Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen.

Von

W. Wirtinger in Wien.

Die folgenden Untersuchungen betreffen die allgemeine Theorie der Funktionen von n komplexen Veränderlichen, ausgehend von den partiellen Differentialgleichungen, und ihre Definition durch solche auf Mannigfaltigkeiten von $n+1$ bis $2n$ Dimensionen. Es ist dabei in erster Linie die formale Theorie ins Auge gefaßt, und die feineren Fragen, welche mit der Theorie der Funktionen reeller Veränderlicher zusammenhängen, werden zurückgestellt. Den Schluß bilden anschließende Erörterungen über die formalen Ansätze von Variationsproblemen.

I.

Es seien $t_\alpha\,(\alpha=1\ldots m)$ m reelle Veränderliche, ferner $x_\beta\,(\beta=1\ldots 2n)$ $2n$ reelle Funktionen dieser, die wir auf alle Fälle zweimal stetig differenzierbar voraussetzen; so kann man aus diesen die $2n$ komplexen Funktionen der t_α bilden

$$(1)\qquad z_\gamma = x_{2\gamma-1} + i\,x_{2\gamma}, \qquad \bar{z}_\gamma = x_{2\gamma-1} - i\,x_{2\gamma} \qquad (\gamma = 1 \ldots n).$$

Deutet man nun die x_β als kartesische Koordinaten in einem Raum R_{2n} von $2n$ Dimensionen, so ist dadurch, daß sie als Funktionen der t_α aufgefaßt werden, im R_{2n} eine Mannigfaltigkeit M_m von m Dimensionen gegeben.

Wir betrachten ferner reelle oder komplexe zweimal stetige differenzierbare Funktionen Φ der reellen Variablen x_β. Wir können diese auch formal als Funktionen der z_γ, $\bar{z}_\gamma$ auffassen und insbesondere entsprechend den Gleichungen (1) die Differentialquotienten nach z_γ, $\bar{z}_\gamma$ erklären durch die Formeln

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial z_\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2\gamma-1}} - i\,\frac{\partial}{\partial x_{2\gamma}}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2\gamma-1}} + i\,\frac{\partial}{\partial x_{2\gamma}}\right)$$

und ebenso

$$(3)\qquad \frac{\partial^2}{\partial z_\gamma \partial \bar z_{\gamma'}} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{2\gamma-1}\partial x_{2\gamma'-1}} + \frac{\partial^2}{\partial x_{2\gamma}\partial x_{2\gamma'}}\right) - i\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{2\gamma}\partial x_{2\gamma'-1}} - \frac{\partial^2}{\partial x_{2\gamma'}\partial x_{2\gamma-1}}\right)\right].$$

Soll dann Φ eine analytische Funktion der z_γ sein, so bestehen die $2n$ Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$(4)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar z_\gamma} = 0, \quad \frac{\partial \bar\Phi}{\partial z_\gamma} = 0,$$

wo $\bar\Phi$ die zu Φ konjugierte Größe bezeichnet.

Der reelle und imaginäre Teil von Φ, also $2U = \Phi + \bar\Phi$, $2iV = \Phi - \bar\Phi$ sowie überhaupt jede lineare Verbindung $a\Phi + b\bar\Phi = W$ mit konstantem a und b genügen dann den n^2 Gleichungen

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z_\gamma \partial \bar z_{\gamma'}} = 0.$$

Wenn eine Funktion W den Gleichungen (5) genügt, so genügen die Funktionen $\Phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial z_\alpha}$ und $\bar\Phi_\alpha = \frac{\partial \bar W}{\partial \bar z_\alpha}$ den Gleichungen (4), und die Φ_α sind daher dann analytische Funktionen der z_α. Ebenso sind $\Psi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial \bar z_\alpha}$ analytische Funktionen der $\bar z_\alpha$.

Das ist die Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß für $n = 1$ ein Integral der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ eine analytische Funktion bestimmt durch die Formel

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

wobei u reell oder komplex sein kann.

Da aber auch ersichtlich $\Phi_\alpha dz_\alpha$ ebenso wie $\Psi_\alpha d\bar z_\alpha$ vollständige Differentiale sind, so sind durch eine Lösung W der Gleichungen (5) je eine analytische Funktion der z_α und der $\bar z_\alpha$ bestimmt und W selbst als Summe dieser beiden darstellbar durch die Formel

$$W = \int \frac{\partial W}{\partial z_\alpha} dz_\alpha + \int \frac{dW}{\partial \bar z_\alpha} d\bar z_\alpha,$$

wobei der erste Bestandteil nur von den z_α, der zweite nur von den $\bar z_\alpha$ abhängt und beide bis auf eine Konstante bestimmt sind.

II.

Man verdankt Herrn T. Levi-Civita[1]) den Satz, daß auf einer M_n im R_{2n} der Veränderlichen x_β eine analytische Funktion F insofern willkür-

[1]) Rendiconti della Reale Academia dei Lincei, Roma **14** (1905, 2° sem.), p. 492 ff.

lich gegeben werden kann, als man sich auf eine genügend kleine Umgebung beschränkt und sowohl die Koordinaten der M_n als auch die auf ihr vorgeschriebenen Werte von F als reguläre analytische Funktionen von n reellen Parametern gegeben werden. Ausgenommen sind dabei die von ihm als „charakteristisch" bezeichneten Mannigfaltigkeiten, welche im Falle von zwei Veränderlichen mit denjenigen zusammenfallen, welche durch Nullsetzen einer analytischen Funktion von z_1, z_2 definiert werden können, im allgemeinen Fall aber durch das Verschwinden einer sogleich anzugebenden Determinante gekennzeichnet werden. In der Tat, man kann die Gleichungen der M_n in der Form voraussetzen

$$G_\mu(z_\alpha, \bar{z}_\beta) = 0, \qquad (\mu = 1 \dots n) \tag{6}$$

wobei diese Gleichungen, da sie reell sein sollen, bei der Vertauschung der $z_\alpha \bar{z}_\beta$ mit ihren konjugierten ungeändert bleiben und nach n dieser Veränderlichen aufgelöst werden können.

Werden nun die $2n$ neuen reellen Veränderlichen

$$\varrho_\mu = g_\mu(z_\alpha, \bar{z}_\beta), \quad \sigma_\lambda = h_\lambda(z_\alpha, \bar{z}_\beta) \tag{7}$$

eingeführt, so geht das System der Differentialgleichungen (4) über in

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho_\mu}\frac{\partial g_\mu}{\partial \bar{z}_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_\lambda}\frac{\partial h_\lambda}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0. \tag{8}$$

Aus diesem können die $\dfrac{\partial F}{\partial \varrho_\mu}$ berechnet werden, wenn die Determinante $\left|\dfrac{\partial g_\mu}{\partial \bar{z}_\alpha}\right|$ auf der M_n und daher überhaupt von Null verschieden ist. Die Methode der Majoranten liefert dann ohne weiteres den behaupteten Satz.

