Zur Struktur von Alternativkörpern.

Von

Ruth Moufang in Frankfurt a. M.

Inhalt.

Einleitung.

Das allgemeine Problem, an das die folgenden Untersuchungen anknüpfen, ist das Identitätsproblem in Alternativkörpern. Diese sind durch ein gewisses Axiomensystem definiert, in dem die Multiplikation nicht dem assoziativen Gesetz[1]) unterliegt. (Siehe S. 418.) Die Frage, ob ein Alternativkörper durch ein hyperkomplexes System realisiert werden kann, wird hier nicht berührt; sie ist bekanntlich durch die Untersuchungen von M. Zorn[2]) zu einem gewissen Abschluß gebracht. Auf das Identitätsproblem in Alternativkörpern, d. h. auf die Frage, wann zwei aus Alternativkörperelementen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ und den Operationszeichen komponierte Ausdrücke W_1 und W_2 auf Grund der Alternativkörperaxiome identisch sind, gibt der Satz von Artin[3]) eine erste Antwort; er be-

---

[1]) Wir gebrauchen im folgenden, wie dies üblich ist, die Bezeichnungen „Axiom" und „Gesetz" synonym. Darüber hinaus bezeichnen wir allgemein als „Verwandlungsregel" (kurz „Regel") oder „Identität" eine Beziehung, die innerhalb eines gewissen Zahlbereiches für beliebige Elemente, d. h. identisch gültig ist. Insbesondere bezeichnen wir also die Beziehungen, die aus einem gegebenen System von Axiomen folgen, als Verwandlungsregeln oder Identitäten. Dabei kann eine Identität, die sich als Folge eines bestimmten Axiomensystems ergeben hat, ihrerseits in einem neuen System die Rolle eines Axioms übernehmen. — Eine Beziehung, die nur für gewisse Elemente eines gegebenen Bereiches gilt, nennen wir eine „Relation", wie dies auch in der Gruppentheorie üblich ist.

[2]) M. Zorn: Theorie der alternativen Ringe [Hamb. Abhandl. 8 (1930)], zitiert mit Z. M. Zorn: Alternativkörper und quadratische Systeme [Hamb. Abhandl. 9 (1933)]. Vergl. auch R. Moufang: Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit (D_9) [Hamb. Abhandl. 9 (1933)]. Zitiert mit M_1.

[3]) Siehe Z., S. 127 ff. Zorn bezeichnet als „Satz von Artin" die etwas schwächere Aussage, daß in einem alternativen Ring irgend zwei Elemente einen assoziativen Ring erzeugen. Aber da es leicht ist, vom Ring auf den Schiefkörper zu schließen, und da sich bei Zorn selbst alles vorfindet, um den assoziativen Ring innerhalb des Alternativkörpers in einen Schiefkörper einzubetten, bezeichnen wir der Einfachheit halber als Satz von Artin den im Text gegebenen Satz.

sagt, *daß in einem Alternativkörper irgend zwei Elemente einen Schiefkörper erzeugen.* Enthalten also W_1 und W_2 nur zwei Symbole α, β, so ist das Identitätsproblem im Alternativkörper zurückgeführt auf das Identitätsproblem im Schiefkörper. Enthalten W_1 und W_2 mindestens drei verschiedene Symbole α, β, γ, so steht die Antwort auf die oben gestellte Frage noch aus. Im folgenden wird nur eine Lösung gegeben unter der zusätzlichen Annahme, daß α, β, γ sich assoziativ multiplizieren; wir bezeichnen die Elemente alsdann mit a, b, c. Es gilt der

Satz: *In einem Alternativkörper erzeugen irgend drei Elemente* a, b, c, *die der Relation* $(ab)c = a(bc)$ *genügen, einen Schiefkörper* $R^*(a, b, c)$. Wir bezeichnen diesen Satz als verschärften Artinschen Satz, da speziell für $c = 1$ der Artinsche Satz vorliegt.

Ein Teilsystem S eines Alternativkörpers ist dann und nur dann ein Schiefkörper, wenn in S das assoziative Gesetz der Multiplikation allgemein gültig ist; der kürzeste Weg, um dies für alle aus den obigen a, b, c rational zusammengesetzten Ausdrücke zu zeigen, verläuft entsprechend wie bei Zorn[4]). Wir schlagen hier einen anderen Weg ein, indem wir zunächst nachweisen, daß a, b, c, multiplikativ verknüpft, eine Gruppe erzeugen, das heißt, daß alle Potenzprodukte in a, b, c sich assoziativ multiplizieren. Der Beweis dieser Aussage über eine rein multiplikative Beziehung erfordert wesentlich die Heranziehung auch der additiven Alternativkörperaxiome. Das Bestreben, die Addition und die distributiven Gesetze möglichst weitgehend zu eliminieren, führt zu folgendem Resultat: In jedem Alternativkörper gelten die multiplikativen Identitäten (10) und (11) von S. 419, deren Beweis die Addition erfordert. Jetzt adjungieren wir (10) bzw. (10) und (11) als Axiome zu den rein multiplikativen Alternativkörperaxiomen I (7), (8) (S. 418 und 420), und bezeichnen diese insgesamt als Axiome der Quasigruppen Q^* bzw. Q^{**}. Unter einer Quasigruppe verstehen wir allgemein eine Gesamtheit von Elementen mit einer Verknüpfung, die zu irgend zwei Elementen eindeutig ein drittes Element der Gesamtheit liefert, ferner zu jedem Element eindeutig ein Reziprokes, das gleichzeitig links- und rechtsreziprok ist; an Stelle des Gesetzes, daß die Verknüpfung assoziativ ist, treten jetzt — im Gegensatz zu den gewöhnlichen Gruppenaxiomen — schwächere Verwandlungsregeln für die Beklammerung. Jede Gruppe ist eine Quasigruppe, aber nicht umgekehrt. Sind auch Q^* und Q^{**} keine Gruppen, so enthalten sie doch Teilsysteme, die Gruppen sind:

I. *In einer Quasigruppe* Q^* *erzeugen irgend zwei Elemente* a, b *eine Gruppe.*

[4]) Siehe Z., S. 127 ff.

