelartig sich nach links erstreckenden Kurve aus, deren Gleichung von der Art ist: $y = x/\log x$, soweit die Zunahme der Ordinaten für große Werte in Betracht kommt. Man findet die reellen Züge mit genügender Annäherung, indem man in der Stirlingschen Formel den Imaginärteil des Logarithmus sucht, also den Imaginärteil von

$$(z - \tfrac{1}{2}) \log z - z,$$

und ihn gleich Vielfachen von π setzt. Der exponentielle Teil ergibt sich als eine Schar von Kurven, welche von links, aus dem Unendlichen, absteigend nach rechts verlaufen und sich asymptotisch der reellen Achse nähern. Dies gilt für die obere Halbebene; das Kurvenbild in der unteren verläuft spiegelbildlich zur reellen Achse. Diese Kurven teilen das exponentielle Feld in Streifen ein, deren jeder das Bild einer halben w-Ebene

[1]) Für den Verlauf der Gammafunktion vgl. ferner J. Lense, Über die konforme Abbildung durch die Γ-Funktion, Sitzber. Bayr. Akad. München 1928.

ist. Die Breite dieser Streifen nimmt mit wachsendem y ab. Die Amplitude ergibt sich nämlich bei festem x und einem wachsenden y aus der obigen Formel im wesentlichen gleich $y \log y$. Hieraus folgt ohne weiteres, daß auf die Einheit der Ordinate, also auf die vertikale Strecke von y bis $y + 1$, ungefähr $\log y$ reelle Züge kommen. Im Cosinusfeld liegen auf der reellen Achse in nahezu konstanten Abständen Verzweigungen, an denen reelle Züge ausgehen und nach links abbiegen.

Das Verhalten der Zetafunktion ist außerhalb des kritischen Streifens, den ich für diese Zwecke ungefähr von $x = -2$ bis $x = +3$ rechnen will, wohlbekannt. Rechts ist der Term 2^{-z} ausschlaggebend, die reellen Züge verlaufen daher beinahe horizontal und in konstanten Abständen vom Betrag 4,53 .... Auch ihre Steigung ist nahezu Null, wie man an der gliedweise abgeleiteten Reihe erkennt; daher verlaufen die Züge ohne Wellen. Links vom Streifen liefert die Funktionalgleichung

$$\zeta(1-z) = 2 \cdot (2\pi)^{-z} \cdot \cos\frac{\pi}{2} z \cdot \Gamma(z) \cdot \zeta(z)$$

Aufschluß. Die Amplitude von $\zeta(z)$ ist nahezu gleich 0, diejenige von $\cos\frac{\pi}{2} z$ bleibt nahezu konstant, wenn man x festhält, dagegen y ins Unendliche wachsen läßt. Man findet also, daß wiederum die Anzahl der reellen Züge zwischen y und $y + 1$ bei festem x proportional mit $\log y$ ist. Diese reellen Züge steigen an, wenn man nach links ins Unendliche geht [dieses Ansteigen wird durch den Faktor $(2\pi)^{-z}$ bewirkt], ferner zweigen von der negativen reellen Achse in nahezu konstanten Abständen reelle Züge ab und wenden sich wie bei der Gammafunktion parabelförmig nach links. Dieses Cosinusfeld der Zetafunktion verhält sich qualitativ wie dasjenige der Gammafunktion.

Anders steht es beim exponentiellen Feld der Zetafunktion. Gehen wir auf der reellen Achse von $+\infty$ nach links, so nimmt die Funktion vom Wert 1 an zu. An der Stelle $z = 1$ wird sie unendlich, springt nach dem Wert $-\infty$ und nimmt wieder zu. Für $z = 0$ hat sie den Wert $-\frac{1}{2}$, bei $z = -2$ den Wert 0, der Verzweigungspunkt erscheint erst kurz vor -3. Hier haben wir unter 90^0 etwa nach oben weiterzugehen. Wir gelangen in einen Zug, der wieder nach rechts führt, die kritische Gerade $x = \frac{1}{2}$ mit positivem Wert überkreuzt und als erster reeller Zug oberhalb der rellen Achse wieder rechts im Unendlichen endet mit dem Funktionswert $+1$. Dieses Verhalten ist zuerst in den am Anfang genannten Arbeiten festgestellt worden. Der von diesem reellen Zug eingeschlossene Bereich und sein Spiegelbild an der reellen Achse sind die einzigen Bereiche der Zetafunktion, welche sich nicht nach links ins Unendliche erstrecken. Sie werden durch den Pol bei $z = 1$ ermöglicht.