Ist aber die genannte Determinante gleich Null auf der M_n und sei diese in einer geeigneten Parameterdarstellung

$$z_\alpha = z_\alpha(t_\lambda), \quad \bar{z}_\beta = \bar{z}_\beta(t_\lambda) \qquad (\lambda = 1 \dots n) \tag{9}$$

gegeben, so ist jetzt

$$\frac{\partial g_\mu}{\partial z_\alpha}\cdot\frac{\partial z_\alpha}{\partial t_\lambda} + \frac{\partial g_\mu}{\partial \bar{z}_\beta}\frac{\partial \bar{z}_\beta}{\partial t_\lambda} = 0. \tag{10}$$

Also sind die Matrizes

$$\left\|\frac{\partial g_\mu}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial g_\mu}{\partial \bar{z}_\beta}\right\| \quad \text{und} \quad \left\|\frac{\partial z_\alpha}{\partial t_\lambda}, \frac{\partial \bar{z}_\beta}{\partial t_\lambda}\right\| \tag{11}$$

korrespondierende Matrizes und entsprechende Determinanten proportional. Es ist also gleichzeitig mit $\left|\dfrac{\partial g_\mu}{\partial \bar{z}_\alpha}\right| = 0$ auch $\left|\dfrac{\partial z_\beta}{\partial t_\lambda}\right| = 0$, da nach Voraussetzung nic htsämtliche Determinanten der ersten Matrix verschwinden und ebenso nicht alle der zweiten. Das Verschwinden der letzten Determinante aber besagt, daß zwischen den z_α wenigstens eine Relation $\Phi(z_1 \ldots z_n) = 0$ besteht, die man durch Elimination der t_λ aus den ersten der Gleichungen (9) erhält.

Daß auch das umgekehrte richtig ist, erhellt sofort daraus, daß, wenn eine analytische Funktion F der z_α auf der M_n verschwindet, in der Nähe einer nicht singulären Stelle der M_n eine analytische, eindeutig umkehrbare Parameterdarstellung der z_α, $\bar{z}_\beta$ durch geeigneter reelle Veränderliche t_λ möglich ist, für welche dann aus

$$\frac{\partial F}{\partial z_\alpha} \frac{\partial z_\alpha}{\partial t_\lambda} = 0$$

sofort die Behauptung folgt.

Damit ist die Bedeutung des Verschwindens der Determinante klargestellt. Sie bedeutet einfach, daß durch die M_n eine M_{2n-2} hindurchgelegt werden kann, auf welcher eine analytische Funktion der z_α verschwindet.

III.

Wir suchen nun die Differentialgleichungen, welche für eine in Parameterdarstellung gegebene Mannigfaltigkeit M_{2n-1} im R_{2n} bestehen müssen, damit auf dieser der reelle Teil einer analytischen Funktion konstant bleibt.

Sei U dieser reelle Teil, so hat man die Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \cdot \frac{\partial z_\alpha}{\partial t_\lambda} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial \bar{z}_\alpha}{\partial t_\lambda} = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots n,\ \lambda = 1 \ldots 2n-1), \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} = 0. \tag{13}$$

Durch Auflösung ergibt sich aus (12)

$$\frac{\partial U}{\partial z_\alpha} = \varrho\, \Delta_\alpha, \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_\beta} = \varrho\, \bar{\Delta}_\beta. \tag{14}$$

Dabei bedeuten Δ_α, Δ_β die aus der Matrix

$$\left| \frac{\partial z_\gamma}{\partial t_\lambda}, \frac{\partial \bar{z}_\delta}{\partial t_\lambda} \right|$$

durch Streichung der Vertikalreihe mit $\gamma = \alpha$ resp. $\delta = \beta$ hervorgehenden Determinanten und ϱ einen Proportionalitätsfaktor.

Nun ist aber wegen (13) und nach den Bemerkungen am Schluß von I

$$U = \Phi(z_\alpha) + \Psi(\bar{z}_\alpha), \tag{15}$$

somit

$$d\Phi = \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} dz_\alpha = \varrho\, \Delta_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial t_\lambda} dt_\lambda \tag{16}$$

ein vollständiges Differential und ebenso

$$(17)\qquad d\Psi = \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_\alpha} d\bar{z}_\alpha = \varrho \bar{\varDelta}_\alpha \frac{\partial \bar{z}_\alpha}{\partial t_\lambda} dt_\lambda .$$

Es müssen also $\varrho, \bar{\varrho}$ Eulersche Multiplikatoren der rechts von ihnen stehenden Differentialausdrücke sein, das ergibt die Bedingungen

$$(18)\qquad \sum_{(\lambda,\mu,\nu)} \varDelta_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial t_\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial t_\mu}\left(\varDelta_\beta \frac{\partial z_\beta}{\partial t_\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial t_\nu}\left(\varDelta_\gamma \frac{\partial z_\lambda}{\partial t_\mu}\right)\right) = 0,$$

wo die Summe aus drei Gliedern besteht, welche aus dem ersten durch zyklische Vertauschung von λ, μ, ν entstehen.

Diese können auch geschrieben werden

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} \varDelta_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial t_\lambda} & \varDelta_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial t_\mu} & \varDelta_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial t_\nu} \\ \frac{\partial \varDelta_\beta}{\partial t_\lambda} & \frac{\partial \varDelta_\beta}{\partial t_\mu} & \frac{\partial \varDelta_\beta}{\partial t_\nu} \\ \frac{\partial z_\beta}{\partial t_\lambda} & \frac{\partial z_\beta}{\partial t_\mu} & \frac{\partial z_\beta}{\partial t_\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

wo jedoch erst in der entwickelten Determinante über die Indizes α und β in der gewöhnlichen Weise zu summieren ist.

Die Gleichungen (18) ergeben $\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{3!}$ Gleichungen, in denen die imaginären Teile der rechten Seiten identisch verschwinden, denn es ist identisch

$$\varDelta_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial t_\lambda} + \bar{\varDelta}_\alpha \frac{\partial \bar{z}_\alpha}{\partial t_\lambda} = 0 .$$

Für den einfachsten Fall $n = 2$ ist auch die nähere Ausrechnung von Interesse. Setzt man die M_{2n-1} in der Form gegeben voraus

$$x_4 = f(x_1 x_2 x_3)$$

und bezeichnet die Differentialquotienten von f durch entsprechende Indizes, so kann man als Parameter x_1, x_2, x_3 nehmen.

