Über gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegungsfunktion gehören.

Von

G. Szegö in Königsberg, Pr.

In seinem letzten Briefe in der „Correspondance d'Hermite et de Stieltjes" (Paris, Gauthier-Villars 1905, S. 439–441) führt Stieltjes eine bemerkenswerte Klasse von Polynomen ein, die sich aus den Legendreschen Funktionen zweiter Art auf einfache Weise gewinnen lassen. Er spricht daselbst eine Vermutung über die Lage der Nullstellen dieser Polynome aus, die im folgenden bestätigt werden soll [1]).

Es sei $Q_n(x)$ die Legendresche Funktion zweiter Art

$$
\begin{aligned}
Q_n(x) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(t)}{x-t}\,dt \\
&= \frac{1.2\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)}\left(x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-n-3} + \ldots\right),
\end{aligned} \tag{1}
$$

wobei $P_n(t)$ das n-te Legendresche Polynom bezeichnet. Die letzte Entwicklung konvergiert für $|x| > 1$. Stieltjes setzt bei $n \geqq 1$

$$\frac{1}{Q_n(x)} = E_n(x) + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \ldots, \tag{2}$$

und definiert auf diese Weise ein Polynom $(n+1)$-ten Grades $E_n(x)$; dieses genügt, wie er unschwer zeigen kann (vgl. § 1), der Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) E_n(x) x^k\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Offenbar bedeutet (3) eine Orthogonalitätsbedingung mit der Belegungsfunktion $P_n(x)$, welche ihr Vorzeichen im Integrationsintervalle n-mal wechselt. Ferner unterscheidet sich wegen (2) die rationale Funktion

---

[1]) Der fragliche Brief ist vom 8. 11. 1894 datiert; Stieltjes ist einige Wochen darauf am 31. 12. 1894 gestorben. In der „Correspondance" folgen noch drei Briefe von Hermite: Der erste (10. 11. 1894) spricht mit Entzücken über die neuen von Stieltjes erfundenen Polynome und wirft die Frage auf, ob diese sich nicht durch geeignete Differentialgleichungen kennzeichnen lassen (?); der zweite (9. 12. 1894) wird nicht abgedruckt, da er anscheinend keine mathematischen Mitteilungen enthält; der dritte (15. 12. 1894) beschäftigt sich mit anderweitigen mathematischen Bemerkungen.

$(E_n(x))^{-1}$ von dem Integral (1) in einer mit x^{-2n-3} beginnenden Potenzreihe von x^{-1}; sie steht also zu $Q_n(x)$ in einer analogen Beziehung wie die Näherungsbrüche der Stieltjesschen Kettenbrüche zu den von Stieltjes betrachteten Integralfunktionen. Es entsteht nun die Frage, in welchem Maße die so erklärten Polynome $E_n(x)$ die Eigenschaften der klassischen Orthogonalpolynome mit positiver Belegungsfunktion teilen. Das dürfte der Gesichtspunkt gewesen sein, unter dem Stieltjes diese Polynome betrachtet hat. Er sprach a. a. O. die folgenden beiden *Vermutungen* aus:

I. *Die Nullstellen von* $E_n(x)$ *sind reell, einfach und im Innern des Intervalles* -1, $+1$ *enthalten.*

II. *Sie werden von den Nullstellen von* $P_n(x)$ *getrennt.*

Weiter bemerkt er: „... Le théorème I est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général auquel j'ai été conduit par la considération de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(u)\,du}{z-u}$ dans le cas où $f(u)$ n'est plus assujettie à la condition de rester positive. Quoique je n'aie pas obtenu encore une démonstration, il ne me reste guère de doute sur l'exactitude de mon théorème. J'ai aussi de très bonnes raisons de croire à l'exactitude du théorème II, mais ici cependant je serai un peu moins affirmatif ...".

Soweit ich feststellen konnte, sind diese Fragestellungen in der Literatur nirgends behandelt worden. In einer jüngst erschienenen Arbeit führt Herr J. Geronimus [2]) verwandte Polynome ein, doch verfolgt er ganz andere Fragen als die der Lage der Nullstellen. In § 4 kommen wir noch auf seine Polynome zurück.

Nach gewissen Vorbemerkungen (§ 1) beweisen wir mit recht einfachen Hilfsmitteln die beiden oben formulierten Sätze (§ 2) und verallgemeinern sie auf gewisse ultrasphärische Polynome (§ 3). § 4 enthält einige Bemerkungen, insbesondere über eine mit unseren Polynomen verknüpfte neue mechanische Quadratur.