II. *In einer Quasigruppe Q^{**} erzeugen drei Elemente a, b, c, die der Relation $(a\,b)\,c = a\,(b\,c)$ genügen, eine Gruppe.*

In ähnlicher Weise läßt sich jede Gruppe mit mehr als drei Erzeugenden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ einbetten in eine Quasigruppe Q^{**}, in der die a_i gewissen Beklammerungsrelationen genügen, entsprechend wie für $k = 3$. Wir werden das nicht ausführen. — Mit diesen Resultaten sind die Axiome einer Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden abgeschwächt. — Die Lösung des vollen Identitätsproblems in einer Quasigruppe, z. B. in Q^* oder Q^{**}, scheint schwierig zu sein. — Ist die freie Gruppe aus zwei Erzeugenden a, b bzw. drei Erzeugenden a, b, c gewonnen, so ist der Übergang zum Schiefkörper $R^*(a, b)$ bzw. $R^*(a, b, c)$ leicht innerhalb des Alternativkörpers zu vollziehen unter Heranziehung der distributiven Gesetze und der Identität $\alpha^{-1}\beta^{-1} = (\beta\,\alpha)^{-1}$.[5])

In § 1 stellen wir alle für das folgende notwendigen Hilfsformeln zusammen. § 2 gibt die Ableitung der Gruppe aus zwei Erzeugenden aus den Axiomen der Quasigruppe Q^*, § 3 den Aufbau der Gruppe aus drei Erzeugenden in Q^{**} und am Schluß eine Bemerkung über die geometrische Bedeutung des verschärften Artinschen Satzes.

§ 1.
Hilfsformeln.

1. Ein **Alternativkörper** ist definiert als eine Gesamtheit von Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, die additiv und multiplikativ verknüpfbar sind nach den folgenden Regeln:

I
- (1) Die Addition und die Multiplikation ist stets ausführbar und eindeutig.
- (2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
- (3) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
- (4) Es existiert ein Nullelement und zu jedem α genau ein inverses Element $\bar{\alpha}$, so daß $\alpha + \bar{\alpha} = 0$.
- (5) $\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$.
- (6) $(\beta + \gamma)\,\alpha = \beta\,\alpha + \gamma\,\alpha$.
- (7) Es existiert ein Einselement und zu jedem $\alpha \neq 0$ genau ein reziprokes Element α^{-1}, so daß $\alpha\,\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\,\alpha = 1$.
- (8) $\alpha\,(\alpha^{-1}\beta) = (\alpha\,\alpha^{-1})\,\beta$; $(\beta\,\alpha^{-1})\,\alpha = \beta\,(\alpha^{-1}\,\alpha)$.

Aus (7) und (8) folgt sofort

(8a) $$(\alpha\,\beta)^{-1} = \beta^{-1}\,\alpha^{-1}.$$

[5]) Der Übergang von der freien Gruppe zum Schiefkörper ist für $R^*(a, b)$ durchgeführt in R. Moufang: Die Desarguesschen Sätze vom Rang 10 (Math. Annalen 108 (1933) S. 306 ff.) Zitiert mit M_2.

Ein Alternativkörper kann auch definiert werden als ein **alternativer Ring**[6]), der der Bedingung (7) genügt. Dabei ist ein alternativer Ring definiert durch folgende Axiome:

(1) bis (6) wie oben, außerdem

$$\alpha(\alpha\beta) = (\alpha\alpha)\beta; \quad \beta(\alpha\alpha) = (\beta\alpha)\alpha. \tag{8'}$$

Daraus folgt dann weiter, daß auch

$$\alpha(\beta\alpha) = (\alpha\beta)\alpha \text{ ist.} \tag{8'a}$$

Wir bezeichnen das System der Axiome

(1) bis (7), (8′) mit I′.

Die beiden Axiomensysteme I und I′ sind äquivalent: In I gilt (8′) und in I′ gilt (8)[7]).

2. In einem Alternativkörper wechselt die Größe

$$[\alpha, \beta, \gamma] = (\alpha\beta)\gamma - \alpha(\beta\gamma)$$

bei Vertauschung von zweien der Elemente α, β, γ das Vorzeichen, wie man sofort mit Hilfe der distributiven Gesetze nachrechnet[8]). Insbesondere folgt daraus, daß, wenn die Elemente α, β, γ sich in einer bestimmten Reihenfolge assoziativ multiplizieren, sie dies auch in jeder anderen Reihenfolge tun. Wir geben dafür in 5. einen zweiten Beweis.

3. In einem Alternativkörper gilt die Regel[9]):

$$[\alpha, \beta\alpha, \gamma] = \alpha[\alpha, \beta, \gamma]. \tag{9}$$

Daraus folgt insbesondere, daß

$$\{\alpha(\gamma\alpha)\}\beta = \alpha\{\gamma(\alpha\beta)\}, \tag{10}$$

$$(\alpha\beta)(\gamma\alpha) = \alpha\{(\beta\gamma)\alpha\}, \tag{11}$$

denn wegen 2. und (9) gilt

$$\begin{aligned}\{\alpha(\gamma\alpha)\}\beta - \alpha\{(\gamma\alpha)\beta\} + \alpha\{(\gamma\alpha)\beta\} - \alpha\{\gamma(\alpha\beta)\}\\ = [\alpha, \gamma\alpha, \beta] + \alpha[\gamma, \alpha, \beta] = 0,\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)(\gamma\alpha) - \alpha\{\beta(\gamma\alpha)\} + \alpha\{\beta(\gamma\alpha)\} - \alpha\{(\beta\gamma)\alpha\}\\ = [\alpha, \beta, \gamma\alpha] - \alpha[\beta, \gamma, \alpha] = 0.\end{aligned}$$

Wegen $\alpha(\gamma\alpha) = (\alpha\gamma)\alpha$ kann man die Identität (10) auch in der Form schreiben

$$\{(\alpha\gamma)\alpha\}\beta = \alpha\{\gamma(\alpha\beta)\}. \tag{10}$$

---

[6]) Siehe Z., S. 125.

[7]) Daß in I′ (8) gilt, ist bewiesen in Z., S. 142. Daß in I (8′) gilt, ist bewiesen in M_1, S. 216 ff.

[8]) Siehe Z., S. 125 ff.

[9]) Siehe Z., S. 142.