Die Formel (16) gibt dann

$$(20)\qquad d\Phi = \varrho \begin{vmatrix} dx_1 + i\,dx_2, & dx_3 + i(f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3), & 0 & 0 \\ 1 & i f_1 & 1 & -i f_1 \\ i & i f_2 & -i & -i f_2 \\ 0 & 1 + i f_3 & 0 & 1 - i f_3 \end{vmatrix},$$

was ausgerechnet ergibt

$$(21)\qquad d\Phi = 2\varrho i\,(dx_1(-f_2 + f_1 f_3) + dx_2(f_1 + f_2 f_3) + dx_3(1 + f_3^2)).$$

(Die Eulersche Bedingung für die Existenz eines Multiplikators wird dann

$$(22)\quad (f_{11}+f_{22})(1+f_3^2)+f_{33}(f_1^2+f_2^2)-2f_{13}(f_1 f_3-f_2)-2f_{23}(f_1+f_2 f_3)=0.$$

Setzt man nun die Gleichung der Mannigfaltigkeit M_{2n-1} in die Form

$$\varphi(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)=0$$

und rechnet (22) dementsprechend um, so ergibt sich

$$(23)\quad \begin{aligned} &(\varphi_{11}+\varphi_{22})(\varphi_3^2+\varphi_4^2)+(\varphi_{33}+\varphi_{44})(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\\ &-2(\varphi_{13}+\varphi_{24})(\varphi_1\varphi_3+\varphi_2\varphi_4)+2(\varphi_{23}-\varphi_{14})(\varphi_1\varphi_4-\varphi_2\cdot\varphi_3)=0. \end{aligned}$$

Der Differentialausdruck links ist aber genau der von Herrn E. E. Levi[2]) aufgestellte Ausdruck $\mathfrak{C}(\varphi)$, welcher auf einer Mannigfaltigkeit $\varphi=0$ nicht Zeichen wechseln darf, wenn diese Grenze des Existenzbereiches einer analytischen Funktion sein soll, und zwar kann für $\mathfrak{C}(\varphi)\leqq 0$ die Funktion nur für $\varphi>0$ existieren und umgekehrt. Man kann den obigen Ausdruck auch schreiben

$$(24)\quad 16\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\,\partial\bar z_1}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\,\partial\bar z_2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_1}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\,\partial\bar z_2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar z_1\,\partial z_2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_2}\right)$$

oder als Determinante

$$(25)\quad \mathfrak{C}(\varphi)=-16\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_2}\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar z_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\,\partial\bar z_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\,\partial\bar z_1}\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar z_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\,\partial\bar z_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\,\partial\bar z_2} \end{vmatrix}.$$

Werden hier statt $z_1\, z_2,\ \bar z_1,\ \bar z_2$ zwei neue Veränderliche $z_1',\ z_2'$ und ihre konjugierten eingeführt, die analytische Funktionen von $z_1\, z_2$ bzw. $\bar z_1\,\bar z_2$ sind, so ist hieraus unmittelbar ersichtlich, daß der transformierte Ausdruck wird

$$(26)\quad \mathfrak{C}'(\varphi)=\mathfrak{C}(\varphi)\left(\frac{\partial z_1}{\partial z_1'}\,\frac{\partial z_2}{\partial z_2'}-\frac{\partial z_1}{\partial z_2'}\,\frac{\partial z_2}{\partial z_1'}\right)\left(\frac{\partial\bar z_1}{\partial\bar z_1'}\,\frac{\partial\bar z_2}{\partial\bar z_2'}-\frac{\partial\bar z_1}{\partial\bar z_2'}\,\frac{\partial\bar z_2}{\partial\bar z_1'}\right).$$

Daraus folgt aber, daß das vierfache Integral

$$(27)\quad \int\mathfrak{C}(\varphi)\,dz_1\,dz_2\,d\bar z_1\,d\bar z_2$$

eine Integralinvariante ist für eine beliebige Funktion φ der vier Variablen $z_1\, z_2,\ \bar z_1\,\bar z_2$ gegenüber Transformationen von der Gestalt

$$\begin{aligned} z_1' &= f_1(z_1\, z_2), & \bar z_1' &= g_1(\bar z_1\,\bar z_2)\\ z_2' &= f_2(z_1\, z_2), & \bar z_2' &= g_2(\bar z_1,\ \bar z_2). \end{aligned}$$

---

[2]) Annali di matematica (3) 17 (1909), pg. 61 und 18 pg. 69. Man vergleiche dazu auch Bertil Almer, Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes. Thèse pour le Doctorat, Upsala 1922, § 4, pg. 29ff.

Es ist dabei keineswegs erforderlich, daß die Funktionen f und g konjugiert sind. Auch bei n Veränderlichen ist augenscheinlich der Integralausdruck

$$\int \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\beta} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \end{vmatrix} dz_1 \ldots dz_n d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_n \qquad (\alpha, \beta = 1 \ldots n) \tag{28}$$

gegenüber Transformationen invariant, welche nur die z_α für sich und die $\bar{z}_\alpha$ für sich transformieren.

Die Integrale (27) und (28) sind dabei so zu verstehen, daß die $z_\alpha, \bar{z}_\alpha$ als Funktionen von $2n$ reellen Veränderlichen t_β aufgefaßt werden und das Produkt der Differentiale gleich der Funktionaldeterminante der $z_\alpha, \bar{z}_\alpha$ nach den t_β $(\beta = 1 \ldots 2n)$ multipliziert mit dem Produkt der Differentiale der t_β gesetzt wird.

Es ist endlich sehr merkwürdig, daß der Integralausdruck (28) für $n = 1$ genau in das Dirichletsche Integral übergeht.

Man kann bemerken, daß auch das Integral

$$\int \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \right| dz_1 \ldots dz_n d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_n \tag{29}$$

gegenüber analytischen Transformationen der z_α für sich und der $\bar{z}_\alpha$ für sich invariant bleibt, aber man findet, daß es nur von den Werten von φ und seinen Derivierten an der Begrenzung des Integrationsgebieten abhängt.

Entwickelt man nämlich unter dem Integralzeichen nach den Elementen einer Reihe mit festem ersten Index λ und integriert partiell nach dem Greenschen Satz, der hier formal anwendbar bleibt, so erhält man

$$\int \sum_\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\beta} \Delta(\lambda \bar{\beta})\, dz_1 \ldots dz_n d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_n$$

$$= \sum_\beta \int (-1)^{n+\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\lambda} \Delta(\lambda \bar{\beta})\, dz_1 dz_2 \ldots dz_n d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_{\beta-1} \cdot d\bar{z}_{\beta+1} \ldots d\bar{z}_n$$

$$- \int \frac{\partial \varphi}{\partial z_\lambda} \sum_\beta \frac{\partial \Delta(\lambda, \bar{\beta})}{\partial \bar{z}_\beta} dz_1 \ldots dz_m d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_n,$$

wo die Summation ausführlich geschrieben ist, da über den Index λ nicht zu summieren ist, und das erste Integral über die Begrenzung erstreckt ist.

Aber die Summe unter dem zweiten Integral ist nach einer bekannten Jacobischen Identität gleich Null, denn die $\Delta(\lambda \bar{\beta})$ sind ja die Determinanten der Matrix, welche aus den Derivierten der $n-1$ Funktionen $\frac{\partial \varphi}{\partial z_\mu}$, in denen μ von λ verschieden, ist nach den n Variablen $\bar{z}_\beta$ gebildet ist.