Vergleichen wir nun das Kurvenbild links und rechts vom kritischen Streifen, so fällt vor allen Dingen die große Vermehrung der Züge auf, wenn man von rechts nach links übergeht. Rechts ist die Anzahl proportional y, links proportional $y \log y$. Die von rechts herkommenden reellen Züge können nicht mehr nach rechts umbiegen, weil der Wert ∞ dann nicht angenommen würde. Also müssen sie entweder den kritischen Streifen durchqueren und mit einem der dortigen Züge fortfahren. Oder aber sie müßten sich im kritischen Streifen nach oben oder unten ins Unendliche verlaufen. Daß der letztere Fall ausgeschlossen werden muß, ist der Inhalt der Beweise über die Anzahl der nichttrivialen Nullstellen. Hier wird nämlich gezeigt, daß eine Gerade, welche den kritischen Streifen in der Höhe y horizontal durchsetzt, nur eine Anzahl reeller Züge von der Größenordnung $\log y$ kreuzt (vgl. etwa Bieberbach, Funktionentheorie, Bd. 2). Man bedenke nun, daß zwei von rechts herkommende reelle Züge sich nicht schneiden dürfen (abgesehen von den beiden ersten, die oben erwähnt wurden), denn sonst ergäbe sich ein Gebiet, das eine Begrenzung von reellen Zügen besitzt, längs deren die Zetafunktion den Wert ∞ ausläßt. Wenn daher auch nur einer jener Züge im kritischen Streifen nach oben ins Unendliche läuft, so müssen alle späteren dasselbe tun. Dann würde aber eine horizontale Grade sie alle überkreuzen und die Größenordnung wäre mindestens y, womit wir den Widerspruch erhalten. Betrachten wir nun die Kurven links vom charakteristischen Streifen. Aus demselben Grunde wie vorher kann keine derselben im charakteristischen Streifen ins Unendliche laufen. Dagegen können ihn einige von ihnen durchqueren und in einen reellen Zug rechts einmünden. Die übrigen werden in den Streifen eintauchen und alsdann umkehren. Diese letzteren will ich als *Lamellen* bezeichnen. Große Ordinatenschwankungen können im kritischen Streifen nicht eintreten, wenn man einem reellen Zug folgt, weil sonst eine horizontale Gerade zu viele Züge kreuzen müßte.

Hiermit sind wir in der Lage, die Riemannsche Fläche, welche die Funktion über der w-Ebene entwirft, qualitativ zu beschreiben. Auch sie setzt sich aus einem logarithmischen und einem Arcuscosinusteil zusammen. Die logarithmische Fläche hat ihre Verzweigungspunkte bei 1 und ∞. An einem ihrer Blätter, dem Ausgangsblatt, ist ein Einschnitt anzubringen, der von $-0{,}00398\ldots$ bis nach $-\infty$ läuft (man vergleiche hierzu die Tafel S. 323 bei Jahnke-Emde und suche das erste Minimum auf). Mit diesem Schnitt verhefte man ein Ende der Arcuscosinusfläche, wobei die Ansatzpunkte der späteren Schnitte sich mit wachsender Blattnummer beidseitig ins Unendliche entfernen. An demselben Ausgangsblatt ist ferner noch ein Blatt anzubringen durch einen Schnitt, der von $0{,}009\ldots$

bis nach 1 verläuft. Es wird auf die beiden Gebiete abgebildet, welche die positive reelle Achse der z-Ebene enthalten und in denen der einzige Pol der Zetafunktion liegt.

Die übrigen Blätter des logarithmischen Teiles sind mit weiteren Blättern besetzt, doch ist deren Anzahl jeweils endlich, und sie steigt durchschnittlich proportional dem Logarithmus der Nummer des Blattes. Es ist nicht ausgeschlossen, daß diese Funktion, nämlich die Anzahl der Blätter, welche am n-ten Blatt des logarithmischen Teiles wachsen, eine Beziehung zur Primzahlverteilung aufweist. Damit ist der Baum der Riemannschen Fläche bestimmt, und man sieht, daß er mit demjenigen der Gammafunktion große Ähnlichkeit besitzt. Er entsteht aus diesem dadurch, daß die Blätter des logarithmischen Teiles noch mit weiteren Blättern besetzt werden.