Da in einem Alternativkörper jede Identität zwischen zwei Produkten auch von rechts nach links gelesen werden darf (man gehe zu den Reziproken über und berücksichtige (8a)!), so gilt auch

$$(\overline{10}) \qquad \beta\{(\alpha\gamma)\alpha\} = \beta\{\alpha(\gamma\alpha)\} = \{(\beta\alpha)\gamma\}\alpha.$$

Für $\gamma = 1$ liefern (10) und $(\overline{10})$ die Identitäten (8′), für $\beta = 1$ (8′a). Setzt man $\gamma\alpha = \delta$ resp. $\alpha\gamma = \delta$, so nimmt (10) resp. $(\overline{10})$ die Form an

$$(10\,\mathrm{a}) \qquad (\alpha\delta)\beta = \alpha\{(\delta\alpha^{-1})(\alpha\beta)\},$$

$$(\overline{10}\,\mathrm{a}) \qquad \beta(\delta\alpha) = \{(\beta\alpha)(\alpha^{-1}\delta)\}\alpha.$$

4. Wir bezeichnen eine Gesamtheit von Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, die multiplikativ nach den folgenden Regeln verknüpfbar sind:

II
- (1) Zu zwei Elementen α, β existiert stets genau ein Element $\alpha\beta$,
- (2) es existiert ein Einselement und zu jedem α stets genau ein Reziprokes α^{-1} mit $\alpha^{-1}\alpha = 1 = \alpha\alpha^{-1}$,
- (3) $\alpha(\alpha^{-1}\beta) = (\alpha\alpha^{-1})\beta$; $(\beta\alpha^{-1})\alpha = \beta(\alpha^{-1}\alpha)$,
- (4) $\{\alpha(\gamma\alpha)\}\beta = \alpha\{\gamma(\alpha\beta)\}$,

als eine „Quasi-Gruppe Q^*“. [In den gewöhnlichen Gruppenaxiomen tritt an Stelle von (3) und (4) das allgemeine assoziative Gesetz $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$]. Gilt außerdem noch

$$(5) \qquad (\alpha\beta)(\gamma\alpha) = \alpha\{(\beta\gamma)\alpha\},$$

so bilden die Elemente $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ eine „Quasi-Gruppe Q^{**}“. Auch (3), (4) und (5) zusammen liefern noch nicht das volle assoziative Gesetz, denn in jedem Alternativkörper bilden die von 0 verschiedenen Elemente gegenüber der Multiplikation eine Quasigruppe Q^{**}, und sogar aus den Alternativkörperaxiomen folgt noch nicht das volle assoziative Gesetz, wie das Zahlsystem von Cayley zeigt. — In jeder Quasigruppe Q^* bleibt eine Identität zwischen zwei Produkten richtig, wenn sie von rechts nach links gelesen werden, weil (8a) gilt.

5. *Enthält eine Quasigruppe Q^* drei Elemente u, v. w, für die*

$$(12) \qquad (uv)w = u(vw)$$

ist, so gilt diese Relation auch, wenn irgend zwei Elemente darin vertauscht werden.

Beweis: Schreibt man II (4) mit $\gamma\alpha = \delta$ in der Form

$$(10\,\mathrm{a}) \qquad (\alpha\delta)\beta = \alpha\{(\delta\alpha^{-1})(\alpha\beta)\},$$

so gilt speziell für u, v, w

$$(uv)w = u\{(vu^{-1})(uw)\} = u(vw),$$

also

$$(13) \qquad (vu^{-1})(uw) = vw.$$

Also ist weiterhin nach II (3) und Formel (8a)

$$(v u) w = v \{(u v^{-1})(v w)\} = v [(u v^{-1}) \{(v u^{-1})(u w)\}] = v (u w)$$

q. e. d.

Nun ist noch zu zeigen, daß in (12) auch v mit w vertauscht werden darf. Mit (10a) gilt zugleich

$$(\overline{10}\text{a}) \qquad \beta (\delta \alpha) = \{(\beta \alpha)(\alpha^{-1} \delta)\} \alpha,$$

also

$$u (v w) = \{(u w)(w^{-1} v)\} w = (u v) w,$$

d. h.

$$(14) \qquad (u w)(w^{-1} v) = u v,$$

daraus

$$u w = (u v)(v^{-1} w),$$

also

$$(u w) v = \{(u v)(v^{-1} w)\} v = u (w v)$$

q. e. d. Also gelten in Q^* insbesondere (8′) und (8′a).

6. *In der Relation* (12) *darf ferner irgendein Element durch sein Reziprokes ersetzt werden.* Wegen 5. genügt es z. B. zu zeigen, daß

$$u (w^{-1} v) = (u w^{-1}) v$$

ist.

Beweis: Aus (14) folgt

$$w^{-1} v = (w^{-1} u^{-1})(u v),$$

also wegen (10a)

$$u (w^{-1} v) = u \{(w^{-1} u^{-1})(u v)\} = (u w^{-1}) v$$

q. e. d.

Diese Sätze gelten a fortiori auch in einer Quasigruppe Q^{**}.

§ 2.

Die Gruppe aus zwei Erzeugenden.

1. Wir beweisen jetzt:

In einer Quasigruppe Q^* erzeugen irgend zwei Elemente a, b eine Gruppe.

Man hat zu zeigen, daß ein Potenzprodukt in a und b mit ganzen Exponenten beliebig beklammert, also ohne Klammern geschrieben werden darf. Der Beweis wird mit vollständiger Induktion geführt und zwar nach der Anzahl der Faktoren a^i, b^k (i, k ganz), die in dem Produkt auftreten.

2. Wir haben zunächst zu zeigen, daß *drei Faktoren des Typus a^i, b^k (i, k ganz) sich assoziativ multiplizieren.* Dies geschieht in mehreren Schritten.

A) Man definiert rekursiv

$$\left.\begin{array}{l} a^i = a\, a^{i-1}, \\ a^{-i} = a^{-1} a^{-i+1}, \quad \text{also } a\, a^{-i} = a^{-i+1} \end{array}\right\} \text{für } i > 0.$$

Dann gilt zunächst

$$a\,a^i = a^i\,a \quad \text{für ganzes } i:$$

Für $i > 0$ folgt aus

$$a\,a^i = a^i\,a$$

$$a\,(a\,a^i) = a\,a^{i+1} = a\,(a^i\,a) = (a\,a^i)\,a = a^{i+1}\,a.$$

Und aus

$$a^{-1}\,a^{-i} = a^{-i}\,a^{-1}$$

schließt man ebenso auf

$$a^{-1}\,a^{-(i+1)} = a^{-(i+1)}\,a^{-1}.$$

Endlich folgt aus

$$a\,a^{-i} = a^{-i}\,a$$

$$a\,a^{-(i+1)} = a\,(a^{-1}\,a^{-i}) = (a\,a^{-1})\,a^{-i} = a^{-i}$$

$$a^{-(i+1)}\,a = (a^{-1}\,a^{-i})\,a = (a^{-i}\,a^{-1})\,a = a^{-i},$$

also

$$a\,a^{-(i+1)} = a^{-(i+1)}\,a.$$

B) Sei jetzt bis zu festem $i > 0$ und für jedes ganze k bewiesen:

$$a^i\,a^k = a^{i+k}.$$

Dies ist richtig für $i = 1$. Dann folgt

$$a^{i+1}\,a^k = (a\,a^i)\,a^k = \{a\,(a\,a^{i-1})\}\,a^k = \{a\,(a^{i-1}\,a)\}\,a^k$$
$$= a\,\{a^{i-1}\,(a\,a^k)\} = a\,\{a^{i-1}\,a^{k+1}\} = a\,a^{i+k} = a^{i+k+1}.$$