Man kann noch bemerken, daß bei reellem φ die Integrale (28), (29) reell oder imaginär werden, je nachdem n gerade oder ungerade ist, da bei Vertauschung der z_α mit den $\bar{z}_\alpha$ eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen in der Reihenfolge der Differentiale vorgenommen wird.

III.

Die folgenden Ausführungen sollen der Verallgemeinerung des Riemannschen Gesichtspunktes der Definition von Funktionen einer komplexen Veränderlichen auf geeigneten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten gewidnet sein, und zwar von Funktionen von n komplexen Veränderlichen auf Mannigfaltigkeiten von $n+1$, $n+2 \ldots 2n$ Dimensionen. Man pflegt gewöhnlich die Verallgemeinerung auf die M_2 an die sog. Beltramischen Gleichungen, also an eine quadratische Differentialform und die konforme Abbildung zu knüpfen. Dieser Gesichtspunkt führt jedoch bei Ausdehnung auf mehr als eine Veränderliche, also mehr als zwei Dimensionen nur zur Potentialtheorie, nicht aber zu eigentlichen Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen.

Bilden wir auf einer M_m, deren Punkte durch die reellen Variablen t_λ $(\lambda = 1 \ldots m,\ n < m \leqq 2n)$ gegeben seien zunächst $2n$ reelle Funktionen $x_\alpha(t_\lambda)$ $(\alpha = 1 \ldots 2n)$ und aus diesen die n komplexen Funktionen $z_\gamma = x_{\gamma-1} + i\,x_{2\gamma}$, $\bar{z}_\gamma = x_{2\gamma-1} - i\,x_{2\gamma}$, so ist die Bedingung dafür, daß eine Funktion $\Phi(t_\lambda)$ als Funktion der z_γ und damit auch die zu Φ konjugierte Funktion $\bar{\Phi}$ als Funktion der $\bar{z}_\gamma$ dargestellt werden kann, das Verschwinden sämtlicher Determinanten der Matrix

$$(30)\qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t_\lambda} \\[2ex] \dfrac{\partial z_\gamma}{\partial t_\lambda} \end{matrix} \right\| = 0 \quad \text{und der konjugierten} \quad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t_\lambda} \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{z}_\gamma}{\partial t_\lambda} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Determinanten der Matrix

$$(31)\qquad \left\| \frac{\partial z_\gamma}{\partial t_\lambda}, \frac{\partial \bar{z}_\gamma}{\partial t_\lambda} \right\|$$

nicht sämtlich verschwinden, so daß die t_λ rückwärts aus den $z, \bar{z}$ oder auch den x regulär berechnet werden können.

Die Matrix (30) als eine Matrix von $m > n$ Vertikalreihen und $n+1$ Horizontalreihen stellt $m-(n+1)+1 = m-n$ lineare Gleichungen zwischen den $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t_\lambda}$ dar, also ein System von $m-n$ linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen für Φ, und zwar ein vollständiges, da sie die n unabhängigen Lösungen $\Phi = z_\gamma$ hat. Das analoge gilt von der konjugierten Matrix. Nun können die z_γ durch n andere unabhängige Funktionen der z_γ ersetzt werden und ebenso die t_λ durch m andere unabhängige Funktionen t'_λ der t_λ, ohne an den Beziehungen der Lösungen Φ dieses Systems untereinander etwas zu ändern, und es ist nicht nötig, die z_γ individuell zu geben, vielmehr genügt es, *ein vollständiges System von $m-n$ linearen partiellen Differentialgleichungen und damit auch das konjugierte System auf der M_m anzugeben, um Funktionen von n komplexen Variablen auf ihr zu definieren.*

Sei also

$$ {}_\varkappa A^\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial t_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1 \ldots m,\ \varkappa = 1 \ldots m-n) \tag{32} $$

ein solches vollständiges System, so wird unter einer sogleich anzugebenden Beschränkung dadurch auf der M_m ein System von Funktionen definiert, welche sich sämtlich als analytische Funktionen von n geeigneten unter ihnen darstellen lassen, wenn nur die ${}_\varkappa A^\lambda$ in einer gewissen Umgebung reguläre Funktionen der reellen Variablen t_λ sind.

Die Beschränkung aber besteht darin, daß das System (32) und sein konjugiertes kein Integral gemeinsam haben dürfen, oder, was dasselbe besagt, daß (32) kein reelles Integral haben darf, außer der Konstanten.

Wäre nämlich eines oder mehrere, etwa r unabhängige, vorhanden, so könnte man diese in (32) und dem konjugierten System als unabhängige Variable einführen, etwa für $t_1, t_2 \ldots t_r$. Dann würden aus (32) die Differentialquotienten nach $t_1 \ldots t_r$ wegfallen und das System (32) und sein konjugiertes nicht mehr n, sondern nur mehr $n-r$ komplexe Funktionen definieren, welche noch r reelle Parameter enthalten. Die M_m würde sich dann in ∞^r Mannigfaltigkeiten von $m-r$ Dimensionen zerlegen, auf deren jeder Funktionen von $n-r$ komplexen Veränderlichen definiert wären.

Bezeichnet man die Differentialoperation auf der linken Seite in (32) mit ${}_\varkappa A(\Phi)$, spaltet sie in den reellen und imaginären Teil und setzt $\Phi = U + iV$, so erhält man

$$ \begin{aligned} {}_\varkappa A(\Phi) &= ({}_\varkappa A' + i\,{}_\varkappa A'')(U + iV) \\ &= ({}_\varkappa A'(U) - {}_\varkappa A''(V)(+ i({}_\varkappa A''(U) + {}_\varkappa A'(V)) = 0 \end{aligned} \tag{33} $$

oder

$$ \begin{aligned} {}_\varkappa A'(U) &= {}_\varkappa A''(V) \\ {}_\varkappa A''(U) &= -\,{}_\varkappa A'(V) \end{aligned} \tag{34} $$

und hier tritt die völlige Analogie zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen klar zutage.

Um für $n=1$, $m=2$ die Beltramischen Gleichungen in der gewöhnlichen Form zu erhalten, schreiben wir etwa (34) in der Form

$$(35)\qquad \begin{aligned} a\frac{\partial U}{\partial u}+b\frac{\partial U}{\partial v}&=c\frac{\partial V}{\partial u}+d\frac{\partial V}{\partial v}\\ c\frac{\partial U}{\partial u}+d\frac{\partial U}{\partial v}&=-a\frac{\partial V}{\partial u}-b\frac{\partial V}{\partial v}\end{aligned}$$

und erhalten durch Auflösung

$$(36)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u}&=\frac{\frac{\partial V}{\partial u}(cd+ab)+\frac{\partial V}{\partial v}(b^2+d^2)}{ad-bc}\\ \frac{\partial U}{\partial u}&=-\frac{\frac{\partial V}{\partial u}(a^2+c^2)+\frac{\partial V}{\partial v}(ab+cd)}{ad-bc}.\end{aligned}$$

Setzt man

$$E=a^2+c^2\qquad F=-(ab+cd)\qquad G=b^2+d^2$$
$$ad-bc=\sqrt{EG-F^2},$$

so erhält man die gewöhnliche Form, wobei E, F, G noch mit einem willkürlichen Faktor multipliziert werden können. Das zugehörige ds^2 wird dann

$$ds^2=(du(a+ic)-dv(b+id))(du(a-ic)-dv(b-id)),$$

woraus ersichtlich ist, daß bei gegebenen ds die einzelnen Differentialoperatoren die zu der partiellen Differentialgleichung

$$(b+id)\frac{\partial \Phi}{\partial u}+(c+id)\frac{\partial \Phi}{\partial v}=0$$

und der konjugierten gehörigen totalen Differentialformen sind, wie es sein muß.