Unser in § 2 gegebener Beweis für I und II beruht auf einer expliziten Darstellung von $E_n(x)$ und stimmt kaum mit dem überein, der Stieltjes nach der vorhin zitierten Andeutung vorgeschwebt hat. Er vermutete wohl einen allgemeineren Satz, von dem der vorliegende Fall vielleicht ein besonders charakteristischer Spezialfall ist, eventuell auch eine Verallgemeinerung der nach ihm benannten Kettenbruchtheorie auf gewisse Belegungen, die nicht durchweg nichtnegativ bleiben. Über diese Versuche ist uns jedoch nichts bekannt.

---

[2]) On a set of polynomials, Annals of Math. (2) **31** (1930), S. 681—686.

§ 1.

Vorbemerkungen.

1. Die Definitionsgleichung (2) läßt sich auch in der Form

$$Q_n(x)\,E_n(x) = 1 + b_1\,x^{-n-2} + b_2\,x^{-n-3} + \dots \tag{2'}$$

schreiben. Bekanntlich genügen die Funktionen $Q_n(x)$ einer Rekursion von der Form

$$x\,Q_n(x) = \alpha_n\,Q_{n-1}(x) + \beta_n\,Q_{n+1}(x); \qquad x\,Q_0(x) = 1 + Q_1(x),$$

wo α_n, β_n gewisse Zahlenfolgen sind. Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $x, x^2, \dots, x^n$ schließt man hieraus, daß $Q_n(x)\,E_n(x)$ sich jedenfalls als lineare Kombination von

$$1, Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_{2n+1}(x)$$

darstellen läßt. Infolgedessen gilt mit geeigneten, von n abhängigen Konstanten $c_0, c_1, \dots, c_n$

$$Q_n(x)\,E_n(x) = 1 + c_0\,Q_{n+1}(x) + c_1\,Q_{n+2}(x) + \dots + c_n\,Q_{2n+1}(x). \tag{4}$$

Hierbei liegt x in der längs der Strecke $-1, +1$ aufgeschlitzten x-Ebene.

2. Es sei jetzt $-1 < x < +1$. Wir wissen, daß

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(Q_n(x + i\,\varepsilon) - Q_n(x - i\,\varepsilon)\right) = -\,i\,\pi\,P_n(x) \tag{5'}$$

ist. Weiter existiert auch

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(Q_n(x + i\,\varepsilon) + Q_n(x - i\,\varepsilon)\right) = 2\,Q_n^*(x). \tag{5''}$$

Diese letzte Funktion ist im Innern der Strecke $-1, +1$ analytisch und genügt — ebenso wie $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ — der Legendreschen Differentialgleichung. Sie wird bei der Annäherung an die Endpunkte logarithmisch unendlich. Sie besitzt nach dem klassischen Satz von Sturm $n+1$ einfache Nullstellen, welche von denen von $P_n(x)$ getrennt werden.

3. Aus (4) folgern wir mit Rücksicht auf (5'):

$$P_n(x)\,E_n(x) = \qquad c_0\,P_{n+1}(x) + c_1\,P_{n+2}(x) + \dots + c_n\,P_{2n+1}(x). \tag{6'}$$

Dies ist im wesentlichen mit der von Stieltjes angegebenen Orthogonalitätsgleichung (3) identisch. Der Stieltjessche Beweis verläuft übrigens etwas anders; er beruht auf dem Residuenkalkül.

Weiter erhalten wir nach (5''):

$$Q_n^*(x)\,E_n(x) = 1 + c_0\,Q_{n+1}^*(x) + c_1\,Q_{n+2}^*(x) + \dots + c_n\,Q_{2n+1}^*(x). \tag{6''}$$

Es ist leicht zu sehen, daß (6') oder (6'') das Polynom $E_n(x)$ (in dem ersten Falle bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig charakterisieren.

4. Im folgenden spielt eine Entwicklung von $Q_n(x)$ eine Rolle, die man z. B. durch Umformung der Legendreschen Differentialgleichung

leicht erhalten kann[3]). Man hat in der längs des Intervalls $-1, +1$ aufgeschlitzten x-Ebene:

$$Q_n(x) = 2\frac{2.4\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)} w^{-n-1} F(\tfrac{1}{2}, n+1; n+\tfrac{3}{2}; w^{-2}); \tag{7}$$
$$2x = w + w^{-1},$$

wo F die hypergeometrische Funktion bezeichnet und $|w| > 1$ ist. Infolge (5′) und (5″) erhalten wir also für $w = e^{-i\varphi}$

$$\begin{aligned} &Q_n^*(\cos\varphi) + \frac{i\pi}{2} P_n(\cos\varphi) \\ &= 2\frac{2.4\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)} (f_0 e^{i(n+1)\varphi} + f_1 e^{i(n+3)\varphi} + f_2 e^{i(n+5)\varphi} + \ldots) \end{aligned} \tag{7′}$$

mit den von n abhängigen Koeffizienten

$$f_0 = 1;\quad f_\nu = \frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2.4\ldots 2\nu}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu)}{(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})\ldots(n+\nu+\frac{1}{2})} \tag{8}$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist leicht zu zeigen, daß die f_ν monoton abnehmend (wie $1/\nu$) gegen Null konvergieren, so daß die Entwicklung (7′) für $0 < \varphi < \pi$ konvergiert.