Daraus folgt speziell für $k = -i$

$$a^i\,a^{-i} = a^0 = 1, \quad \text{also auch } a^{-i}\,a^i = 1.$$

Ferner folgt für $i > 0$ und ganzes k

$$a^{-i}\,a^k = a^{-i}\,(a^i\,a^{k-i}) = a^{k-i}.$$

Damit ist allgemein für ganze i, k bewiesen:

(15) $$a^i\,a^k = a^{i+k}.$$

C) Aus der für $k = 1$ richtigen Induktionsvoraussetzung, daß bis zu festem $k > 0$

$$a^k\,(a\,b) = a^{k+1}\,b$$

sei, folgt

$$(a^{k+1}\,a)\,b = \{a^{k+1}\,(a^{-k}\,a^{k+1})\}\,b = a^{k+1}\,\{a^{-k}\,(a^{k+1}\,b)\}$$
$$= a^{k+1}\,\{a^{-k}\,[a^k\,(a\,b)]\} = a^{k+1}\,\{a\,b\}.$$

D) Gilt bis zu festem $k > 0$ und für jedes positive i

$$a^i\,(a^k\,b) = a^{i+k}\,b$$

(richtig für $k = 1$ nach C)), so folgt bei Ersetzung von b durch $a\,b$

$$a^i\,\{a^k\,(a\,b)\} = a^{i+k}\,(a\,b) = a^{i+k+1}\,b = a^i\,(a^{k+1}\,b).$$

Diese Beziehungen gelten identisch in b. Mit Rücksicht auf § 1, 5. und 6. ist damit bewiesen, daß drei Faktoren des Typus a^i, b^l mit ganzen Exponenten sich in jeder Reihenfolge assoziativ multiplizieren.

3. Aus dieser Tatsache haben wir an anderer Stelle[10]) mit Hilfe vollständiger Induktion und allein unter Benutzung des in § 1, 5., abgeleiteten Satzes geschlossen, daß auch ein Produkt aus n Faktoren des Typus a^i, b^l mit ganzen Exponenten beliebig beklammert werden darf, womit der eingangs dieses Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen ist. Wir führen den Schluß hier nicht noch einmal durch, um so mehr als im folgenden Paragraphen sich an entsprechender Stelle Schlüsse derselben Art wiederholen, wenn man dort $b = 1$ setzt. (Siehe § 3, 3., A. und B.).

Die Herleitung des Satzes von Artin aus der freien Gruppe von zwei Erzeugenden vollzieht sich jetzt wörtlich so wie in der oben zitierten Arbeit[11]).

§ 3.

Die Gruppe aus drei Erzeugenden und der verschärfte Artinsche Satz.

1. Wir beweisen folgenden Satz:

In einer Quasigruppe Q^{**} erzeugen drei Elemente a, b, c, die der Relation $(a\,b)\,c = a\,(b\,c)$ genügen, eine Gruppe.

Beim Beweis werden wir von dem in § 2 bewiesenen Satz Gebrauch machen. Es ist zu zeigen, daß unter den genannten Voraussetzungen jedes Potenzprodukt in a, b, c mit ganzen Exponenten beliebig beklammert, also ohne Klammern geschrieben werden darf. Wie in § 2 geschieht dies mit Hilfe vollständiger Induktion nach der Anzahl der zusammengefügten Faktoren $a^{l_i}, b^{m_i}, c^{k_i}$ (l_i, m_i, k_i ganz).

2. Man beweist zunächst, daß die drei Faktoren a^l, b^m, c^k (l, m, k ganze Zahlen) sich assoziativ multiplizieren. Wegen § 1, 5. genügt es, dies für irgendeine Reihenfolge der Faktoren nachzuweisen und wegen § 1, 6. genügt es, sich auf den Fall positiver Exponenten zu beschränken. Sei bis zu einem festen $l > 0$ bewiesen

$$(a^l\,b)\,c = a^l\,(b\,c).$$

Dies ist nach Voraussetzung für $l = 1$ erfüllt.

Dann folgt

$$a^{l+1}\,(b\,c) = a\,\{a^l\,(b\,c)\} = a\,\{(a^l\,b)\,c\}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(a^l\,b)\,(c\,a) &= \{a\,(a^{l-1}\,b)\}\,\{c\,a\} = a\,\{(a^{l-1}\,b)\,c\}\,a^{12)} = a\,\{a^{l-1}\,(b\,c)\}\,a \\ &= a^l\,(b\,c)\,a = \{a^l\,(b\,c)\}\,a = \{(a^l\,b)\,c\}\,a.\end{aligned}$$

Nach § 1, 5. ist also auch

$$a\,\{(a^l\,b)\,c\} = \{a\,(a^l\,b)\}\,c$$

---

[10]) Siehe M_2, S. 298 ff.

[11]) Siehe Anm. [4]).

[12]) Hier benutzen wir zum ersten Mal die Identität (5) von S. 420.

und damit

$$a^{l+1}(bc) = a\{(a^l b)c\} = (a^{l+1}b)c.$$

Durch Wiederholung der soeben angewandten Schlußweise ergibt sich, daß auch b in eine beliebige positive Potenz erhoben werden darf, und in gleicher Weise folgt, daß dies auch mit c der Fall ist. Damit ist man fertig.

3. Sei bewiesen, daß jedes Produkt aus höchstens $3n$ abwechselnd aufeinander folgenden Faktoren $a^{l_i}, b^{m_i}, c^{k_i}$ (l_i, m_i, k_i ganz) ohne Klammern geschrieben werden darf, gleichgültig, mit welchem der Faktoren a, b, c das Produkt beginnt. Dies ist nach 2. für $n = 1$ richtig. Wir setzen

$$P_{3n} \equiv c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} c^{k_2} a^{l_2} b^{m_2} \ldots c^{k_n} a^{l_n} b^{m_n}$$

und fügen rechts zu P_{3n} einen weiteren Faktor $c^{k_{n+1}}$ hinzu, darauf einen Faktor $a^{l_{n+1}}$, darauf einen Faktor $b^{m_{n+1}}$ und zeigen, daß bei jeder dieser Erweiterungen das erhaltene Produkt auch wieder ohne Klammern geschrieben werden darf.