Es ist aber sogleich auf eine neu auftauchende Schwierigkeit aufmerksam zu machen, wenn das System (33) mehr als eine Differentialgleichung hat, die namentlich dann zur Geltung kommt, wenn man ein solches System dazu benutzen will, auf geschlossenen zweiseitigen Mannigfaltigkeiten Funktionen komplexer Variablen zu definieren.

Das System der Differentialgleichungen hat man sich dabei nach Art der analytischen Fortsetzung über die Mannigfaltigkeit fortgesetzt zu denken, so daß die Koeffizienten in den lokalen Parametern überall regulär sind. Da nun aber das System ein vollständiges ist, so bestehen zwischen den Koeffizienten die daraus sich ergebenden Differentialgleichungen, und es erscheint durchaus nicht von vornherein sicher, daß dieses letztere System von Differentialgleichungen auf der Mannigfaltigkeit überhaupt überall reguläre und eindeutige Lösungen hat. Die Eindeutigkeit ist allerdings nicht unbedingt erforderlich, sondern es genügt, wenn nur das System bei der Fortsetzung nach den Parametern t_λ auf jedem geschlossenen Weg in ein dem Ausgangssystem äquivalentes System übergeht. Man könnte denken, daß die topologische Beschaffenheit der M_m hier bereits Hindernisse entgegenstellt, doch ist dies sicher nicht der Fall bei solchen M_m, welche in einem Raum von $2n$ Dimensionen singularitätenfrei und ohne Selbstdurchsetzung im Endlichen ausgebreitet werden können. Denn auf diesen sind ja die $z_a = x_{2a-1} + i\, x_{2a}$ solche überall reguläre komplexe Funktionen des Ortes.

IV.

Will man die Differentialgleichungen für den reellen und imaginären Teil einer durch (33) definierten Funktion Φ aufstellen, so hat man die Bedingungen aufzustellen, welche V erfüllen muß, damit das System (34) nach U integrierbar wird. Soll U durch V bis auf eine Konstante bestimmt sein, so muß sich also das System

$$(37)\qquad \begin{aligned} {}_\varkappa A'(\Phi) + {}_\varkappa A''(V)\frac{\partial \Phi}{\partial U} &= 0 \\ {}_\varkappa A''(\Phi) - A'_\varkappa(V)\frac{\partial \Phi}{\partial U} &= 0 \end{aligned}$$

zu einem vollständigen m-gliedrigen ergänzen lassen.

Die Bedingungen hierfür erhält man in bekannter Weise durch Bildung von Klammerausdrücken, wobei jedoch zu beachten ist, daß die so erhaltenen Bedingungen im allgemeinen nicht voneinander unabhängig sind, sondern infolge der als identisch erfüllt vorausgesetzten Bedingungen für die Vollständigkeit des Systems (33) Reduktionen erleiden.

Die Rechnung soll daher nur für den Fall $m = 2n$ ausgeführt werden und sodann der Fall $m = 3$, $n = 2$ betrachtet werden.

Aus der Bedingung für die Vollständigkeit des Systems (33) ergeben sich im ersten Fall zunächst die Identitäten

$$(37\,\mathrm{a})\qquad \begin{aligned} ({}_\alpha A'\, {}_\beta A') - ({}_\alpha A''\, {}_\beta A'') &= {}_\nu \varrho^{\alpha\beta}\, {}_\nu A' - {}_\nu \sigma^{\alpha\beta}\, {}_\nu A'' \\ ({}_\alpha A'\, {}_\beta A'') + ({}_\alpha A''\, {}_\beta A') &= {}_\nu \varrho^{\alpha\beta}\, {}_\nu A'' + {}_\nu \sigma^{\alpha\beta}\, {}_\nu A', \end{aligned}$$

wo die eingeklammerten Ausdrücke die Differentialausdrücke ${}_\alpha A'\, {}_\beta A' - {}_\beta A'\, {}_\alpha A'$ und die analogen bedeuten.

Bildet man nun die Klammerausdrücke von (37), so erhält man drei Systeme, je nachdem man zwei Gleichungen der ersten Form oder eine der ersten mit einer der zweiten Form oder endlich zwei der zweiten Form miteinander verbindet, und diese müssen sich sämtlich als lineare Verbindungen der Gleichungen (37) darstellen lassen.

Man hat so der Reihe nach die Gleichungen

$$(38)\qquad \begin{aligned} ({}_\alpha A' {}_\beta A')(\Phi) &= {}_\nu p^{\alpha\beta}\, {}_\nu A'(\Phi) + {}_\nu q^{\alpha\beta}\, {}_\nu A''(\Phi) \\ ({}_\alpha A' {}_\beta A'' - {}_\beta A' {}_\alpha A'')(V) &= {}_\nu p^{\alpha\beta}\, {}_\nu A''(V) - {}_\nu q^{\alpha\beta}\, {}_\nu A'(V), \end{aligned}$$

also bei festem α, β $2n+1$ Gleichungen für die $2n$ Größen p_ν, q_ν, welche daraus zu eliminieren sind.

Man erhält so Determinanten $2n+1$-ter Ordnung, welche in leichtverständlicher Bezeichnung geschrieben werden können:

$$(39)\qquad \begin{vmatrix} ({}_\alpha A' {}_\beta A'' - {}_\beta A' {}_\alpha A'')(V) & {}_\nu A''(V) & -{}_\mu A'(V) \\ {}_\alpha A'({}_\beta a'^{(\lambda)}) - {}_\beta A'({}_\alpha a'^{(\lambda)} & {}_\nu a'^{(\lambda)} & {}_\mu a''^{(\lambda)} \end{vmatrix} = 0,$$

und zwar erhält man $\frac{n(n-1)}{2}$ solcher Determinanten. Kombiniert man nun zwei Gleichungen der zweiten Art, so erhält man analog die $\frac{n(n-1)}{2}$ Determinanten

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} (-{}_\alpha A'' {}_\beta A' + {}_\beta A'' {}_\alpha A')(V) & {}_\nu A''(V) & -{}_\mu A'(V) \\ {}_\alpha A''({}_\beta a''^{\lambda}) - {}_\beta A''({}_\alpha a''^{\lambda} & {}_\nu a'^{(\lambda)} & {}_\mu a''^{(\lambda)} \end{vmatrix} = 0;$$

aber das Verschwinden der Determinanten (39) zieht das der Determinanten (40) nach sich und umgekehrt, und zwar zufolge der Identitäten (37a). Die Determinanten (39) und (40) unterscheiden sich ja nur in den ersten Vertikalreihen. Die Differenz zweier Determinanten mit denselben α, β gibt daher eine neue Determinante, deren Verschwinden aus den Identitäten (37a) sich sofort ergibt, so daß sich auf diesem Wege genau $\frac{n(n-1)}{2}$ linear unabhängige Differentialgleichungen zweiter Ordnung für V ergeben.