Eine Kombination der beiden Funktionalgleichungen liefert die Tatsache, daß die Funktion

$$\eta(z) = \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-\frac{z}{2}}\zeta(z)$$

auf der kritischen Geraden $x = \frac{1}{2}$ reell ist. Sie gibt uns eine präzise Aussage über die reellen Züge, welche die Gerade kreuzen. Zerlegen wir unsere Funktion in die beiden Faktoren $\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-\frac{z}{2}}$ und $\zeta(z)$, so muß beim Durchlaufen der kritischen Geraden die Summe der beiden Amplituden konstant gleich einem Vielfachen von π sein. Nur beim Durchgang durch Nullstellen kann sie Sprungstellen haben. Nun dreht sich die Amplitude des ersten Faktors nach der Stirlingschen Formel in positivem Sinn wie $\frac{y}{2}\log y +$ Termen niedrigerer Ordnung, daher muß sich die Amplitude von $\zeta(z)$ stets in negativem Sinn und im selben Betrag drehen. Man beachte nun, daß diese Drehung nur halb so groß ist wie diejenige links vom kritischen Streifen. Weil $\eta(z)$ reell ist und der erste Faktor von Null verschieden, so können reelle Züge von $\zeta(z)$ nur dort die kritische Gerade kreuzen, wo entweder $\zeta(z) = 0$, oder dort, wo der erste Faktor selber reell ist. Diese letzteren Stellen sind aber von unserem Standpunkt aus als bekannt anzusehen, denn sie erfordern nur die Kenntnis der Gammafunktion. Ihre Anzahl ist, wie soeben bemerkt, nur halb so groß als bei $x < -2$, daher liegt in der Tat die Vermutung nahe, daß ebensoviel reelle Züge mit Hilfe von Nullstellen kreuzen.

Es ist nun nicht schwer zu zeigen, daß die Riemannsche Vermutung, alle nichttrivialen Nullstellen liegen auf der kritischen Geraden, identisch ist mit der Behauptung, alle Lamellen reichen bis an die kritische Gerade heran.

Daß diese Bedingung notwendig ist, folgt ohne weiteres aus der Tatsache, daß die Funktion längs einer Lamelle alle endlichen reellen Werte annimmt, daher auch den Wert Null. Wenn daher eine Lamelle ganz links von der kritischen Geraden verläuft, so liegt dort auch eine Nullstelle. Um zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist, benutzen wir die Tatsache, daß der absolute Betrag der Zetafunktion beim Überschreiten der kritischen Geraden von links nach rechts stets abnimmt — es sei denn, daß wir gerade durch eine Nullstelle gehen. Dies folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Die Amplitude ist nämlich der Imaginärteil von $\log \zeta(z)$. Da ihre Ableitung nach y negativ ist, so wird auch die Ableitung des Realteiles, nämlich von $\log|\zeta(z)|$ nach x, negativ sein, w. z. b. w. Wenn nun eine Lamelle die kritische Gerade überschreitet, so muß ihre Nullstelle entweder auf dieser Geraden selber liegen, oder aber rechts von ihr. Durchlaufen wir sie im Sinne aufsteigender Funktionswerte, so können wir nur mit Funktionswerten $\leqq 0$ ins rechte Gebiet hinübergelangen und nur mit Werten $\geqq 0$ wieder ins linke zurück, so daß überhaupt nur zwei Überschreitungen der kritischen Geraden für eine Lamelle möglich sind. Von den reellen Zügen, die von rechts aus dem Unendlichen herkommen, gilt, daß ihre Nullstellen rechts von der kritischen Geraden oder auf ihr liegen müssen. Eine Nullstelle links von der kritischen Geraden kann also nur von einer Lamelle übernommen werden, welche ganz links verläuft. Wenn wir diese ausschließen, so schließen wir alle Nullstellen links und damit wegen der symmetrischen Lage auch diejenigen rechts von der kritischen Geraden aus und befinden uns daher im Fall der Riemannschen Vermutung.

Man kann das Problem verallgemeinern, indem man nicht nur die reellen Züge, sondern allgemein die Linien konstanter Amplitude aufzeichnet. Gerade in der Praxis bewährt sich dieses Verfahren gut, und bei Jahnke-Emde findet man eine große Zahl solcher Kurvenbilder. Ihnen entsprechen in der w-Ebene Polarkoordinaten. Für die Zetafunktion können wir die merkwürdige Tatsache aussprechen, daß eine Linie konstanter Amplitude nur dann die kritische Gerade berühren kann, wenn der Funktionswert an der Berührungsstelle Null ist. Denn eine Berührung würde einen stationären Wert für die Amplitude längs der kritischen Geraden liefern, außer im Falle der Nullstelle.