A. Wir setzen

$$P_{3n+1} \equiv P_{3n} \,.\, c^{k_{n+1}}.$$

α) Sei bewiesen bis zu festem s

$$P_{3n+1} = (c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots c^{k_s} a^{l_s} b^{m_s})(c^{k_{s+1}} a^{l_{s+1}} b^{m_{s+1}} \ldots b^{m_n} c^{k_{n+1}}).$$

Dies ist für $s = n$ richtig. Dann gilt

$$P_{3n+1} = (c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots c^{k_s} a^{l_s})(b^{m_s} c^{k_{s+1}} \ldots b^{m_n} c^{k_{n+1}}).$$

In der Tat, setzt man

$$\begin{aligned} c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots c^{k_s} a^{l_s} &= u \\ c^{k_{n+1}} &= v \\ b^{m_s} c^{k_{s+1}} a^{l_{s+1}} \ldots b^{m_n} &= w, \end{aligned}$$

so folgt die Behauptung $(uw)v = u(wv)$ vermöge § 2 und § 1, 5. sofort aus $(vu)w = v(uw)$:

$$\begin{aligned} (vu)w &= c^{k_{n+1}+k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots c^{k_s} a^{l_s} b^{m_s} c^{k_{s+1}} \ldots b^{m_n} \equiv P^*_{3n} \\ v(uw) &= c^{k_{n+1}} \{c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots a^{l_s} b^{m_s} c^{k_{s+1}} \ldots b^{m_n}\} = P^*_{3n}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen generell mit P_λ, P^*_λ, P^{**}_λ Produkte aus λ abwechselnd aufeinander folgenden Faktoren c^{k_i}, a^{l_i}, b^{m_i}.

β) Es gilt weiter

$$P_{3n+1} = (c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots c^{k_s})(a^{l_s} b^{m_s} c^{k_{s+1}} \ldots b^{m_n} c^{k_{n+1}}) = (u a^{-l_s})(a^{l_s} w v).$$

Setzt man $u a^{-l_s} = \overline{u}$, $a^{l_s} w = \overline{w}$, also $\overline{u}\,\overline{w} = uw$, so folgt die Behauptung

$$\overline{u}(\overline{w}v) = (\overline{u}\,\overline{w})v$$

wie bei α) aus der Tatsache, daß $(v\overline{u})\overline{w} = P^*_{3n} = v(\overline{u}\,\overline{w})$ ist.

γ) Es gilt weiter

$$P_{3n+1} = (c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots b^{m_s - 1})(c^{k_s} a^{l_s} b^{m_s} \ldots b^{m_n} c^{k_n+1})$$
$$= (\bar{u}\, c^{-k_s})(c^{k_s} \bar{w}\, v).$$

Mit $\bar{u}\, c^{-k_s} = \bar{\bar{u}}$, $c^{k_s} \bar{w} = \bar{\bar{w}}$, folgt die Behauptung $\bar{\bar{u}}(\bar{\bar{w}} v) = (\bar{\bar{u}}\, \bar{\bar{w}}) v$, wie oben aus $v(\bar{\bar{u}}\, \bar{\bar{w}}) = P^*_{3n} = (v\, \bar{\bar{u}}) \bar{\bar{w}}$.

Damit ist bewiesen, daß in $P_{3n+1} \equiv P_{3n} . c^{k_n+1}$ die Klammern weggelassen werden dürfen.

B. Wir setzen

$$P_{3n+2} \equiv P_{3n+1} . a^{l_n+1}.$$

α) Sei bis zu festem s bewiesen

$$P_{3n+2} = (c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots c^{k_s} a^{l_s} b^{m_s} c^{k_s+1})(a^{l_s+1} b^{m_s+1} \ldots b^{m_n} c^{k_n+1} a^{l_n+1}).$$

Dies ist für $s = n$ richtig. Dann gilt

$$P_{3n+2} = (c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots c^{k_s} a^{l_s} b^{m_s})(c^{k_s+1} a^{l_s+1} b^{m_s+1} \ldots b^{m_n} c^{k_n+1} a^{l_n+1}).$$

Beweis: Man setze

$$\begin{aligned} c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots c^{k_s} a^{l_s} b^{m_s} &= u \\ c^{k_s+1} &= v \\ a^{l_s+1} b^{m_s+1} \ldots b^{m_n} c^{k_n+1} a^{l_n+1} &= w \\ c^{k_1} &= x \\ a^{l_1} b^{m_1} \ldots a^{l_s} b^{m_s} &= y, \text{ also } x\, y = u, \end{aligned}$$

so ist $(y\, x) w$ ein Produkt von $3n+1$ abwechselnd aufeinander folgenden Faktoren $a^{l_i}, b^{m_i}, c^{k_i}$ also wegen A. insbesondere gleich $y(x w)$. Daraus folgt $x(y\, w) = (x\, y) w$, und, wenn man darin $x = c^{k_1}$ durch $c^{k_s+1+k_1} = v\, x$ ersetzt,

$$(v\, u) w = (v\, x\, y) w = (v\, x)(y\, w) = v\{x(y\, w)\} = v\{(x\, y) w\} = v(u\, w).$$

Also gilt auch $(u v) w = u(v w)$, wie behauptet.

β) Es folgt weiter

$$P_{3n+2} = (c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \ldots c^{k_s} a^{l_s})(b^{m_s} c^{k_s+1} a^{l_s+1} \ldots b^{m_n} c^{k_n+1} a^{l_n+1})$$
$$= (u\, b^{-m_s})(b^{m_s} v\, w).$$

Beweis: Man setze mit u, v, w aus α)

$$u\, b^{-m_s} = \bar{u},\ b^{m_s} v\, w\, a^{-l_n+1} = \bar{v},\ a^{l_n+1} = t;$$
$$\bar{u}\, a^{-l_s} = y,\ a^{l_s} = x,\ a^{l_n+1} b^{m_s} \ldots b^{m_n} = t\, \bar{v}\, c^{-k_n+1} = z.$$