Verbindet man aber eine Gleichung der ersten Art mit einer der zweiten Art, was im ganzen auf n^2 Arten möglich ist, so erhält man auf demselben Wege die Gleichungen

$$(41)\qquad \begin{vmatrix} -({}_\alpha A' {}_\beta A' + {}_\beta A'' {}_\alpha A'')(V) & {}_\nu A''(V) & -{}_\mu A'(V) \\ {}_\alpha A'({}_\beta a''^{\lambda}) - {}_\beta A''({}_\alpha a'^{\lambda}) & {}_\nu a'^{\lambda} & {}_\mu a''^{\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Von diesen lassen sich wieder diejenigen, welche bei verschiedenen α und β durch Vertauschung von α, β auseinander entstehen, zufolge der Identitäten (37a) aufeinander zurückführen, so daß bloß $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ solcher linear unabhängigen Gleichungen sich ergeben. Im ganzen erhält man daher n^2 solcher Gleichungen.

Zugleich erkennt man, daß die Unterdeterminanten der ersten Horizontalreihe in (39), (40), (41) nicht sämtlich verschwinden können, weil sonst gegen die Voraussetzung die Gleichungen ${}_aA(U)=0$ und ${}_a\bar{A}(U)$ ein Integral gemeinsam hätten, und insbesondere die Unterdeterminante des ersten Elementes von Null verschieden ist, da sonst die obigen Gleichungen linear abhängig wären. Es kommen also die zweiten Differentialquotienten wirklich vor.

Nimmt man die Gleichungen ${}_aA(U)$ in der gewöhnlichen Form

$$(42)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_{2\varkappa-1}} &= \frac{\partial V}{\partial x_{2\varkappa}}, \\ \frac{\partial U}{\partial x_{2\varkappa}} &= -\frac{\partial V}{\partial x_{2\varkappa-1}}, \end{aligned}$$

so erhält man auch die letzteren Gleichungen in der üblichen Form

$$(43)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_{2\gamma-1}\,\partial x_{2\gamma'-1}} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_{2\gamma}\,\partial x_{2\gamma'}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_{2\gamma-1}\,\partial x_{2\gamma'}} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_{2\gamma'-1}\,\partial x_{2\gamma}} = 0.$$

Aber bei einem gegebenen System ${}_aA(\Phi)=0$ ist die Auffindung eines ersten Systems von n unabhängigen Lösungen genau so eine besondere Aufgabe, wie im Falle $n=1$ bei den Beltramischen Gleichungen. Die Einführung der reellen und imaginären Teile als unabhängige Veränderliche bringt dann das System auf die Form (42) bzw. (43).

V.

Dieselbe Aufgabe soll noch für den Fall $m=3$, $n=2$, also Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, behandelt werden. Man hat dann eine Gleichung in drei Veränderlichen t_1, t_2, t_3, welche geschrieben werde:

$$(44)\qquad A(\Phi) \equiv a_1\frac{\partial \Phi}{\partial t_1} + a_2\frac{\partial \Phi}{\partial t_2} + a_3\frac{\partial \Phi}{\partial t_3} = 0,$$

und es werde gesetzt $A(\Phi)=(A'+iA'')(\Phi)$, $a_a = a_a' + i a_a''$, $\Phi = U + iV$. Man hat dann die Gleichungen

$$(45)\qquad \begin{aligned} A'(U) &= A''(V), \\ A''(U) &= -A'(V). \end{aligned}$$

V ist so zu bestimmen, daß diese Gleichungen eine Lösung nach U zulassen, welche U bis auf eine Konstante bestimmt. Bildet man nun

$$(46)\qquad (A''A' - A'A'')\,U = (A''A'' + A'A')\,V,$$

so enthält (46) nur erste Differentialquotienten von U und kann mit (45) zusammen nach diesen aufgelöst werden. Das Ergebnis muß aber den Integrabilitätsbedingungen genügen, was drei Differentialgleichungen dritter Ordnung für V liefern würde. Aber eine von diesen ist bereits eine Folge der beiden anderen. Man wird also zur wirklichen Bildung der Gleichungen den folgenden Weg einschlagen und ausdrücken, daß das System

$$(47)\qquad \begin{aligned} &A'(\Psi)+A''(V)\frac{\partial\Psi}{\partial U}=0\\ &A''(\Psi)-A'(V)\frac{\partial\Psi}{\partial U}=0\\ &(A''A'-A'A'')(\Psi)+(A''A''+A'A')(V)\frac{\partial\Psi}{\partial U}=0\end{aligned}$$

ein vollständiges System für Ψ ist.

Bezeichnet man den Differentialausdruck $(A''A'-A'A'')\Psi$ mit $B(\Psi)=b_1\frac{\partial\Psi}{\partial t_1}+b_2\frac{\partial\Psi}{\partial t_2}+b_3\frac{\partial\Psi}{\partial t_3}$, so wird

$$(48)\qquad \begin{aligned} &(A'B-BA')(\Psi)=(A'(b_\alpha)-B(a'_\alpha))\frac{\partial\Psi}{\partial t_\alpha},\\ &(A''B-BA'')(\Psi)=(A''(b_\alpha)-B(a''_\alpha))\frac{\partial\Psi}{\partial t_\alpha}.\end{aligned}$$

Es müssen dann die Gleichungen

$$(49)\qquad \begin{aligned} &(A'B-BA')(\Psi)+(-BA''+A'A''A''+A'A'A')(V)\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial U}=0,\\ &(A''B-BA'')(\Psi)+(A''A''A''+A''A'A'+BA')(V)\frac{\partial\Psi}{\partial U}=0\end{aligned}$$

lineare Folgen von (47) sein. Daher erhält man die gesuchten Bedingungen ausgedrückt durch das Verschwinden zweier Determinanten

$$(49)\qquad \begin{vmatrix}(2A'A''A''+A'A'A'-A''A'A'')(V), & (A''A''+A'A')(V), & -A'(V), & A''(V)\\ A'(b_\alpha)-B(a'_\alpha) & , \quad b_\alpha & , \quad a''_\alpha & , \quad a'_\alpha\end{vmatrix}$$

$$(\alpha=1,2,3)$$

und

$$(50)\qquad \begin{vmatrix}(A''A''A''+2A''A'A'+A'A''A')(V), & (A''A''+A'A')(V), & -A'(V), & A''(V)\\ A'(b_\alpha)-B(a'_\alpha) & , \quad b_\alpha & , \quad a''_\alpha & , \quad a'_\alpha\end{vmatrix}$$

Die Determinante $|b_\alpha, a''_\alpha, a'_\alpha|$ ist wieder notwendig von Null verschieden, weil sonst $A'(U)=0$ und $A''(U)=0$ ein Integral gemeinsam hätten.