§ 2.

Beweis der Stieltjesschen Vermutung.

1. Aus (1) und (2) folgt, daß $E_n(x)$ nur die Potenzen $x^{n+1}, x^{n-1}, x^{n-3}, \ldots$ enthält; folglich kann $E_n(\cos\varphi)$ als Linearkombination von $\cos(n+1)\varphi$, $\cos(n-1)\varphi$, $\cos(n-3)\varphi$, ... mit reellen Koeffizienten angesetzt werden. Wir schreiben, unter $e_n(\varphi)$ das konjugierte Sinuspolynom verstanden,

$$E_n(\cos\varphi) + i\,e_n(\varphi) = \lambda_0 e^{i(n+1)\varphi} + \lambda_1 e^{i(n-1)\varphi} + \lambda_2 e^{i(n-3)\varphi} + \ldots$$
$$+\begin{cases} \lambda_{\frac{n}{2}} e^{i\varphi}, \\ \frac{1}{2}\lambda_{\frac{n+1}{2}}, \end{cases} \tag{9}$$

je nachdem ob n gerade oder ungerade ist. Zur Berechnung der von n abhängigen reellen Koeffizienten λ_ν benutzen wir die Gleichungen (6″) und (7′)[4]). Sie besagen, daß das Produkt der beiden Kosinusreihen

$$f_0\cos(n+1)\varphi + f_1\cos(n+3)\varphi + f_2\cos(n+5)\varphi + \ldots$$

und

$$\lambda_0\cos(n+1)\varphi + \lambda_1\cos(n-1)\varphi + \lambda_2\cos(n-3)\varphi + \ldots$$

---

[3]) Vgl. etwa E. W. Hobson, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics [Cambridge, University Press, 1931], S. 57—58.

[4]) Man könnte sich ebensogut auch der Gleichungen (6′) und (7′) bedienen.

kein Glied mit $\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, ..., $\cos(n+1)\varphi$ enthält. Das heißt, es gelten die Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} f_0\lambda_1 + f_1\lambda_0 = 0, \\ f_0\lambda_2 + f_1\lambda_1 + f_2\lambda_0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_0\lambda_m + f_1\lambda_{m-1} + \dots + f_{m-1}\lambda_1 + f_m\lambda_0 = 0, \qquad m = \left[\frac{n+1}{2}\right]; \end{cases}$$

weiterhin auch

$$(10')\quad \frac{2.4\dots 2n}{1.3.5\dots(2n+1)} f_0\lambda_0 = 1.$$

Wir schließen daraus, daß die Koeffizienten in (9) mit den $m+1$ ersten Koeffizienten der reziproken Potenzreihe

$$(11)\quad \frac{1.3.5\dots(2n+1)}{2.4\dots 2n}\,\frac{1}{f_0 + f_1 u + f_2 u^2 + \dots} = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \dots$$

übereinstimmen müssen.

2. Eine elementare Schlußweise lehrt [5], daß die Koeffizienten der Reihe (11) die folgenden beiden Eigenschaften haben:

$$(12)\quad \begin{aligned} &1.\quad \lambda_0 > 0,\quad \lambda_1 < 0,\quad \lambda_2 < 0,\quad \dots; \\ &2.\quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Nach dem angeführten Satze beruht 1. auf der Tatsache, daß die Folge

$$\frac{f_\nu}{f_{\nu-1}} = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\nu}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{n+\nu+\frac{1}{2}}\right) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

monoton wächst. Die Gleichung 2. folgt dann aus der Divergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ [6].

Aus den bisherigen Ergebnissen schließen wir in trivialer Weise, daß sämtliche Nullstellen des Polynoms

$$(13)\quad \lambda_0 w^{n+1} + \lambda_1 w^{n-1} + \dots + \begin{cases} \lambda_{\frac{n}{2}} w \\ \frac{1}{2}\lambda_{\frac{n+1}{2}} \end{cases}$$

im Einheitskreise $|w| < 1$ liegen. Ist nämlich $|w| \geqq 1$, so übertrifft das höchste Glied dem Betrage nach die Summe der Beträge von sämtlichen anderen. Nach dem Argumentprinzip muß also der reelle Teil auf dem Einheitskreise, d. h. $E_n(\cos\varphi)$, mindestens $(2n+2)$-mal verschwinden, woraus I folgt.