Dann ist $z(y x) = (z\, y) x$ [$z(y\, x)$ ist ein Produkt vom Typus P_{3n+1}], also auch $y(x z) = (y\, x) z = \bar{u}\, z$. Ersetzt man darin c^{k_1} durch $c^{k_n+1+k_1}$, also $\bar{u}$ durch $c^{k_n+1}\, \bar{u}$, und y durch $c^{k_n+1} y$, so hat man

$$(c^{k_n+1} \bar{u}) z = (c^{k_n+1} y)(x z) = P^{**}_{3n} = c^{k_n+1}\{y(x z)\}$$
$$= c^{k_n+1}\{(y\, x) z\} = c^{k_n+1}(\bar{u}\, z).$$

Also ist auch $\overline{u}\,(z\,c^{k_n+1}) = (\overline{u}\,z)\,c^{k_n+1}$. Jetzt folgt

$$(\overline{u}\,t)\,\overline{v} = P^*_{3n+1} = \{y\,(x\,z)\}\,c^{k_n+1} = \{(y\,x)\,z\}\,c^{k_n+1} = (\overline{u}\,z)\,c^{k_n+1}$$
$$= \overline{u}\,(z\,c^{k_n+1}) = \overline{u}\,(t\,\overline{v}),$$

woraus die Behauptung $(\overline{u}\,\overline{v})\,t = \overline{u}\,(\overline{v}\,t)$ folgt.

γ) Es folgt weiter

$$P_{3n+2} = (c^{k_1}\,a^{l_1}\,b^{m_1}\ldots c^{k_s})\,(a^{l_s}\,b^{m_s}\,c^{k_s+1}\ldots b^{m_n}\,c^{k_n+1}\,a^{l_n+1})$$
$$= (\overline{u}\,a^{-l_s})\,(a^{l_s}\,\overline{v}\,t).$$

Mit $\overline{u}\,a^{-l_s} = y$, $a^{l_s}\,\overline{v} = \overline{\overline{v}}$ folgt; wenn man in der eben bewiesenen Formel $\overline{u}\,(t\,\overline{v}) = (\overline{u}\,t)\,\overline{v}$ statt a^{l_s} a^{l_n+1} einträgt und umgekehrt (also x mit t vertauscht):

$$(y\,t)\,(x\,\overline{v}) = (y\,t)\,\overline{\overline{v}} = (y\,t\,x)\,\overline{v} = P^*_{3n+1} = y\,(t\,\overline{\overline{v}}),$$

also

$$(y\,\overline{\overline{v}})\,t = y\,(\overline{\overline{v}}\,t) \qquad \text{q. e. d.}$$

Mithin dürfen auch in einem Produkt P_{3n+2}, in dem $3n+2$ Faktoren des Typus $a^{l_i}, b^{m_i}, c^{k_i}$ abwechselnd aufeinander folgen, die Klammern unterdrückt werden.

C. Wir setzen endlich

$$P_{3n+3} \equiv P_{3n+2} \cdot b^{m_n+1}.$$

Der Nachweis, daß man auch in P_{2n+3} die Faktoren beliebig zusammenfassen darf, gelingt jetzt nicht mehr wie in den vorigen Fällen allein unter Benutzung des Satzes § 1, 5. Wir brauchen eine Hilfsformel, die sich in einer Quasigruppe Q^{**} leicht mit Hilfe des Satzes von § 2 und von § 3, 2. ergibt.

α_0) Gilt für drei Elemente u, v, w einer Quasigruppe Q^{**} $(u\,v)\,w = u\,(v\,w)$, so gilt auch für ganze n, m

$$(u\,v^n)\,(v^m\,w) = u\,v^{n+m}\,w \tag{16}$$

(wegen § 3, 2., darf das Produkt $u^k\,v^l\,w^i$ mit ganzen Exponenten ohne Klammern geschrieben werden). In der Tat ist

$$(u\,v^n)\,(v^m\,w) = [\{w\,(w^{-1}\,u)\}\,v^n]\,[v^m\,w] = [w\,\{w^{-1}\,u\,v^n\}]\,[v^m\,w]$$
$$= w\,[(w^{-1}\,u\,v^n)\,v^m]\,w = w\,[w^{-1}\,u\,v^{n+m}]\,w = u\,v^{n+m}\,w.$$

Dabei ist die Voraussetzung $(u\,v)\,w = u\,(v\,w)$ wesentlich, denn würde für irgend drei Elemente α, β, γ von Q^{**} z. B.

$$(\alpha\,\beta)\,(\beta\,\gamma) = \alpha\,(\beta^2\,\gamma) \text{ oder } = (\alpha\,\beta^2)\,\gamma$$

gelten, so wäre damit offensichtlich das allgemeine assoziative Gesetz erfüllt (man setze etwa $\beta\,\gamma = \delta$ bzw. $\alpha\,\beta = \delta$).

α) Sei bis zu festem s bewiesen

$$P_{3n+3} = (c^{k_1}\,a^{l_1}\,b^{m_1}\ldots a^{l_s+1})\,(b^{m_s+1}\,c^{k_s+2}\,a^{l_s+2}\ldots b^{m_n}\,c^{k_n+1}\,a^{l_n+1}\,b^{m_n+1}).$$

Dies ist für $s = n$ richtig. Dann gilt

$$P_{3n+3} = (c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \dots c^{k_s+1})(a^{l_s+1} b^{m_s+1} c^{k_s+2} \dots b^{m_n} c^{k_n+1} a^{l_n+1} b^{m_n+1}).$$

Beweis: Man setze

$$c^{k_1} a^{l_1} \dots a^{l_s} = x,$$

$$b^{m_s} c^{k_s+1} a^{l_s+1} = y, \qquad b^{-m_s} y = \overline{y}, \quad y a^{-l_s+1} = \overline{\overline{y}},$$

$$b^{m_s+1} c^{k_s+2} \dots b^{m_n+1} = z, \quad z b^{-m_n+1} = \overline{z}, \qquad a^{l_s+1} z = \overline{\overline{z}}.$$

Dann ist wegen $(\overline{z} b)\overline{y} = \overline{z}(b\overline{y})$ (dies sind Produkte aus weniger als $3n+3$ abwechselnd aufeinander folgenden Faktoren!) nach C. α_0) für $\overline{z}, b, \overline{y}$ an Stelle von u, v, w

$$(\overline{z} b^{m_n+1})(b^{m_s}\overline{y}) = zy = \overline{z} b^{m_n+1+m_s}\overline{y},$$

und da $x(zy)$ als Produkt vom Typus P_{3n+2} nach B. ohne Klammern geschrieben werden darf:

$$x(zy) = x\overline{z} b^{m_n+1+m_s}\overline{y}.$$

Andererseits ist wegen B.:

$$(x\overline{z})(b\overline{y}) = \{(x\overline{z})b\}\overline{y},$$

also nach C. α_0) für $x\overline{z}$, b, $\overline{y}$ an Stelle von u, v, w

$$(x\overline{z} b^{m_n+1})(b^{m_s}\overline{y}) = (xz)y = x\overline{z} b^{m_n+1+m_s}\overline{y} = x(zy).$$