Die beiden Gleichungen (49) und (50) enthalten also wirklich die dritten Derivierten von V. Durch Ersetzung von a'_α durch $-a''_\alpha$ und a''_α durch a'_α werden die Gleichungen (49) und (50) vertauscht, wie es sein muß. Ist dann auf der M_3 eine reguläre Lösung V von (49), (50) bekannt, so findet man U durch eine Quadratur, und dieses ist also dann bis auf eine reelle Konstante eindeutig bestimmt, wenn sich auf M_3 jeder geschlossene Weg auf Null zusammenziehen läßt. Es ist dann $U+iV$ auf der M_3 eine eindeutige reguläre Funktion.

VI.

Die eigentliche Riemannsche[3]) Fragestellung, die Funktionen unabhängig von ihrer Ausdrucksweise zu untersuchen, insbesondere die einzelne Funktion durch voneinander unabhängige Bedingungen zu bestimmen, kommt darauf zurück, ein Lösungssystem der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen durch solche Bedingungen zu bestimmen.

Faßt man nun diese partiellen Differentialgleichungen ebenfalls im Riemannschen Sinne als Grenzfälle linearer Gleichungen auf, so fragt es sich, welche Systeme linearer Gleichungen man zu den gegebenen hinzufügen kann, um die Lösung zu bestimmen. Das gelingt häufig dadurch, daß man die gegebenen linearen Gleichungen auf eine Form bringt, in der sie ausdrücken, daß eine gegebene positive Funktion der Unbekannten einen extremen Wert erhält. Man wird aber nur dann Erfolg erwarten können, wenn diese Funktion zum ursprünglichen Problem in einer Beziehung steht, welche unabhängig von der zufälligen Wahl der unabhängigen Veränderlichen ist, also gegenüber Transformationen, welche das Problem nicht wesentlich ändern, invariant ist.

Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt die Funktionen zweier konjugierter Variablen $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, so sieht man, daß man für Zwecke der Transformation $z' = g(z)$, $\bar{z}' = h(\bar{z})$ z und $\bar{z}$ als unabhängige Variable betrachten kann, und ebenso g und h als unabhängige Funktionen. Damit erkennt man als einfachste Integralinvariante

$$\int \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\, dz\, d\bar{z}. \tag{51}$$

Setzt man $f = u + iv$, $z = x + iy$, so wird (51) ausgerechnet

$$-\frac{1}{2} i \int \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx\, dy, \tag{52}$$

also bis auf den Faktor $-\frac{i}{2}$ genau das von Riemann[4]) seinen Untersuchungen zugrunde gelegte Integral.

Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen zu (51) lauten nun

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0. \tag{53}$$

Sie sagen aus, daß $\frac{\partial f}{\partial z}$ eine analytische Funktion von z und ebenso $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$ eine solche von $\bar{z}$ ist. Wenn also die Unstetigkeits- und Randbedingungen sowie die Minimalbedingung durch eine analytische Funktion f

---

[3]) Dissertation § 19 ff.; Werke 2. Aufl., S. 35 ff.

[4]) Dissertation § 16; Werke 2. Aufl., S. 30.

erfüllt werden, so ist das Integral identisch Null, wenn aber nicht, so ergibt erst $\frac{\partial f}{\partial z}$ und damit auch das Integral $\int \frac{\partial f}{\partial z} dz$ eine analytische Funktion, welche zu dem ursprünglichen Problem in engster Beziehung steht und dann zu untersuchen ist. Man sieht hier, wie der Weg, den Riemann eingeschlagen hat, notwendig mit der Natur des Problems verknüpft ist.

Es ist nicht schwer, sich über die Gesamtheit der Integralinvarianten Rechenschaft zu geben. Es existieren für $n \geqq 2$ $n-1$ voneinander unabhängige, in denen n-te Differentialquotienten von f wirklich vorkommen und keine höheren, doch sind für $n > 2$ keine ganzen rationalen vorhanden.

In gewissem Sinne ist die einfachste der dritten Ordnung die folgende

$$(54) \quad \int \sqrt[3]{\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{z}^2 \partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right)}\, dz\, d\bar{z}.$$

Sie ist reell bei reellem f, und der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist linear in den höchsten Differentialquotienten. Man kann diesen Ausdruck noch in leicht ersichtlicher Weise abändern, indem man eine homogene Funktion dritten Grades von $\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$ hinzufügt. Verzichtet man auf Symmetrie in z und $\bar{z}$, so kann man andere Ausdrücke dieser Art bilden. Es wäre interessant, wenn diesen Invarianten auch geometrische Bedeutung zukommen würde.

Die daraus entspringenden Variationsprobleme sind für erste wohl zu kompliziert.

VII.

Die Übertragung dieses Ansatzes auf mehr Veränderliche liefert nun formal bemerkenswerte Ergebnisse, so daß es gestattet sei, dabei zu verweilen, wenn auch von da bis zu bestimmten Existenzsätzen noch ein weiter Weg ist.

Setzt man n Funktionen f_α $(\alpha = 1 \ldots n)$ und ihre konjugierten $\bar{f}_\alpha$ als Unbekannte an, so hat man als einfachste Integralinvariante

$$(55) \qquad \int \left|\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta}\right| \left|\frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta}\right| dz_1 \ldots dz_n, d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_n = J.$$

Zur Abkürzung soll das Differential in diesem Integral mit $d\omega$ bezeichnet werden und mit $d\omega_\beta, d\omega'_\beta$ diejenigen Differentiale, welche entstehen, wenn dz_β resp. $d\bar{z}_\beta$ weggelassen wird. Bezeichnet dann $\Delta, \bar{\Delta}$ die beiden Determinanten, $\Delta_{\alpha\beta}, \bar{\Delta}_{\alpha\beta}$ die Unterdeterminanten von $\left|\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta}\right|, \left|\frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta}\right|$, so hat man für die erste Variation von J

(56)
$$\delta J = \int_R (-1)^{\beta} \delta f_{\alpha} \Delta_{\alpha\beta} \bar{\Delta}\, d\omega_{\beta} + (-1)^{n+\beta} \delta \bar{f}_{\alpha} \bar{\Delta}_{\alpha\beta} \Delta\, d\,\omega'_{\beta}$$
$$- \int \left(\delta f_{\alpha} \frac{\partial (\Delta_{\alpha\beta} \bar{\Delta})}{\partial z_{\beta}} + \delta \bar{f}_{\alpha} \frac{\partial (\bar{\Delta}_{\alpha\beta} \Delta)}{\partial \bar{z}_{\beta}} \right) d\omega,$$

wo das erste Integral über die Begrenzung des Gebietes zu erstrecken ist.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Eulerschen Gleichungen als

$$\frac{\partial (\Delta_{\alpha\beta} \bar{\Delta})}{\partial z_{\beta}} = 0, \qquad \frac{\partial (\bar{\Delta}_{\alpha\beta} \Delta)}{\partial \bar{z}_{\beta}} = 0,$$

wo über die β zu summieren ist. Da aber nach der Jacobischen Identität bei Ausrechnung der Koeffizient von $\bar{\Delta}$ resp. Δ verschwindet, so bleiben die Gleichungen