---

[5]) Vgl. Th. Kaluza, Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen [Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 161—170], S. 163, Satz 3.

[6]) Da die Folge f_ν, wie man leicht zeigt, *vollmonoton* ist, so gilt das gleiche für die Folge $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, \dots$ [vgl. a. a. O. [5])]. Doch spielt diese weitergehende Tatsache im folgenden keine Rolle.

Als eine andere Variante dieses Beweises könnte man (7) statt (7′) benutzen. Es gilt ja

$$E_n(x) = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n+1} \lambda_\nu w^{n+1-2\nu}; \qquad \lambda_\nu = \lambda_{n+1-\nu}, \quad 2x = w + w^{-1}.$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in (2′), wobei (7) zu beachten ist, folgen wieder die Gleichungen (10), (10′).

3. Zum Beweis von II bilden wir für $0 < \varphi < \pi$, n gerade, das Produkt

$$\left[Q_n^*(\cos\varphi) + \frac{i\pi}{2} P_n(\cos\varphi)\right][E_n(\cos\varphi) - i\, e_n(\varphi)]$$

$$= 2\,\frac{2.4\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)}\,[f_0 e^{i(n+1)\varphi} + f_1 e^{i(n+3)\varphi} + \ldots]\,[\lambda_0 e^{-i(n+1)\varphi} + \lambda_1 e^{-i(n-1)\varphi} + \ldots + \lambda_{\frac{n}{2}} e^{-i\varphi}]$$

$$= 2\,\frac{\lambda_0 + \lambda_1 e^{2i\varphi} + \ldots + \lambda_{\frac{n}{2}} e^{in\varphi}}{\lambda_0 + \lambda_1 e^{2i\varphi} + \ldots + \lambda_{\frac{n}{2}} e^{in\varphi} + \lambda_{\frac{n}{2}+1} e^{i(n+2)\varphi} + \ldots}$$

$$= 2\left(1 + \frac{\lambda_{\frac{n}{2}+1} e^{i(n+2)\varphi} + \lambda_{\frac{n}{2}+2} e^{i(n+4)\varphi} + \ldots}{\lambda_0 + \lambda_1 e^{2i\varphi} + \ldots + \lambda_{\frac{n}{2}} e^{in\varphi}}\right)^{-1}.$$

Diese Umformung ist nur geringfügig abzuändern, wenn n ungerade ist. Nun ist der Bruch in der letzten Klammer dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{|\lambda_{\frac{n}{2}+1}| + |\lambda_{\frac{n}{2}+2}| + \ldots}{\lambda_0 - |\lambda_1| - \ldots - |\lambda_{\frac{n}{2}}|} = \frac{-\lambda_{\frac{n}{2}+1} - \lambda_{\frac{n}{2}+2} - \ldots}{\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{\frac{n}{2}}} = 1,$$

so daß der ganze Klammerausdruck, folglich auch sein reziproker Wert, einen positiven reellen Teil besitzt. Wir haben somit gezeigt, daß für $0 < \varphi < \pi$

$$Q_n^*(\cos\varphi)\, E_n(\cos\varphi) + \frac{\pi}{2} P_n(\cos\varphi)\, e_n(\varphi) > 0 \tag{14}$$

gilt. An den Nullstellen von $P_n(x)$ sowie auch für $x \to +1$ und $x \to -1$ besitzt also $E_n(x)$ das gleiche Vorzeichen wie $Q_n^*(x)$; da aber die Werte von $Q_n^*(x)$ an der Stelle $x = +1$, an den n abnehmend gezählten Nullstellen von $P_n(x)$ und an $x = -1$ eine Folge mit lauter Zeichenwechseln bilden, so gilt dasselbe für $E_n(x)$, woraus II hervorgeht.

Damit ist zugleich auch ein weiterer Beweis für I gegeben worden.

Da für $|z| < 1$ der reelle Teil von $(1+z)^{-1}$ größer als $\frac{1}{2}$ bleibt, so gilt schärfer als (14) sogar

$$Q_n^*(\cos\varphi)\,E_n(\cos\varphi) + \frac{\pi}{2}\,P_n(\cos\varphi)\,e_n(\varphi) > 1. \tag{14'}$$

§ 3.

Ultrasphärische Polynome.

Die Ausdehnung unserer Resultate auf gewisse ultrasphärische Polynome verursacht keine prinzipiellen Schwierigkeiten, so daß wir uns im folgenden kurz fassen dürfen.