Daraus folgt

$$(xy)z = x(yz),$$

d. h.

$$P_{3n+3} = x(yz).$$

Man hat also zu zeigen, daß

$$x(yz) = x(\overline{\overline{y}}\,\overline{\overline{z}}) = (x\overline{\overline{y}})\overline{\overline{z}}$$

ist. Dies folgt so: Es ist unter Benutzung C. α_0) für $\overline{\overline{z}} b^{-m_n+1}, b, c^{k_s+1}$ an Stelle von u, v, w

$$\overline{\overline{z}}\,\overline{\overline{y}} = a^{l_s+1}\overline{z} b^{m_n+1+m_s} c^{k_s+1}$$

und nach demselben Satz mit $xa^{-l_s}, a, \overline{z} b^{m_n+1+m_s} c^{k_s+1}$ für u, v, w

$$x(\overline{\overline{z}}\,\overline{\overline{y}}) = c^{k_1} a^{l_1} \dots a^{l_s+l_s+1}\overline{z} b^{m_n+1+m_s} c^{k_s+1}$$

(dies ist ein Produkt aus nur $3n+1$ Faktoren!)

Andererseits ist auf Grund von C. α_0) mit xa^{-l_s}, a, z für u, v, w

$$x\overline{\overline{z}} = c^{k_1} a^{l_1} \dots a^{l_s+l_s+1} z,$$

und endlich unter Anwendung desselben Satzes mit $(x\overline{\overline{z}}) b^{-m_n+1}, b, c^{k_s+1}$ für u, v, w

$$(x\overline{\overline{z}})\overline{\overline{y}} = c^{k_1} a^{l_1} \dots a^{l_s+l_s+1}\overline{z} b^{m_n+1+m_s} c^{k_s+1} = x(\overline{\overline{z}}\,\overline{\overline{y}}).$$

Damit ist auch die Behauptung $x(\overline{\overline{y}}\,\overline{\overline{z}}) = (x\overline{\overline{y}})\overline{\overline{z}}$ bewiesen.

β) Nun ist zu zeigen:

$$P_{3n+3} = (c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \dots b^{m_s})(c^{k_s+1} a^{l_s+1} b^{m_s+1} c^{k_s+2} \dots b^{m_n} c^{k_n+1} a^{l_n+1} b^{m_n+1}).$$

Setzt man

$$x b^{m_s} = \overline{x},$$

so hat man in der Bezeichnung von α) mit Rücksicht auf die Induktionsvoraussetzung zu zeigen:

$$\overline{x}(\overline{y} z) = (\overline{x}\,\overline{y}) z.$$

Setzt man für den Augenblick

$$c^{k_s+2} a^{l_s+2} \dots b^{m_n+1} = z', \text{ also } b^{m_s+1} z' = z,$$

so ist $(x b) z' = x (b z')$ (Produkt aus $3n$ abwechselnd aufeinander folgenden Faktoren!) Mithin liefert C. α_0) für x, b, z' an Stelle von u, v, w

$$(x b^{m_s})(b^{m_s+1} z') = \overline{x} z = x b^{m_s + m_s + 1} z',$$

also

$$(\overline{x} z)\overline{y} = x b^{m_s + m_s + 1} z' \overline{y}.$$

Dies ist ein Produkt aus $3n+2$ abwechselnd aufeinander folgenden Faktoren, also wegen B. frei von Klammern.

Andererseits ist

$$(x b)(z' \overline{y}) = x \{b (z' \overline{y})\}$$

wegen B., mithin nach C. α_0) für $x, b, z'\overline{y}$ an Stelle von u, v, w

$$(x b^{m_s})(b^{m_s+1} z' \overline{y}) = \overline{x}(z \overline{y}) = x b^{m_s + m_s + 1} z' \overline{y} = (\overline{x} z)\overline{y}.$$

Daraus folgt dann die Behauptung $\overline{x}(\overline{y} z) = (\overline{x}\,\overline{y}) z$.

γ) Man beweist endlich

$$P_{3n+3} = (c^{k_1} a^{l_1} b^{m_1} \dots a^{l_s})(b^{m_s} c^{k_s+1} a^{l_s+1} \dots b^{m_n+1}).$$

Es genügt mit Rücksicht auf die Induktionsvoraussetzung in α) mit den unter α) angegebenen Abkürzungen, zu zeigen, daß

$$x(y z) = (x y) z$$

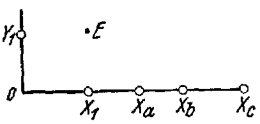
ist. Unter α) wurde bereits bewiesen, daß diese Beziehung gilt. Damit ist man fertig: Aus der Annahme, daß in einem Produkt aus $3n$ abwechselnd aufeinander folgenden Faktoren $c^{k_i}, a^{l_i}, b^{m_i}$ die Klammern weggelassen werden dürfen, folgt mit Hilfe der Axiome der Quasigruppe Q^{**}, daß dies auch für ein Produkt aus $3(n+1)$ solchen Faktoren der Fall ist. Also ist in jedem Potenzprodukt in a, b, c die Klammersetzung beliebig, mit anderen Worten, a, b, c sind die Erzeugenden einer Gruppe.

4. Das bis hierher bewiesene Resultat, daß in einer Quasigruppe Q^{**} — also erst recht in einem Alternativkörper — drei der Bedingung $(a b) c = a (b c)$ genügende Elemente a, b, c eine Gruppe erzeugen, gestattet ohne Hinzunahme neuer Schlüsse die Erweiterung, daß a, b, c einen Schiefkörper erzeugen, wenn innerhalb des Alternativkörpers die Elemente der aus a, b, c erzeugten Gruppe auch additiv verknüpft werden. Der Beweis verläuft wörtlich so wie der entsprechende Beweis für den aus zwei

Elementen a, b erzeugten Schiefkörper [13]). Es erübrigt sich, diesen Beweis hier zu wiederholen.

Damit sind wir am Ende des Beweises für den verschärften Artinschen Satz.