(57)
$$\Delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial z_{\beta}} = 0, \qquad \bar{\Delta}_{\alpha\beta} \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_{\beta}} = 0.$$

Da nun $|\Delta_{\alpha\beta}| = \Delta^{n-1}$ und ebenso $|\bar{\Delta}_{\alpha\beta}| = \bar{\Delta}^{n-1}$, so ergeben sich immer, wenn $\Delta, \bar{\Delta}$ von Null verschieden sind, die Gleichungen

(58)
$$\frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial z_{\beta}} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_{\beta}} = 0.$$

Gelingt es also durch geeignete Randbedingungen, das Problem zu einem bestimmten und lösbaren zu machen, so daß die Funktionaldeterminanten nicht verschwinden, so sind diese Funktionaldeterminanten im Innern des Gebietes analytische Funktionen der z_{α} resp. $\bar{z}_{\alpha}$, deren Beziehung zu den Randbedingungen allerdings noch erst zu untersuchen ist.

VIII.

Noch schwieriger scheint es aber, den Ansatz zu bearbeiten, der sich darbietet, wenn man Funktionen von n komplexen Veränderlichen auf einer M_m definiert. Im einfachsten Fall $m = 3, n = 2$ hat man eine partielle Differentialgleichung in drei Veränderlichen, t_1, t_2, t_3, und ihre konjugierte.

Seien diese

(59)
$$A(\Phi) = a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} + a_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} + a_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t_3} = 0,$$
$$\bar{A}(\bar{\Phi}) = \bar{a}_1 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t_1} + \bar{a}_2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t_2} + \bar{a}_2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t_3} = 0.$$

Die Bedingung, daß $A(U) = 0$ und $\bar{A}(U) = 0$ kein gemeinsames Integral haben, ist hier gegeben durch das Nichtverschwinden der Determinante

(60)
$$|A(\bar{a}_{\alpha}) - \bar{A}(a_{\alpha}),\ a_{\alpha}\, \bar{a}_{\alpha}| = (a, \bar{a}) = (\bar{a}, a),$$

welche also reell ist. Führt man nun statt der Variablen t_α andere t'_β ein, so findet man in leicht verständlicher Bezeichnung

$$(\bar{a}', a')_{t'} = (\bar{a}, a)_t \left| \frac{\partial t'_\alpha}{\partial t_\beta} \right|. \tag{61}$$

Werden ferner die Differentialausdrücke (59) mit Faktoren M, $\overline{M}$ multipliziert, so ergibt sich

$$(Ma, \overline{M}\,\bar{a}) = M^2\,\overline{M}^2\,(a\,\bar{a}). \tag{62}$$

Damit aber erweist sich das Integral

$$\int \frac{(A(\Phi)\,\overline{A}(\overline{\Phi}))^2}{(a\,\bar{a})}\,dt_1\,dt_2\,dt_3 = H \tag{63}$$

als invariant gegenüber einer Transformation der Parameter t_α und einer Abänderung von A und $\overline{A}$ um konjugierte Faktoren, und überhaupt als eine simultane Integralinvariante der beiden Differentialausdrücke A, $\overline{A}$, ganz abgesehen davon, daß diese beiden konjugiert sind.

Es möge nun vorausgesetzt werden, daß die Differentialgleichung $A(\Phi) = 0$ den Jacobischen Multiplikator 1 gestatte, daß also

$$\sum_\alpha \frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_\alpha \frac{\partial \bar{a}_\alpha}{\partial t_\alpha} = 0.$$

In gewissem Sinne ist das nach dem obigen keine wesentliche Beschränkung, wenigstens in einem genügend kleinen Gebiet.

Bildet man nun die erste Variation von H, so erhält man

$$\begin{aligned}
\delta H = &\int_R 2\,\frac{A(\Phi)\,\overline{A}(\overline{\Phi})}{(a\,\bar{a})}\,(\delta\Phi\,\overline{A}\,(\overline{\Phi})(a_1\,dt_2\,dt_3 + a_2\,dt_3\,dt_1 + a_3\,dt_1\,dt_2) \\
&+ \int_R 2\,\frac{A(\Phi)\,\overline{A}\,\overline{\Phi}}{(a\,\bar{a})}\,(\delta\,\overline{\Phi}\,A(\Phi))\,(\bar{a}_1\,dt_2\,dt_3 + \bar{a}_2\,dt_3\,dt_1 + \bar{a}_3\,dt_1\,dt_2) \\
&- 2\int \left(\delta\Phi\,\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\left(\frac{a_\alpha\,A(\Phi)\,\overline{A}\,(\overline{\Phi})^2}{(a\,\bar{a})}\right) + \delta\overline{\Phi}\,\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\left(\frac{\bar{a}_\alpha\,\overline{A}\,\overline{\Phi}\,A\,(\Phi)^2}{(a\,\bar{a})}\right)\right) dt_1\,dt_2\,dt_3,
\end{aligned} \tag{64}$$

und mit Rücksicht auf die obige Voraussetzung über die a_α werden nun die Eulerschen Gleichungen

$$a_\alpha\,\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\,\frac{A(\Phi)\,\overline{A}\,(\overline{\Phi})^2}{(a\,\bar{a})} = 0, \qquad \bar{a}_\alpha\,\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\,\frac{A\,(\overline{\Phi})\cdot A\,(\Phi)^2}{(a\,\bar{a})} = 0. \tag{65}$$

Gelingt es also hier wieder durch geeignete Randbedingungen das Problem zu einem lösbaren und bestimmten zu machen, so ist jetzt $A(\Phi)\dfrac{\overline{A}\,(\overline{\Phi})^2}{(a\,\bar{a})}$ eine analytische Funktion von zwei komplexen Veränderlichen auf der M_3 im oben ausgeführten Sinn.

Daß hier die analogen Untersuchungen wie bei einer Variablen viel schwieriger und komplizierter sein werden, wenn sie überhaupt durchführbar sind, liegt auf der Hand. Trotzdem habe ich die obigen formalen Entwicklungen nicht unterdrücken wollen, weil sie wenigstens die Schwierigkeiten aufzeigen, welche ein Weitergehen auf dem Riemannschen Weg darbietet.

Vielleicht hätte Riemann auch die Ideen zur Überwindung dieser Schwierigkeiten gehabt.

(Eingegangen am 25. 1. 1926.)