1. Es sei $\mu > -\frac{1}{2}$; wir definieren das ultrasphärische Polynom $P_n^{(\mu)}(x)$ als das Polynomintegral der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\,y'' - (2\mu+1)\,x\,y' + n\,(n+2\mu)\,y = 0.$$

Die Normierung kann durch die Bedingung

$$P_n^{(\mu)}(1) = \binom{n+2\mu-1}{n},\ \mu \neq 0; \qquad P_n^{(0)}(1) = \frac{2}{n}$$

erfolgen[7]). Ein zweites Integral $Q_n^{(\mu)}(x)$ wird nach Jacobi[8]) durch

$$(1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\,Q_n^{(\mu)}(x) = \mathfrak{Q}_n^{(\mu)}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\,\frac{P_n^{(\mu)}(t)}{x-t}\,dt$$

gegeben. Die Entwicklungen (1) und (2) übertragen sich ohne weiteres, wobei die im Unendlichen reguläre Funktion $\mathfrak{Q}_n^{(\mu)}(x)$ an die Stelle von $Q_n(x)$ tritt. (Die Bestimmung des ersten Faktors $(1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}}$ kann beliebig festgesetzt werden, die des zweiten ist dann völlig bestimmt.) Das Hauptglied der zweiten Entwicklung liefert das Polynom $E_n^{(\mu)}(x)$, mit dem wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

Es gilt wiederum mit geeigneten Konstanten $c_0, c_1, \ldots, c_n$

$$\mathfrak{Q}_n^{(\mu)}(x)\,E_n^{(\mu)}(x) = 1 + c_0\,\mathfrak{Q}_{n+1}^{(\mu)}(x) + c_1\,\mathfrak{Q}_{n+2}^{(\mu)}(x) + \ldots + c_n\,\mathfrak{Q}_{2n+1}^{(\mu)}(x).$$

Für $-1 < x < +1$ existieren ferner die Grenzwerte

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\mathfrak{Q}_n^{(\mu)}(x+i\varepsilon) - \mathfrak{Q}_n^{(\mu)}(x-i\varepsilon)\right) = -\,i\pi\,\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\,(1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\,P_n^{(\mu)}(x),$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\mathfrak{Q}_n^{(\mu)}(x+i\varepsilon) + \mathfrak{Q}_n^{(\mu)}(x-i\varepsilon)\right) = 2\,\mathfrak{Q}_n^*(\mu;\,x)$$

$$= 2\,(1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\,Q_n^*(\mu;\,x).$$

---

[7]) $\mu^{-1}\,P_n^{(\mu)}(x)$ ist stetig in μ; man hat $\lim\limits_{\mu\to 0}\mu^{-1}\,P_n^{(\mu)}(x) = P_n^{(0)}(x)$.

[8]) Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (aus hinterlassenen Papieren mitgeteilt durch E. Heine), Journ. f. Math. **56** (1859), S. 149—165.

Wir erhalten somit

$$(1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}} P_n^{(\mu)}(x) E_n^{(\mu)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}} P_{n+\nu+1}^{(\mu)}(x),$$

$$(1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}} Q_n^*(\mu; x) E_n^{(\mu)}(x) = 1 + \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}} Q_{n+\nu+1}^*(\mu; x).$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}} P_n^{(\mu)}(x) E_n^{(\mu)}(x) x^k d x = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

also wieder eine Orthogonalitätsbeziehung mit einer oszillierenden Belegungsfunktion [9]). Eine leichte Diskussion des obigen Integrals (oder der unten folgenden hypergeometrischen Reihen) ergibt, daß $Q_n^*(\mu; x)$ bei der Annäherung an die Intervallendpunkte $x = \pm 1$ einem endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert zustrebt, wenn $\mu < \frac{1}{2}$, logarithmisch unendlich wird, wenn $\mu = \frac{1}{2}$, und wie $(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\mu}$ unendlich wird, wenn $\mu > \frac{1}{2}$ ist. (Im letzten Falle konvergiert $\mathfrak{Q}_n^*(\mu; x)$ gegen einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwert.)

2. Es sei $2x = w + w^{-1}, |w| > 1$. Durch eine leichte Umformung der Gaußschen Differentialgleichung erhalten wir [10])

$$Q_n^{(\mu)}(x) = 2^{2\mu-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+2\mu)}{\Gamma(n+\mu+1)} w^{-n-2\mu} F(\mu, n+2\mu; n+\mu+1; w^{-2}),$$

wobei die Bestimmung von $w^{-2\mu}$ frei ist. Folglich wird wegen $2\sqrt{x^2-1} = w - w^{-1}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_n^{(\mu)}(x) &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+2\mu)}{\Gamma(n+\mu+1)} w^{-n-1} (1-w^{-2})^{2\mu-1} F(\mu, n+2\mu; n+\mu+1; w^{-2}) \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+2\mu)}{\Gamma(n+\mu+1)} w^{-n-1} F(1-\mu, n+1; n+\mu+1; w^{-2}) \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+2\mu)}{\Gamma(n+\mu+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f_n^{(\mu)} w^{-n-1-2\nu}\end{aligned}$$

mit

$$f_0^{(\mu)} = 1; \; f_\nu^{(\mu)} = \frac{(1-\mu)(2-\mu)\ldots(\nu-\mu)}{1 . 2 \ldots \nu} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu)}{(n+\mu+1)(n+\mu+2)\ldots(n+\mu+\nu)}$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hierbei ist die von Euler herrührende Beziehung

$$(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; z) = F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z)$$