5. Zum Schluß sei noch auf die geometrische Bedeutung des verschärften Artinschen Satzes hingewiesen. Die geometrische Bedeutung des Satzes, daß in einem Alternativkörper irgend zwei Elemente a, b einen Schiefkörper $R^*(a, b)$ erzeugen, haben wir bereits früher [14]) ausgesprochen: Sie besagt, daß die Desarguesschen Sätze in einem aus fünf Grundpunkten durch projektive Verknüpfung erhaltenen Netz alle eine Folge des Satzes vom vollständigen Vierseit sind. Adjungiert man die Pascalsche Konfiguration [15]) $ab = ba$, so geht der nach der Methode der Hilbertschen Streckenrechnung mit Hilfe des Vierseitssatzes erzeugte Schiefkörper $R^*(a, b)$ in einen Körper über, so daß alle Schnittpunktsätze des genannten zehnparametrigen Netzes aus dem Vierseitssatz und der Pascalschen Konfiguration $ab = ba$ beweisbar sind [16]). Algebraisiert man in derselben Weise mit Hilfe des Vierseitssatzes die Punkte und Geraden des projektiven elfparametrigen Netzes aus den Grundpunkten 0, Y_1, E, X_1, X_a, X_b, X_c, so erhält man, falls für diese Grundpunkte die Konfiguration Δ besteht



$$X_a(X_b X_c) = (X_a X_b) X_c$$

(die Multiplikation hier im Sinne der Hilbertschen Streckenrechnung aufgefaßt) [17]), als Koordinatenbereich auf Grund des verschärften Artinschen Satzes den Schiefkörper $R^*(a, b, c)$, denn der Vierseitssatz liefert allgemein die Axiome eines Alternativkörpers [18]). Nach Einführung eines

---

[13]) Siehe Anm. [4]). — Wir bemerken hier, daß der in § 3 über die Quasigruppe Q^{**} bewiesene Satz folgende Verallgemeinerung gestattet: Sei ϱ ein Element, daß mit allen Elementen einer Quasigruppe Q^{**} invertierbar und assoziierbar ist. Dann läßt sich mit Hilfe ähnlicher Überlegungen wie in § 3 zeigen, daß drei Elemente a, b, c von Q^{**}, die der Relation $a(bc) = \varrho(ab)c$ genügen, ein Teilsystem erzeugen mit der Eigenschaft, daß zwei Potenzprodukte in a, b, c, die aus gleich vielen bzw. gleichen Faktoren komponiert sind, aber nach Maßgabe des nicht assoziativen Aufbaus eines Produktes innerhalb Q^{**} verschieden beklammert sind, sich nur um eine Potenz von ϱ unterscheiden. Für $\varrho = 1$ gibt dies den in § 3 bewiesenen Satz. Für $\varrho = -1$ gewinnt man die Formel (3) von S. 220 in M_1, falls noch vorausgesetzt wird, daß die Relationen $ac = -ba$, $ac = -ca$, $bc = -cb$ bestehen. In einem Alternativkörper sind ± 1 die einzig möglichen Werte für ϱ.

[14]) Siehe M_2, S. 296 ff.

[15]) D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie (7. Aufl.), S. 110.

[16]) R. Moufang: Ein Satz über die Schnittpunktsätze des allgemeinen Fünfecksnetzes (Math. Annalen 107 (1932), S. 124 ff.).

[17]) D. Hilbert, l. c., S. 93.

[18]) Siehe M_1, S. 207 ff. und Anm. [20]).

ebenen Koordinatensystems wird die Gleichung der Geraden eine lineare Beziehung[19]). Damit hat man das Resultat, daß in dem genannten elfparametrigen Netz, in dem die Konfiguration Δ erfüllt ist, alle Desarguesschen Sätze (diese enthalten 11 Parameter) aus dem Vierseitssatz D_9 folgen. Statt die Existenz der Konfiguration Δ zu fordern, kann man auch die Existenz einer geeigneten Desarguesschen Konfiguration fordern, denn früher[20]) wurde gezeigt, daß das Bestehen der Konfiguration Δ eine Folge des als allgemein gültig vorausgesetzten Vierseitssatzes D_9 ist, sofern eine gewisse Desarguessche Konfiguration D_{11} existiert, die leicht aus den Grundpunkten des Netzes zu gewinnen ist. Umgekehrt kann man von der Konfiguration D_{11} ausgehen und rückwärts die Grundpunkte des Netzes bestimmen. Damit hat man das Resultat:

Alle Desarguesschen Sätze D_{11} eines elfparametrigen Netzes folgen aus der Existenz einer bestimmten Konfiguration D_{11} in diesem Netz und der allgemeinen Gültigkeit des Vierseitssatzes D_9.

Der Schiefkörper $R^*(a, b, c)$ geht durch Adjunktion der drei Relationen

$$ab = ba, \quad ac = ca, \quad bc = cb$$

in einen Körper über. Diese Relationen bedeuten geometrisch im Sinne der Streckenrechnung drei Pascalsche Konfigurationen. Adjungiert man zu dem Netz aus den Grundpunkten $0, Y_1, \ldots X_c$ diese drei Konfigurationen, so ist auf Grund des Vierseitssatzes die durch die Konfiguration Δ gegebene Beziehung automatisch mit erfüllt, so daß sich in diesem Falle ihre Adjunktion erübrigt, denn es gilt der Satz, daß, wenn in einem Alternativkörper drei Elemente zu je zweien vertauschbar sind, diese Elemente sich assoziativ multiplizieren, sofern die Charakteristik des Alternativkörpers von zwei und drei verschieden ist[21]).

Also geometrisch: *Erfüllen die Grundpunkte $0, Y_1 \ldots, X_c$ eines elfparametrigen Netzes die drei Pascalschen Konfigurationen*

$$X_a X_b = X_b X_a$$
$$X_c X_a = X_a X_c$$
$$X_c X_b = X_b X_c,$$

so folgen alle Schnittpunktsätze in diesem Netz allein aus dem Satz vom vollständigen Vierseit.

---

[19]) Siehe M_1, S. 208.

[20]) R. Moufang: Die Schnittpunktsätze des projektiven speziellen Fünfecksnetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander. (Das A-Netz) (Math. Annalen **106** (1932), S. 768 ff.). Die Punkte X_b, X_p, X_r, X_Q in der dortigen Fig. 25 entsprechen den Punkten X_b, $X_a X_b$, $X_b X_c$, $X_a X_b X_c$ in der jetzt gewählten Bezeichnungsweise.

[21]) Siehe Z., S. 126.

(Eingegangen am 6. 2. 1934).