Nehmen wir nun an, eine Nullstelle der Zetafunktion liege links von der kritischen Geraden. Dann werden sämtliche Linien konstanter Amplitude, die von diesem Punkt ausgehen, in ihrem Verlauf nach links abbiegen, ferner darf keine derselben die kritische Achse berühren oder mit aufsteigendem Absolutbetrag überkreuzen. Dies ist nur so möglich, daß links von der kritischen Geraden eine Nullstelle der Ableitung vorkommt, welche den Linien konstanter Amplitude Verzweigungen gestattet. Auch diese Bedingung ist umkehrbar, so daß der Satz gilt:

Äquivalent mit der Riemannschen Vermutung ist die Behauptung, daß alle nichttrivialen Nullstellen der Ableitung der Zetafunktion rechts von der kritischen Geraden oder auf ihr (nämlich in allfälligen mehrfachen Nullstellen der Zetafunktion selber) liegen.

Nehmen wir nämlich an, eine nichttriviale Nullstelle z_0 der Ableitung liege links von der kritischen Geraden. Wir müssen zeigen, daß dann stets auch eine Nullstelle der Zetafunktion links liegt. Im andern Fall wäre $\zeta(z_0) \neq 0$, und wir betrachten die Linie konstanter Amplitude, welche durch diesen Punkt z_0 geht. Sie weist dort eine Verzweigung auf. Wir verfolgen nun die beiden in entgegengesetzter Richtung ausgehenden Linien, längs denen der absolute Betrag der Funktion $\zeta(z)$ abnimmt. Es ist möglich, daß wir in weitere Verzweigungspunkte kommen; aber immer gehen wir in abnehmendem Sinne weiter. Einmal — spätestens wenn wir in die Nullstellen kommen — muß die kritische Gerade erreicht sein. Unsere beiden Kurvenzüge grenzen zusammen mit dem Stück der kritischen Geraden, das zwischen den beiden Schnittpunkten liegt, ein Gebiet ab. Im Verzweigungspunkt z_0, von dem wir ausgegangen sind, gehen aber noch zwei weitere Züge derselben Amplitude durch, bei deren Durchlaufung der absolute Betrag der Funktion zunimmt. Einer derselben dringt in das vorhin abgegrenzte Gebiet ein. Wir durchlaufen diesen mit zunehmendem Betrag und müssen offenbar jenes Gebiet wieder verlassen, weil der Wert der Funktion ins Unendliche zunimmt. Nun ist aber eine Kreuzung der Grenze nicht möglich: die kritische Gerade kann nicht überschritten werden, weil man von links nach rechts nur mit absteigendem absolutem Betrag gelangen kann. Aber auch auf dem übrigen Teil der Begrenzung ist ein Übergang nicht möglich, weil an dieser Stelle ein und derselbe Funktionswert dem Betrag nach größer und kleiner als der Ausgangswert an der Verzweigungsstelle sein müßte, was nicht möglich ist.

Interessant ist schließlich noch die Riemannsche Fläche, welche die Funktion $\eta(z)$ in der w-Ebene entwirft. Die reellen Züge in der z-Ebene stimmen mit denjenigen der Gammafunktion rechts vom kritischen Streifen überein. Links liegen sie spiegelbildlich zur kritischen Geraden. Entweder gehen alle reellen Züge bis an die kritische Gerade heran und münden unter einem rechten Winkel in Verzweigungsstellen, oder es kommen auch Lamellen vor, die sich nur in die Nähe der kritischen Geraden heranziehen. Im letzteren Fall liegen Nullstellen auf diesen Lamellen außerhalb der kritischen Geraden; aber auch im ersteren Fall wäre es noch eine hinzukommende Bedingung, daß die Nullstelle immer gerade auf demjenigen Stück der reellen Züge liegt, das der kritischen Geraden angehört. Nehmen wir aber an, dies sei der Fall — was wiederum die Riemannsche Vermutung ist — und lassen wir den Fall mehrfacher Nullstellen beiseite, so kann man die Riemannsche Fläche in der w-Ebene einfach als Arcuscosinusfläche charakterisieren, bei der die Ansatzpunkte der Schnitte sich immer mehr dem Nullpunkt nähern. Im ersteren Falle dagegen, wo Lamellen vorkommen, müßte man jene Fläche noch mit weiteren Blättern belasten.

(Eingegangen am 6. 4. 1934.)