---

[9]) Die Nullstellenverteilung der Funktionen $P_n^{(\mu)}(x)$ und $Q_n^*(\mu; x)$ entspricht völlig dem Fall $\mu = \frac{1}{2}$.

[10]) Vgl. a. a. O. [8]), S. 233—234; in (67) sind daselbst [nach Abtrennung des Faktors $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}m}$] die Größen n und m bzw. durch $n+\mu-\frac{1}{2}$ und $\mu-\frac{1}{2}$ zu ersetzen.

benutzt worden[11]). Für $w = e^{-i\varphi}$ erhalten wir

$$(1-\cos^2\varphi)^{\mu-\frac{1}{2}}\left[Q_n^*(\mu;\cos\varphi)+\frac{i\pi}{2}\,\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\,P_n^{(\mu)}(\cos\varphi)\right]$$
$$=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+2\mu)}{\Gamma(n+\mu+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(\mu)}\,e^{i(n+1+2\nu)\varphi}.$$

3. *Wir beweisen nun unter der Voraussetzung* $0<\mu\leqq 2$ *das Analogon der Sätze* I *und* II *der Einleitung.*

Im Hauptfall $0<\mu<1$ sind sämtliche $f_\nu^{(\mu)}$ positiv, außerdem ist

$$\frac{f_\nu^{(\mu)}}{f_{\nu-1}^{(\mu)}}=\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)\left(1-\frac{\mu}{n+\mu+\nu}\right)$$

monoton wachsend. Für die Koeffizienten der reziproken Potenzreihe

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+2\mu)}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(\mu)}u^\nu\right\}^{-1}=\lambda_0^{(\mu)}+\lambda_1^{(\mu)}u+\lambda_2^{(\mu)}u^2+\ldots$$

gilt somit wieder

$$\lambda_0^{(\mu)}>0,\ \lambda_1^{(\mu)}<0,\ \lambda_2^{(\mu)}<0,\ldots.$$

Dagegen hat man

$$\lambda_0^{(\mu)}+\lambda_1^{(\mu)}+\lambda_2^{(\mu)}+\ldots=\begin{cases}0 & \text{für}\quad 0<\mu\leqq\frac{1}{2},\\ \lambda^{(\mu)}>0 & \quad ,,\quad \frac{1}{2}<\mu<1.\end{cases}$$

In der Tat ist die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(\mu)}$ im Falle $\mu>\frac{1}{2}$ absolut konvergent. Die Schlußweise des vorigen Paragraphen kann für $0<\mu\leqq\frac{1}{2}$ ohne Änderung übernommen werden. Im Falle $\frac{1}{2}<\mu<1$ ist eine kleine Modifikation nötig: Man hat jetzt (n gerade)

$$0<\frac{-\lambda_{\frac{n}{2}+1}^{(\mu)}-\lambda_{\frac{n}{2}+2}^{(\mu)}-\ldots}{\lambda_0^{(\mu)}+\lambda_1^{(\mu)}+\ldots+\lambda_{\frac{n}{2}}^{(\mu)}}=\frac{-\lambda_{\frac{n}{2}+1}^{(\mu)}-\lambda_{\frac{n}{2}+2}^{(\mu)}-\ldots}{\lambda^{(\mu)}-\lambda_{\frac{n}{2}+1}^{(\mu)}-\lambda_{\frac{n}{2}+1}^{(\mu)}-\ldots}<1.$$

4. Im Falle $1<\mu<2$ ist

$$f_0^{(\mu)}>0,\ f_1^{(\mu)}<0,\ f_2^{(\mu)}<0,\ \ldots,$$

während die $\lambda_\nu^{(\mu)}$ sämtlich positiv sind. Es muß jetzt der Beweis in § 2, 2 abgeändert werden. Wir haben zu zeigen, daß die Funktion (n gerade)

$$\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+2\mu)}{\Gamma(n+\mu+1)}\left(f_0^{(\mu)}+f_1^{(\mu)}u+f_2^{(\mu)}u^2+\ldots\right)\left(\lambda_0^{(\mu)}+\lambda_1^{(\mu)}u+\ldots+\lambda_{\frac{n}{2}}^{(\mu)}u^{\frac{n}{2}}\right)$$

---

[11]) Man kann dies durch Einsetzen in die Differentialgleichung leicht verifizieren.

auf dem Einheitskreise $|u| = 1$, $u \neq 1$, einen positiven reellen Teil besitzt. Nun hat dieses Produkt (nach Division durch 2) offenbar die Form

$$1 - h_{\frac{n}{2}+1} u^{\frac{n}{2}+1} - h_{\frac{n}{2}+2} u^{\frac{n}{2}+2} - \dots$$

Die Koeffizienten h_ν sind, wie man sich durch Ausmultiplizieren der beiden Potenzreihen sofort überzeugt, sämtlich *positiv*. Ferner gilt nach der oben (2) angegebenen ersten Darstellung für $\mathfrak{Q}_n^{(\mu)}(x)$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(\mu)} u^\nu > 0$$

im Intervalle $0 < u < 1$, so daß

$$h_{\frac{n}{2}+1} + h_{\frac{n}{2}+2} + \dots \leqq 1.$$

Hieraus folgt aber die Behauptung.

5. Die Grenzfälle $\mu = 0$, $\mu = 1$, $\mu = 2$ lassen sich direkt erledigen. Für $\mu = 0$ wird

$$f_0^{(0)} = f_1^{(0)} = f_2^{(0)} = \dots = 1,$$

$$\lambda_0^{(0)} = -\lambda_1^{(0)} = \frac{2n}{\sqrt{\pi}}, \quad \lambda_2^{(0)} = \lambda_3^{(0)} = \dots = 0,$$

$$E_n^{(0)}(\cos\varphi) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}}[\cos(n+1)\varphi - \cos(n-1)\varphi]\,^{12}).$$

Die Nullstellen $\varphi = \frac{\nu\pi}{n}$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots, n)$ werden von denen von $\cos n\varphi$ getrennt. Zwei Nullstellen rücken in die Intervallendpunkte.

Im Falle $\mu = 1$ wird

$$f_0^{(1)} = 1, \quad f_1^{(1)} = f_2^{(1)} = \dots = 0,$$

$$\lambda_0^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad \lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = \dots = 0,$$

$$E_n^{(1)}(\cos\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos(n+1)\varphi$$

mit den Nullstellen $\varphi = \frac{(\nu+\frac{1}{2})\pi}{n+1}$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots, n)$, die von denen von $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ getrennt werden.

Es sei endlich $\mu = 2$. Dann wird

$$f_0^{(2)} = 1, \quad f_1^{(2)} = -\frac{n+1}{n+3}, \quad f_2^{(2)} = f_3^{(2)} = \dots = 0,$$

$$\lambda_\nu^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{n+3}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

---

[12]) Für $n = 1$ ist $\cos 2\varphi - 1$ in $\cos 2\varphi - \frac{1}{2}$ abzuändern.

Man schließt hier zweckmäßigerweise ebenso wie in 4. Es wird

$$0 < h_{\frac{n}{2}+1} < 1, \quad h_{\frac{n}{2}+2} = h_{\frac{n}{2}+3} = \ldots = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

6. Schließlich bemerken wir, daß unser Satz für $\mu < 0$ nicht richtig ist. Eine leichte Rechnung liefert nämlich

$$E_2^{(\mu)}(x) = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu+3)}{\Gamma(2\mu+2)} x \left(x^2 - \frac{3}{\mu+3}\right).$$

Im Falle $\mu < 0$ liegen also die Nullstellen außerhalb des Intervalles $-1, +1$. Ob dies auch für $\mu > 2$ eintreten kann, vermochte ich nicht zu entscheiden.

§ 4.

Bemerkungen.

1. *Über die Sinuspolynome $e_n(\varphi)$.* Das in § 2 definierte Sinuspolynom $e_n(\varphi)$ kann in der Form

$$e_n(\varphi) = \lambda_0 \sin(n+1)\varphi + \lambda_1 \sin(n-1)\varphi + \ldots = \sin\varphi\, G_n(\cos\varphi)$$

geschrieben werden, wo $G_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist. Aus der dortigen Überlegung folgt:

I. *Sämtliche Nullstellen von $G_n(x)$ sind reell, einfach und im Innern des Intervalls $-1, +1$ gelegen.*

II. *Sie trennen die $n+1$ Nullstellen von $Q_n^*(x)$.*

Multipliziert man das obige Sinuspolynom mit

$$\frac{\pi}{2} P_n(\cos\varphi) = 2 \frac{2.4\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)} (f_0 \sin(n+1)\varphi + f_1 \sin(n+3)\varphi + \ldots),$$

so ergibt sich nach (10) eine Kosinusreihe, in welcher die Glieder

$$\cos\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \ldots,\ \cos n\varphi$$

fehlen; d. h. man hat

$$\int_0^{\pi} \sin\varphi\, G_n(\cos\varphi)\, P_n(\cos\varphi) \cos k\varphi\, d\varphi = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Das sind aber gerade diejenigen Gleichungen, welche die durch Herrn Geronimus a. a. O. [2]) betrachteten Polynome $S_n(x) = \text{const}\, G_n(x)$ charakterisieren [13]). Bei ihm erscheint $S_n(x)$ als der Hauptteil der Entwicklung von $(Q_n(x)\sqrt{x^2-1})^{-1}$ in der Umgebung von $x = \infty$, eine Definition, die sich mit der obigen leicht identifizieren läßt.

[13]) Vgl. S. 682, (12); natürlich ist bei uns nur der Spezialfall $p(x) = 1$ gemeint.

Die Nullstellen von $G_n(x)$ trennen übrigens auch die Nullstellen von $E_n(x)$.

2. *Mechanische Quadratur.* Es seien

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n$$

die Nullstellen von $E_n(x)$ in abnehmender Reihenfolge; $x_\nu = x_\nu(n)$ hängt hier von n ab. Die übliche Schlußweise liefert dann die Existenz von gewissen nur von n abhängigen Konstanten

$$g_0, g_1, g_2, \dots, g_n,$$

so daß *für ein beliebiges Polynom* $(2n+1)$*-ten Grades* $A(x)$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) A(x)\, dx = g_0 A(x_0) + g_1 A(x_1) + g_2 A(x_2) + \dots + g_n A(x_n)$$

gilt. Die Christoffelschen Zahlen $g_\nu = g_\nu(n)$ dieser Quadraturformel gestatten wie immer die Darstellung

$$g_\nu = \int_{-1}^{+1} P_n(x) \frac{E_n(x)}{E_n'(x_\nu)(x - x_\nu)}\, dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x) \left(\frac{E_n(x)}{E_n'(x_\nu)(x - x_\nu)}\right)^2 dx$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Die zweite Formel liefert hier nichts über das Vorzeichen der g_ν, wohl aber die erste. Infolge der bekannten Orthogonalitätseigenschaft der $P_n(x)$ gilt nämlich

$$g_\nu = \frac{k_n}{E_n'(x_\nu)} \int_{-1}^{+1} P_n(x)\, x^n\, dx,$$

wobei k_n den höchsten Koeffizienten von $E_n(x)$ bedeutet. Daraus folgt mit Rücksicht auf unser Hauptresultat I:

$$\operatorname{sg} g_\nu = \operatorname{sg} E_n'(x_\nu) = (-1)^\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Durch Ausrechnung des obigen Integrals und durch Beachtung von (10′) erhält man übrigens

$$g_\nu = \frac{2}{E_n'(x_\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n),$$

womit unsere Quadraturformel die folgende Gestalt gewinnt:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n(x) A(x)\, dx = \frac{A(x_0)}{E_n'(x_0)} + \frac{A(x_1)}{E_n'(x_1)} + \dots + \frac{A(x_n)}{E_n'(x_n)}.$$

Einen lehrreichen Spezialfall erhält man für

$$A(x) = (t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \dots + t_n x^n)^2,$$

wo $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ beliebige reelle Größen sind. Durch Einsetzen in die Quadraturformel folgt

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} P_n(x)\,(t_0 + t_1\,x + t_2\,x^2 + \ldots + t_n\,x^n)^2\,d\,x$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{E_n'(x_\nu)}\,(t_0 + t_1\,x_\nu + t_2\,x_\nu^2 + \ldots + t_n\,x_\nu^n)^2,$$

d. h. eine Zerlegung der linksstehenden quadratischen Form in eine Summe von Quadraten von Linearformen. Man kann übrigens von vornherein sehen, daß die Determinante dieser Form nicht verschwindet, d. h. daß sämtliche g_ν von Null verschieden sind. In der Tat fehlen auf der linken Seite sämtliche Glieder $t_\mu\,t_\nu$ mit $\mu + \nu < n$, so daß die Determinante

$$= \pm \left\{\tfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} P_n(x)\,x^n\,d\,x\right\}^{n+1} \neq 0$$

wird. Man beachte, daß nach Theorem II das Vorzeichen von g_ν mit dem von $P_n(x_\nu)$ übereinstimmt.

Analoge Bemerkungen gelten im ultrasphärischen Falle.

Königsberg, Pr., März 1934.

(Eingegangen am 20. 4. 1934.)